Detalhes que $I = dQ/dt$ esconde

BONIN, Carlos Alberto[1];

Pesquisador Independente[1]

carlosbonin@gmail.com[1]

Palavras-Chave: Corrente elétrica; Distribuições; Condutores;

Resumo

Este trabalho discute a corrente elétrica em um fio condutor a partir da teoria das distribuições. Microscopicamente, a passagem discreta de elétrons por uma seção transversal define uma distribuição no tempo. A corrente macroscópica surge como média temporal fraca dessa distribuição. Sem campo elétrico externo, os fluxos microscópicos em sentidos opostos se cancelam estatisticamente; com campo aplicado, uma pequena deriva quebra essa simetria e produz uma corrente média observável.

I. Introdução

A corrente elétrica através de uma seção transversal de um fio condutor é usualmente definida por $I = dQ/dt$, sendo $Q = Q(t)$ a carga líquida transportada através da seção em um tempo t (REITZ; MILFORD; CHRISTY, 1982). Essa definição é adequada em escala macroscópica, mas esconde uma sutileza: microscopicamente, a carga é transportada por elétrons individuais. Portanto, a função $Q(t)$ varia por saltos, não como uma função suave. De fato, se t_0 é o instante em que um elétron atravessa a seção, então $Q(t_0^+) - Q(t_0^-) = \pm q_e$, sendo $q_e > 0$ o valor absoluto da carga de um elétron. Pela definição ordinária de derivada,

$$Q'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{Q(t_0 + h) - Q(t_0)}{h}, \tag{1}$$

mas esse limite não existe como número real finito no ponto de salto, pois o numerador sofre uma variação finita enquanto $h \to 0$. Assim, a relação $I = dQ/dt$ precisa ser reinterpretada se quisermos descrevê-la em escala microscópica.

O objetivo deste trabalho é interpretar a relação $I = dQ/dt$ no sentido da teoria das distribuições (SCHWARTZ, 1966; LIGHTHILL, 1958). A corrente microscópica será tratada como uma distribuição temporal; a corrente macroscópica, por sua vez, será dada por um limite de uma média temporal dessa distribuição. A abordagem permite conectar a

natureza discreta da carga elétrica à descrição contínua usual da corrente em condutores.

II. Fundamentação Teórica/Materiais e Métodos

Seja S uma seção transversal fixa de um fio condutor, orientada por um vetor normal unitário $\mathbf{n}$. Denotemos por t_k os instantes em que elétrons cruzam S. Chamaremos de D_+ o conjunto dos índices k para os quais o cruzamento ocorre no sentido de $\mathbf{n}$ e de D_- o conjunto dos índices para os quais o cruzamento ocorre no sentido oposto.

Assumimos que os cruzamentos são localmente finitos, isto é, que há apenas um número finito de cruzamentos em cada intervalo temporal compacto. Para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, definimos as distribuições de contagem ν_+ e ν_- por

$$\langle \nu_+, \varphi \rangle = \sum_{k \in D_+} \varphi(t_k), \qquad \langle \nu_-, \varphi \rangle = \sum_{k \in D_-} \varphi(t_k), \tag{2}$$

id est, $\nu_\pm = \sum_{k \in D_\pm} \delta_{t_k}$, sendo δ_{t_k} a função delta de Dirac concentrada em t_k. Assim, ν_+ e ν_- registram, respectivamente, os cruzamentos dos elétrons nos dois sentidos. Como a carga do elétron é $-q_e$, a corrente convencional através de S é a distribuição

$$I_S = q_e(\nu_- - \nu_+) = q_e \sum_{k \in D_-} \delta_{t_k} - q_e \sum_{k \in D_+} \delta_{t_k} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{3}$$

id est, $\langle I_S, \varphi \rangle = q_e \langle \nu_-, \varphi \rangle - q_e \langle \nu_+, \varphi \rangle$.

A relação com $I = dQ/dt$ vem do seguinte. Se $C_\pm(t) = \#\{k \in D_\pm : t_k \leq t\}$, então a carga líquida convencional transportada até t é $Q_S(t) = q_e C_-(t) - q_e C_+(t)$. Equivalentemente,

$$Q_S(t) = q_e \sum_{k \in D_-} \Theta(t - t_k) - q_e \sum_{k \in D_+} \Theta(t - t_k), \tag{4}$$

sendo Θ a função degrau de Heaviside. Como derivada distribucional, $\langle dQ_S/dt, \varphi \rangle = -\langle Q_S, \varphi' \rangle$. Logo, usando $d\Theta(t - t_k)/dt = \delta_{t_k}$ em sentido distribucional, segue que

$$\frac{dQ_S}{dt} = q_e(\nu_- - \nu_+) = I_S. \tag{5}$$

Portanto, a definição usual de corrente permanece válida, mas deve ser interpretada em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Para descrever a passagem ao regime macroscópico, introduzimos a translação temporal de uma distribuição $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ por $\langle \theta_s U, \varphi \rangle = \langle \theta_s U, \varphi(\cdot) \rangle = \langle U, \varphi(\,\cdot - s\,) \rangle$.

Definimos a média temporal de Cesàro por

$$\mathcal{A}_T U = \frac{1}{T}\int_0^T \theta_s U \, ds, \qquad \langle \mathcal{A}_T U, \varphi \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \langle \theta_s U, \varphi \rangle \, ds. \tag{6}$$

A média temporal é, assim, tomada diretamente no espaço das distribuições.

III. Resultados

Aplicando (6) às distribuições de contagem e levando em conta que os cruzamentos são localmente finitos e as funções-teste têm suportes compactos, temos

$$\langle \mathcal{A}_T \nu_\pm, \varphi \rangle = \frac{1}{T}\sum_{k \in D_\pm} \int_0^T \varphi(t_k - s)\, ds. \tag{7}$$

Para interpretar essa expressão, fazemos, em cada termo da soma, a mudança de variável $u = t_k - s$. Então $du = -ds$; quando $s = 0$, temos $u = t_k$, e quando $s = T$, temos $u = t_k - T$. Portanto,

$$\int_0^T \varphi(t_k - s)\, ds = \int_{t_k - T}^{t_k} \varphi(u)\, du = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \mathbf{1}_{[t_k - T, t_k]}(u)\, du. \tag{8}$$

sendo $\mathbf{1}_A(x)$ a função indicadora do conjunto A. Substituindo em (7), obtemos

$$\langle \mathcal{A}_T \nu_\pm, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \left[\frac{1}{T} \sum_{k \in D_\pm} \mathbf{1}_{[t_k - T, t_k]}(u) \right] du, \tag{9}$$

Para u fixo, a condição $\mathbf{1}_{[t_k - T, t_k]}(u) = 1$ é equivalente a

$$u \in [t_k - T, t_k] \quad \Longleftrightarrow \quad t_k \in [u, u + T]. \tag{10}$$

Assim, a soma entre colchetes conta quantos cruzamentos, no sentido considerado, ocorrem no intervalo $[u, u + T]$. Definindo

$$N_\pm(u, T) \triangleq \#\{k \in D_\pm : \, t_k \in [u, u + T]\}, \qquad \Lambda_{\pm,T}(u) \triangleq \frac{N_\pm(u, T)}{T}, \tag{11}$$

segue que

$$\langle \mathcal{A}_T \nu_\pm, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \Lambda_{\pm,T}(u)\, du. \tag{12}$$

Portanto, a média temporal da distribuição microscópica $\nu_\pm$ é representada, para cada T, por uma distribuição regular cuja densidade é a taxa $\Lambda_{\pm,T}$. A distribuição $\nu_\pm$ registra todos os cruzamentos ao longo do tempo, enquanto $N_\pm(u, T)$ conta apenas os cruzamentos na janela temporal $[u, u + T]$.

Em regime estacionário, espera-se que, para T muito maior que a escala temporal

microscópica, a taxa empírica $\Lambda_{\pm,T}(u)$ dependa cada vez menos da origem temporal u. A hipótese de ergodicidade expressa que a média temporal longa de uma realização microscópica coincide com a média estatística do regime estacionário. Assim, escrevemos,

$$\Lambda_{\pm,T}(u) \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_\pm \qquad \text{para significar} \qquad \lim_{T\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(u)\Lambda_{\pm,T}(u)\,du = \lambda_\pm \int_{\mathbb{R}} \varphi(u)\,du. \quad (13)$$

Logo, $\mathcal{A}_T\nu_\pm \to \lambda_\pm$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, sendo que $\lambda_\pm$ denota a distribuição regular associada à função constante $\lambda_\pm$. Consequentemente,

$$\mathcal{A}_T I_S = q_e(\mathcal{A}_T\nu_- - \mathcal{A}_T\nu_+) \longrightarrow q_e(\lambda_- - \lambda_+) \qquad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (14)$$

As constantes $\lambda_\pm$ são taxas médias de cruzamento. Elas podem ser obtidas pelo seguinte argumento cinético. As partículas localizadas em torno de $\mathbf{x} \in S$, com velocidades entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, atravessam a seção no sentido de $\mathbf{n}$ apenas se $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} > 0$. A quantidade $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dS$ mede o volume varrido por unidade de tempo por essas partículas. Assim,

$$\lambda_+ = \int_S \int_{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}>0} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) f(\mathbf{x},\mathbf{v})\, d^3v\, dS, \quad (15)$$

$$\lambda_- = \int_S \int_{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}<0} [-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}] f(\mathbf{x},\mathbf{v})\, d^3v\, dS. \quad (16)$$

Na ausência de campo elétrico externo, não há direção privilegiada ao longo do fio. A distribuição de velocidades é aproximadamente par: $f_0(\mathbf{x},\mathbf{v}) = f_0(\mathbf{x},-\mathbf{v})$. A mudança de variável $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$ mostra que $\lambda_+ = \lambda_-$. Portanto,

$$\mathcal{A}_T I_S \longrightarrow 0 \qquad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (17)$$

Isso não significa ausência de cruzamentos microscópicos, mas sim cancelamento estatístico entre duas distribuições de contagem associadas a fluxos opostos.

Com campo elétrico externo, a distribuição de velocidades deixa de ser exatamente par. O movimento térmico permanece desordenado, mas surge uma pequena velocidade média de deriva $\mathbf{v}_d$. Para evidenciar a quebra de simetria, escrevemos, em primeira ordem,

$$f_E(\mathbf{x},\mathbf{v}) \simeq f_0(\mathbf{x},\mathbf{v}) - \mathbf{v}_d \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0(\mathbf{x},\mathbf{v}). \quad (18)$$

A diferença entre as taxas de cruzamento é o fluxo líquido de elétrons:

$$\lambda_+ - \lambda_- = \int_S \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) f_E(\mathbf{x},\mathbf{v})\, d^3v\, dS. \tag{19}$$

O termo com f_0 se anula pela simetria $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$. O termo linear em $\mathbf{v}_d$, por integração por partes no espaço das velocidades, fornece

$$\lambda_+ - \lambda_- \simeq \int_S n_e(\mathbf{x})\, \mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n}\, dS, \tag{20}$$

sendo $n_e(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f_0(\mathbf{x},\mathbf{v})\, d^3v$ a densidade volumétrica de elétrons no ponto $\mathbf{x}$.

Se a seção tem área A e o fio é aproximadamente homogêneo, $\lambda_+ - \lambda_- \simeq A n_e\, \mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n}$:

$$\mathcal{A}_T I_S \longrightarrow -q_e A n_e\, \mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n} \qquad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{21}$$

A corrente macroscópica surge, portanto, de uma assimetria estatística muito pequena entre fluxos microscópicos muito grandes em sentidos opostos.

IV. Conclusões

A corrente elétrica microscópica através de uma seção transversal de um fio não é naturalmente uma função suave do tempo, mas uma distribuição formada pelos instantes discretos de passagem dos elétrons. A igualdade $I = dQ/dt$ permanece válida quando interpretada em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

A corrente macroscópica é obtida por uma média temporal dessa distribuição. Sob certas hipóteses, as taxas de cruzamento convergem para constantes. Sem campo elétrico externo, a simetria da distribuição de velocidades iguala as taxas nos dois sentidos e a corrente média é nula. Com campo aplicado, uma pequena deriva rompe essa simetria e gera a corrente observável. A formulação distribucional, assim, torna explícita a passagem da granularidade microscópica da carga elétrica para a descrição contínua da corrente elétrica usada no Eletromagnetismo macroscópico.

Agradecimentos

Referências

LIGHTHILL, M. J. **Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions**. Cambridge: Cambridge University Press, 1958.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1982.

SCHWARTZ, L. **Théorie des distributions**. Paris: Hermann, 1966.