

Solução Analítica Fracionária Anômala para Termografia Infravermelha com Aquecimento Periódico

DIMBARRE, Manuela Bertelli¹; SOMER, Aloisi¹;

Universidade Estadual de Ponta Grossa - Departamento de Física¹

manudim0808@gmail.com¹

Palavras-Chave: Difusão de calor; Cálculo Fracionário; Perfil de Temperatura.

Resumo

O estudo desenvolvido é referente ao fenômeno da difusão e em como as equações de difusão fracionária estão ligadas com os sistemas biológicos, em especial, em sistemas ex-vivo, considerando fontes de calor periódicas, para 3 meios estudados (ar, tecido biológico e músculo). Para entender os cenários possíveis do problema do projeto, foram analisados os modelos clássicos e fracionários, obtidos a partir das equações diferenciais parciais, e em como eles se comportam a partir da solução do perfil de temperatura.

I. INTRODUÇÃO

O fenômeno de difusão constitui um dos mecanismos de transporte mais importantes, sendo responsável pela propagação de partículas, energia e outras grandezas físicas em sistemas fora do equilíbrio termodinâmico, como por exemplo a dispersão do gás no ar (TATEISHI, 2010). De maneira geral, um sistema difusivo tende a evoluir, espontaneamente, em direção ao equilíbrio, reduzindo as diferenças espaciais de concentração ou temperatura. O estudo da difusão teve seu desenvolvimento consolidado a partir dos trabalhos de Jean Baptiste Joseph Fourier, que formulou a teoria da condução de calor em sólidos (FOURIER, 1822). Partindo da combinação da lei de Fourier para o fluxo de calor:

$$\mathbf{q} = -K \nabla T_u, \quad (1)$$

onde $\mathbf{q}$ é o vetor densidade de corrente de calor, T_u é a função temperatura em cada ponto da amostra, a cada instante, e K é a condutividade térmica. Combinando a Eq. (1) com a equação da conservação de energia, obtém-se a equação de difusão de calor:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (2)$$

Para encontrar a solução desejada da equação de fluxo de calor, é preciso possuir informações sobre o problema em questão e sobre os meios que se está trabalhando, já que a equação é genérica. Por essa razão, devem-se estabelecer as condições iniciais do problema e especificar as condições de fronteira (ou contorno).

A transferência de biocalor analítica em sistemas biológicos, especificamente em sistemas in-vivo e ex-vivo, é um dos problemas de aplicações biomédicas (BECKER; KUZNETSOV, 2015). A alta complexidade do primeiro sistema é descrito pelo modelo apresentado por Harry Pennes (PENNES, 1948), descrito pela equação da biotransferência de calor e dada por:

$$\rho(x, y, z) c(x, y, z) \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \nabla \cdot [k(x, y, z) \nabla T(x, y, z, t)] + \rho_b c_b \omega_b(x, y, z) [T_b - T(x, y, z, t)] + Q_m(x, y, z) + Q_{ext}. \quad (3)$$

onde ρ representa a massa específica, c o calor específico e k a condutividade térmica. Além disso, os termos o subscrito “b” referem-se às propriedades do sangue, sendo ω_b , que é o coeficiente de perfusão sanguínea, Q_m o calor gerado devido à atividade metabólica e T_b é a temperatura do sangue arterial. Com a técnica de relaxação térmica é possível analisar o perfil de temperatura na superfície do material biológico. Este trabalho investiga a distribuição de temperatura em um sistema de dupla camada (pele–tecido adiposo), buscando a solução espacial no interior do tecido para compreender a influência das camadas internas na temperatura superficial. A equação da biotransferência de calor representa a distribuição da temperatura ao longo do tempo e do espaço em tecidos vivos.

Por isso, no modelo estudado, foi considerado um sistema biológico sem a fonte metabólica de calor (um sistema ex-vivo) e, portanto, chegamos em uma equação de difusão de calor com possível fonte externa.

II. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA/MATERIAIS E MÉTODOS

A metodologia teórica adotada baseou-se na resolução da equação de difusão de calor no regime estacionário, mediante a aplicação de condições de contorno apropriadas, com o objetivo de obter soluções analíticas para a distribuição de temperatura no sistema em análise. O trabalho focou na análise da difusão térmica em tecidos ex-vivo submetidos ao aquecimento por uma fonte laser periodicamente modulada, típica de técnicas fototérmicas, considerando os modelos clássico e fracionário de difusão térmica parabólica.

A partir das ideais apresentadas, busca-se entender como um aquecimento periódico, altera o perfil de temperatura da matéria estudada e esse resultado pode representar diversos

tipos de medidas por fenômenos fototérmicos, realizadas em laboratório. Nesse trabalho, foi utilizado três meios (1, 2 e 3) onde são, respectivamente, o ar, e o tecido ex-vivo composto por duas camadas, que pode ser a pele ou o músculo. Primeiramente, foi considerado um meio biológico que será submetido a um aquecimento externo periódico, como um feixe de laser pulsado.

Para a obtenção do perfil de temperatura, define-se a propagação de calor como unidimensional, o que justifica quando uma grande área é aquecida. Com isso, as equações de difusão térmica fracionária para cada meio são:

$$\frac{\partial^2 T_1(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t} = -\frac{F_1(x, t)}{K_1}, \quad \left(x \leq -\frac{L_2}{2}\right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 T_2(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2} \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial t} = -\frac{F_2(x, t)}{K_2}, \quad \left(-\frac{L_2}{2} \leq x \leq \frac{L_2}{2}\right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 T_3(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_3} \frac{\partial T_3(x, t)}{\partial t} = -\frac{F_3(x, t)}{K_3}, \quad \left(x > \frac{L_2}{2}\right), \quad (6)$$

onde α representa a difusividade térmica, K a condutividade térmica, $F_i(x, t)$ a fonte de calor correspondente, modulada por uma frequência f .

Considerando uma excitação térmica periódica, é possível escrever a solução temporal da temperatura e aplicar as condições de contorno — temperatura ao infinito e continuidade de temperatura e fluxo de calor nas interfaces — obtendo as soluções analíticas para as amplitudes térmicas em cada camada, resultando nas soluções para os meios 2 e 3:

$$\theta_2(x) = e^{g_2 x} c_3 + e^{-g_2 x} c_4 + e^{-x\beta_2} h_2, \quad 0 \leq x \leq L_2, \quad (7)$$

$$\theta_3(x) = e^{-g_3 x} c_6 + e^{-x\beta_3} e^{L_2\beta_3} h_3, \quad x \geq L_2, \quad (8)$$

onde c_3 , c_4 e c_5 são as constantes de integração e são encontradas a partir das condições de contorno, enquanto h_2 e h_3 são utilizados para simplificar as expressões e são dados por

$$h_2 = \frac{\alpha_2 q_0 \beta_2}{K_2 ((-i\omega) + \alpha_2 \beta_2^2)}, \quad (9)$$

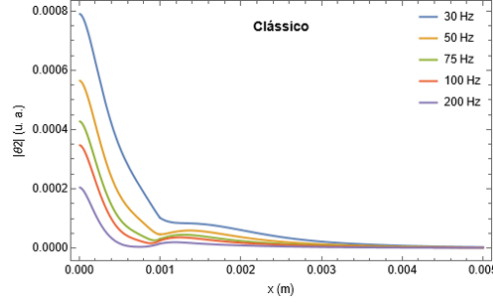
$$h_3 = \frac{e^{L_2\beta_2} \alpha_3 q_0 \beta_3}{K_3 ((-i\omega) + \alpha_3 \beta_3^2)}. \quad (10)$$

Com isso foi possível encontrar analiticamente o perfil de temperatura do sistema de dupla camada.

III. RESULTADOS

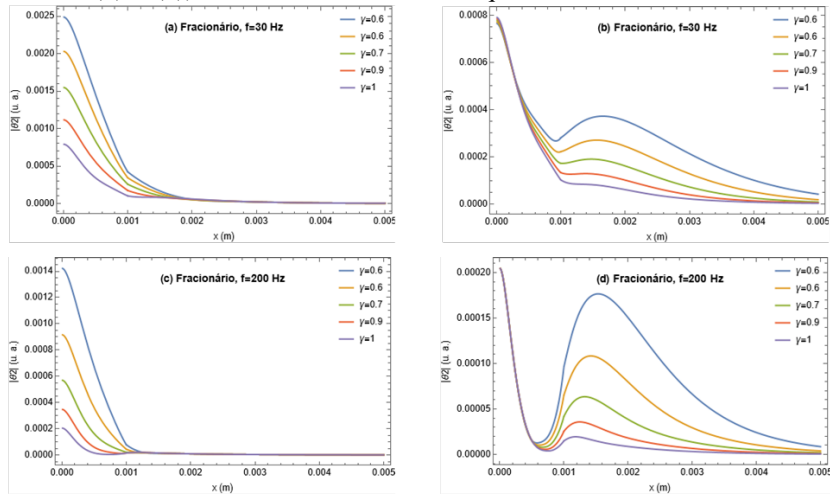
Para analisar o comportamento do perfil de temperatura, as simulações foram realizadas considerando um pulso de aquecimento proveniente de uma fonte luminosa (laser), submetido a diferentes frequências de modulação, $f = 30, 50, 75, 100$ e 200 Hz. Para o meio 1 (ar), foram utilizados a difusividade térmica $\alpha_1 = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ e a condutividade térmica $K_1 = 0,026 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$. Para o meio 2 foi adotada a condutividade térmica $K_2 = 0,25 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, enquanto para o meio 3 utilizou-se $K_3 = 0,50 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$. O calor inicial foi considerado igual a $q_0 = 1$. Além disso, assumiu-se que o fator fracionário γ varia no intervalo $0 \leq \gamma \leq 1$. Em todas as simulações, a espessura da camada 2 foi fixada em $L_2 = 1 \text{ mm}$.

Fig. 1. Temperatura do sistema ex-vivo em função de diferentes valores de frequência, fixando os parâmetros do meio 2, com $\alpha_2 = 1,5 \text{ m}^2/\text{s}$ e $\beta_2 = 7000 \text{ m}^{-1}$, e do meio 3, $\alpha_3 = 1,5 \text{ m}^2/\text{s}$ e $\beta_3 = 1000 \text{ m}^{-1}$.



Fonte: A autora.

Fig. 2. Temperatura do sistema ex-vivo em função de diferentes valores de gama (tanto para o meio 2 (a) e (c), quanto para o meio 3 (b) e (d)), fixando os valores da frequência, sendo de 30 Hz e 200 Hz..



Fonte: A autora.

Na Figura 1, a equação de difusão no modelo clássico é aplicada a um sistema multicamadas, onde o máximo ocorre na superfície e a profundidade de penetração diminui com o aumento da frequência. O “ombro” observado resulta das diferentes propriedades

térmicas dos três meios e das descontinuidades nas interfaces, que alteram a atenuação. Na Figura 2, mostra-se a distribuição de temperatura com os mesmos parâmetros, mas no modelo de difusão fracionária. Em (a) e (c) varia-se o expoente fracionário do meio 2 (γ_2), enquanto em (b) e (d) varia-se o do meio 3 (γ_3), permitindo analisar o efeito da frequência de modulação no perfil térmico.

IV. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo analítico para a dinâmica de relaxação térmica em sistemas biológicos *ex vivo* de duas camadas sob aquecimento periódico por laser modulado. A partir da equação fracionária de difusão térmica, obtiveram-se soluções para o perfil de temperatura considerando propriedades térmicas e ópticas dos meios. Os resultados mostram que o cálculo fracionário descreve efeitos de transporte anômalo em tecidos biológicos, oferecendo uma representação mais realista da dinâmica térmica. O modelo auxilia na interpretação de experimentos fototérmicos e termográficos e pode contribuir para a caracterização térmica de tecidos *ex vivo*.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, Grupo de Propriedades Eletrônicas e Vibracionais em Materiais (GPEViM) da UEPG pela estrutura e à Fundação Araucária/PIBIC pelo fomento.

REFERÊNCIAS

- BECKER, S. M.; KUZNETSOV, A. V. **Heat Transfer and Fluid Flow in Biological Processes**. Boston: Academic Press, 2015.
- FOURIER, J. B. J. **Théorie Analytique de la Chaleur**. Paris: Firmin Didot, 1822.
- PENNES, H. H. Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm. **Journal of Applied Physiology**, v. 1, n. 2, p. 93–122, 1948.
- TATEISHI, A. A. **Desenvolvimento do Conceito de Difusão: De Fourier ao Modelo de Pente**. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Física)) — Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.