Não quadraticidade do tempo de primeira chegada em trajetórias bohmianas

SCHERER, Matheus[1]; RIBEIRO, Alexandre[2]; ANGELO, Renato[3];

Universidade Federal do Paraná – Departamento de Física[1,2,3]

matheus.scherer@ufpr.br[1]

Palavras-Chave: Mecânica bohmiana; tempo de chegada; POVMs.

Resumo

Investigamos se a estatística bohmiana do tempo de primeira chegada a uma região alvo admite representação por um efeito de POVM independente da preparação. Para uma família coerente de superposições ortogonais, um critério de polarização implica que qualquer efeito fixo deve gerar apenas dependência de primeira harmônica na fase relativa. Simulações em uma armadilha harmônica anisotrópica bidimensional mostram uma contribuição dominante de segundo harmônico, violando essa condição. O resultado exclui, para a classe analisada, uma representação universal por POVM fixo.

I. Introdução

O tempo de chegada em mecânica quântica coloca a questão de saber se uma grandeza temporal pode ser representada como observável operacional. Para um evento temporal Θ, uma descrição por POVM exigiria um efeito positivo fixo $E(\Theta)$ tal que

$$p_\psi(t \in \Theta) = \langle\psi| E(\Theta) |\psi\rangle .$$

Essa identificação é delicada porque a primeira chegada não é uma função instantânea da configuração, mas uma propriedade de história: ela depende do segmento anterior da trajetória, ou, operacionalmente, do processo que define o evento de detecção (Allcock (1969), Kijowski (1974), Busch, Grabowski e Lahti (1997)).

Na mecânica bohmiana, essa grandeza pode ser definida diretamente, pois a configuração possui trajetória. Para uma partícula sem spin,

$$\dot{Q}(t) = v^\psi(Q(t), t), \qquad v^\psi(q,t) = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\left(\frac{\nabla\psi(q,t)}{\psi(q,t)}\right), \tag{1}$$

com distribuição inicial $\rho(q,0) = |\psi(q,0)|^2$ em equilíbrio quântico (Bohm (1952a), Bohm (1952b), Dürr, Goldstein e Zanghì (1992)). Neste trabalho, testamos se a estatística

bohmiana de primeira chegada admite representação por um POVM fixo. Para a família de estados considerada, a resposta é negativa: a probabilidade de chegada apresenta harmônicos superiores na fase relativa, incompatíveis com uma forma quadrática no estado.

II. Fundamentação Teórica

Teorema 1 (Critério de no-go por polarização): Sejam $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ estados normalizados e ortogonais, e

$$|\Psi_\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi\rangle + e^{i\theta}\,|\phi\rangle\right), \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Se a estatística de um evento Θ for representável por um efeito positivo fixo $E(\Theta)$, isto é,

$$p_\theta(t \in \Theta) = \langle\Psi_\theta|\, E(\Theta)\, |\Psi_\theta\rangle\,,$$

então

$$p_\theta(t \in \Theta) = A + B\cos\theta + C\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad A, B, C \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Logo, a presença robusta de harmônicos $n \geq 2$ exclui a existência de tal efeito fixo para essa família.

Demonstração: Expandindo a forma quadrática,

$$p_\theta = \frac{1}{2}\left[\langle\psi|\, E\,|\psi\rangle + \langle\phi|\, E\,|\phi\rangle + e^{i\theta}\,\langle\psi|\, E\,|\phi\rangle + e^{-i\theta}\,\langle\phi|\, E\,|\psi\rangle\right].$$

Como $E = E^\dagger$, tomando $z = \langle\psi|\, E\,|\phi\rangle$, segue que

$$e^{i\theta}z + e^{-i\theta}\overline{z} = 2\left[\mathrm{Re}(z)\cos\theta - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{sen}\,\theta\right],$$

o que implica (2). ∎

Aplicamos esse critério ao tempo de primeira chegada bohmiano. Fixada uma região alvo $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, a primeira entrada da trajetória $Q_\psi(t; q_0)$ em Δ é definida por

$$\tau_{\Delta,\psi}(q_0) = \inf\{t > 0 : Q_\psi(t; q_0) \in \Delta\}, \qquad \inf\varnothing := \infty. \tag{3}$$

Para uma janela temporal $\Theta = [t_1, t_2]$, seja

$$\Gamma_{\Theta,\psi} = \{q_0 : \tau_{\Delta,\psi}(q_0) \in \Theta\}.$$

Em equilíbrio quântico, a probabilidade correspondente é

$$p_\psi(t \in \Theta) = \int_{\Gamma_{\Theta,\psi}} |\psi(q_0)|^2 \, \mathrm{d}q_0 = \int_\Theta \mathrm{d}t \int \mathrm{d}q_0 \, \delta(t - \tau_{\Delta,\psi}(q_0))|\psi(q_0)|^2. \tag{4}$$

Embora o peso inicial seja quadrático em ψ, o domínio $\Gamma_{\Theta,\psi}$ depende do próprio estado-guia. Essa dependência funcional é o mecanismo pelo qual a estatística de chegada pode violar a forma (2).

O modelo numérico é uma armadilha harmônica anisotrópica bidimensional,

$$H = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{m}{2}\left(\omega_x^2 X^2 + \omega_y^2 Y^2\right), \qquad \omega_x = 1, \quad \omega_y = \sqrt{2}. \tag{5}$$

A família de estados é

$$\Psi_\theta = \frac{\psi_A + e^{i\theta}\psi_B}{\sqrt{2}},$$

com

$$\psi_A = \frac{\phi_{00} + 0.7\phi_{20} + 0.5\phi_{02}}{\sqrt{1 + 0.7^2 + 0.5^2}}, \qquad \psi_B = \frac{\phi_{11} + 0.6\phi_{30} + 0.6\phi_{03}}{\sqrt{1 + 0.6^2 + 0.6^2}}.$$

Cada modo evolui como

$$\phi_{nm}(x, y, t) = \phi_n^{(\omega_x)}(x)\phi_m^{(\omega_y)}(y)e^{-iE_{nm}t/\hbar},$$

com $E_{nm} = \hbar\omega_x(n + 1/2) + \hbar\omega_y(m + 1/2)$. O alvo é o disco

$$\Delta = \{(x, y) : (x - X_c)^2 + (y - Y_c)^2 \leq R^2\}.$$

Para cada fase θ_i, usamos $N_i = 10^4$ condições iniciais distribuídas segundo $|\Psi_{\theta_i}(q, 0)|^2$ e evoluídas pela equação de guia (1). A estimativa da probabilidade é

$$p_i = \frac{N_i^{(\Theta)}}{N_i}, \qquad \sigma_i = \sqrt{\frac{p_i(1 - p_i)}{N_i}}.$$

Os dados são ajustados por $f_1(\theta) = A + B\cos\theta + C\,\mathrm{sen}\,\theta$, e a falha do ajuste é medida por χ^2_{red}. Como diagnóstico complementar, usamos

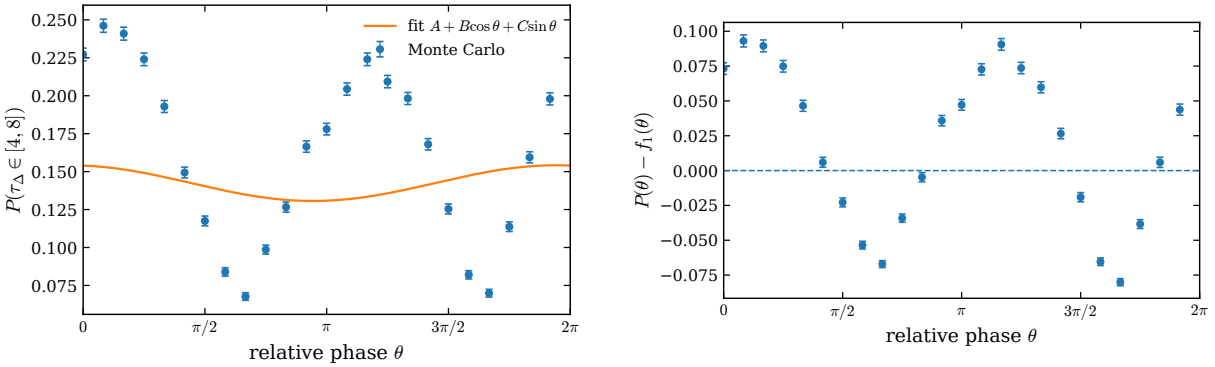
$$p(\theta) \simeq a_0 + \sum_n \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \,\mathrm{sen}\,(n\theta)\right], \qquad H_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

III. Resultados

Selecionamos dois regimes representativos para o teste de polarização. O primeiro, chamado de *caso extremo* e o segundo chamado de *caso limpo*

$$(X_c, Y_c, R, \Theta) = (-1; 0; 0,35; [6, 10]), \quad (X_c, Y_c, R, \Theta) = (0; 1; 0,35; [4, 8]).$$

Fig. 1. Caso limpo. À esquerda, probabilidade de primeira chegada em função de θ e ajuste por primeira harmônica. À direita, resíduos do ajuste.



Fonte: Elaborado pelos autores.

O caso limpo será usado como exemplo principal, pois mantém a probabilidade de chegada afastada de zero em todas as fases, reduzindo a possibilidade de que a violação observada seja efeito de baixa contagem.

A Tabela I mostra que a hipótese de primeira harmônica falha em ambos os regimes. No caso limpo, $p_{\min} \simeq 0,0677$, o que corresponde a aproximadamente 677 chegadas em 10^4 trajetórias na fase menos favorável. Assim, a discrepância não pode ser atribuída a flutuações associadas a baixa estatística. Ainda assim, $\chi^2_{\text{red}} \simeq 3,07 \times 10^2$ e $H_2/H_1 \simeq 5,02$. Portanto, a dependência em fase não pertence ao subespaço permitido por um efeito fixo, $p_\theta(t \in \Theta) \notin \text{span}\{1, \cos\theta, \text{sen}\,\theta\}$. Pelo Teorema 1, isso exclui a representação dessa estatística por um efeito positivo fixo $E(\Theta)$ para a família de estados considerada. O caso extremo reforça a mesma conclusão, com $\chi^2_{\text{red}} \simeq 4,85 \times 10^2$ e $H_2/H_1 \simeq 6,15$. A concordância qualitativa entre os dois regimes indica que a violação não é artefato de uma escolha isolada de alvo ou janela temporal.

A Figura 1 mostra diretamente a falha do ajuste de primeira harmônica no caso limpo. Os resíduos não se distribuem aleatoriamente em torno de zero, mas exibem estrutura sistemática em θ. Essa estrutura indica que a discrepância é uma propriedade

Tabela I. Resumo dos resultados do teste de polarização.

Quantidade	Caso extremo	Caso limpo
$\overline{p}$	$0,13228$	$0,16131$
$p_{\min}$	$0,0131$	$0,0677$
$p_{\max}$	$0,1948$	$0,2461$
χ^2_{red}	$4,85 \times 10^2$	$3,07 \times 10^2$
RMSE	$0,06545$	$0,05776$
H_2/H_1	$6,15$	$5,02$
H_{high}/H_1	$6,47$	$5,11$

Fonte: Elaborado pelos autores.

da dependência em fase da estatística de chegada, e não uma flutuação de Monte Carlo.

IV. Conclusões

Aplicamos um critério de polarização à estatística bohmiana do tempo de primeira chegada. Se essa estatística fosse representável por um efeito positivo fixo $E(\Theta)$, sua dependência na fase relativa deveria ter a forma $A + B\cos\theta + C\,\mathrm{sen}\,\theta$. As simulações violam essa condição: no caso limpo, $H_2/H_1 \simeq 5,02$; no caso extremo, $H_2/H_1 \simeq 6,15$.

Concluímos que, para a classe analisada, a distribuição bohmiana de primeira chegada não admite representação por um POVM fixo independente da preparação. O resultado não exclui POVMs operacionais de detecção, mas separa tais estatísticas de medição dos funcionais ontológicos de trajetória.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES).

Referências

ALLCOCK, G. R. The time of arrival in quantum mechanics i. formal considerations. **Annals of Physics**, v. 53, n. 2, p. 253–285, 1969.

BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. i. **Physical Review**, v. 85, n. 2, p. 166–179, 1952.

BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. ii. **Physical Review**, v. 85, n. 2, p. 180–193, 1952.

BUSCH, P.; GRABOWSKI, M.; LAHTI, P. J. **Operational Quantum Physics**. Berlin: Springer, 1997. v. 31. (Lecture Notes in Physics Monographs, v. 31).

DÜRR, D.; GOLDSTEIN, S.; ZANGHÌ, N. Quantum equilibrium and the origin of absolute uncertainty. **Journal of Statistical Physics**, v. 67, n. 5–6, p. 843–907, 1992.

KIJOWSKI, J. On the time operator in quantum mechanics and the heisenberg uncertainty relation for energy and time. **Reports on Mathematical Physics**, v. 6, n. 3, p. 361–386, 1974.