# Efeito Casimir Dinâmico em Circuitos Supercondutores

FERREIRA, Leandro Nazarko[1,2]; CASTRO, Antonio Sérgio Magalhães de[1,2,3];

Universidade Estadual de Ponta Grossa - QPQI Group[1]
Universidade Estadual de Ponta Grossa - Programa de Pós-Graduação em Ciências/Física[2]
Universidade Estadual de Ponta Grossa - Departamento de Física[3]

leandronazarko233@gmail.com[1]

**Palavras-Chave**: Emaranhamento; Sincronização Quântica; Qubit Transmon;

**Resumo**

Este trabalho investiga a geração de emaranhamento e a sincronização quântica em um circuito supercondutor baseado no Efeito Casimir Dinâmico (DCE). O modelo consiste em uma cavidade de guia de onda coplanar terminada por dois SQUIDs e acoplada a dois qubits transmons. Verificamos que a excitação paramétrica gera um alto grau de emaranhamento a partir do vácuo e induz a sincronização máxima entre os qubits. Ambos os fenômenos persistem após o desligamento do bombeamento, o que confirma o sistema como uma plataforma promissora para tecnologias quânticas.

## I. Introdução

Casimir e Polder (1948) previram que dois espelhos paralelos no vácuo se atraem devido à redução da densidade de modos eletromagnéticos imposta pelas condições de contorno, fenômeno denominado Efeito Casimir Estático. Quando essas barreiras se movem, ocorre um descompasso temporal entre os modos do vácuo, o que dá origem ao Efeito Casimir Dinâmico (DCE), proposto inicialmente por Moore (1970).

Contudo, o espelho deve atingir velocidades próximas à da luz ($v \approx c$), garantindo uma evolução não adiabática do campo (Felicetti et al. (2014)), para que ocorra a conversão de fótons virtuais em reais. Devido à limitação mecânica de acelerar espelhos massivos, surgiram propostas para modular efetivamente as condições de contorno. Essa abordagem, conhecida como "DCE análogo", contorna o problema do movimento mecânico e tem se mostrado promissora. Diversos trabalhos destacaram a relevância do DCE na geração de correlações quânticas (Dodonov, Dodonov e Mizrahi (2004)), emaranhamento (Felicetti et al. (2014)) e na amostragem de bósons gaussianos (Peropadre, Huh e Sabín (2018)), consolidando o efeito como um recurso valioso para redes e simulações na área de tecnologias quânticas.

## II. Fundamentação Teórica

Com base nesses estudos, exploramos um circuito supercondutor inspirado nos trabalhos de Felicetti et al. (2014) e Mitarai e Hasegawa (2024). O modelo consiste em uma cavidade supercondutora, formada por um guia de onda coplanar (CPW) e terminada por dois dispositivos de interferência quântica supercondutores (SQUID), responsáveis pela variação das condições de contorno da cavidade. Além disso, acoplamos dois dispositivos transmons (Koch et al. (2007)), que são sistemas de dois níveis e atuam como qubits capacitivamente acoplados à cavidade supercondutora.

O operador hamiltoniano quantizado que descreve esse sistema é dado por

$$\hat{\mathrm{H}}(t) = \hbar\omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a} + \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\hbar\omega_{q,i}}{2}\sigma_z^{(i)} + \hbar g_i(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\sigma_x^{(i)}\right] + \hbar\alpha_1(t)(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2 + \hbar\alpha_2(t)(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2, \quad (1)$$

onde $\omega_r$ é a frequência natural da cavidade, $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação bosônicos, $g_i$ é o acoplamento entre a cavidade e cada qubit com frequência natural $\omega_{q,i}$. Os fatores $\alpha_i(t) = \alpha_0 \cos(\omega_d t + \phi_i)\Theta(\tau - t)$ são as formas da excitação externa, nas quais $\omega_d$ é a frequência de excitação paramétrica e $\phi_i$ as fases associadas a cada um dos SQUIDs. Podemos avaliar a evolução temporal do sistema pela equação de Schrödinger no referencial em rotação com $\omega_d/2$, considerando a aproximação de onda girante (RWA) para negligenciar os termos que oscilam rapidamente. Disto resulta o seguinte operador hamiltoniano

$$\begin{aligned}\hat{H}_I(t) =& \hbar\hat{a}^\dagger\hat{a}\left(\omega_r - \frac{\omega_d}{2}\right) + \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\hbar}{2}\left(\omega_{q,i} - \frac{\omega_d}{2}\right)\sigma_z^{(i)} + \hbar g_i(\hat{a}\sigma_+^{(i)} + \hat{a}^\dagger\sigma_-^{(i)})\right] \\ &+ \hbar\alpha_0\Theta(\tau - t)\cos(\Delta\phi)\left[e^{i\phi_+}\hat{a}^2 + e^{-i\phi_+}(\hat{a}^\dagger)^2\right], \end{aligned} \quad (2)$$

no qual $\phi_+ = \frac{\phi_1+\phi_2}{2}$ e $\Delta\phi = \frac{\phi_1-\phi_2}{2}$ são as fases relativas entre as excitações externas aplicadas aos dois SQUIDs. Aqui analisamos o emaranhamento e a sincronização entre os dois qubits, recursos importantes para as áreas de computação e de informação quânticas.

Para quantificar o emaranhamento entre os dois qubits, utilizamos a concorrência $\mathcal{C}$, definida para qualquer estado arbitrário (puro ou misto) (Wootters (1998)). Dada a matriz de densidade reduzida dos qubits, $\rho_{q1,q2} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{cav}}(\rho)$, define-se a matriz operadora de rotação de spin como $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*_{q1,q2}(\sigma_y \otimes \sigma_y)$. A concorrência é então obtida a partir dos autovalores da matriz produto não-hermitiana $\rho_{q1,q2}\tilde{\rho}$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e $\lambda_4$ as raízes quadradas desses autovalores, ordenadas de ordem decrescente. A função concorrência é

calculada por

$$\mathcal{C}(\rho_{q1,q2}) = \max\left(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\right), \tag{3}$$

com $\mathcal{C}(\rho)$ variando no intervalo $[0, 1]$. Para $\mathcal{C} = 0$, os estados dos qubits são completamente separáveis, enquanto $\mathcal{C} = 1$ descreve um estado maximamente emaranhado.

A sincronização entre os dois qubits consiste no ajuste temporal das oscilações de observáveis (como $\langle\hat{\sigma}_z\rangle$) de dois sistemas (Galve, Giorgi e Zambrini (2017)). Para quantificar o grau de sincronização entre os respectivos valores esperados, é utilizado o coeficiente de correlação de Pearson, que é uma medida estatística clássica quantificando o grau de relação linear entre duas variáveis e definido por

$$C_{\Delta t}(t) \equiv \frac{\int_t^{t+\Delta t}(\langle\hat{\sigma}_z^1(t')\rangle - \bar{\sigma}_z^1)(\langle\hat{\sigma}_z^2(t')\rangle - \bar{\sigma}_z^2)dt'}{\sqrt{\Pi_{i=1}^2 \int_t^{t+\Delta t}(\langle\hat{\sigma}_z^i(t')\rangle - \bar{\sigma}_z^i)^2 dt'}}, \tag{4}$$

com

$$\bar{\sigma}_z^i \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\langle\hat{\sigma}_z^i(t')\rangle dt', \tag{5}$$

e $\Delta t$ sendo a janela de tempo de quantificação.

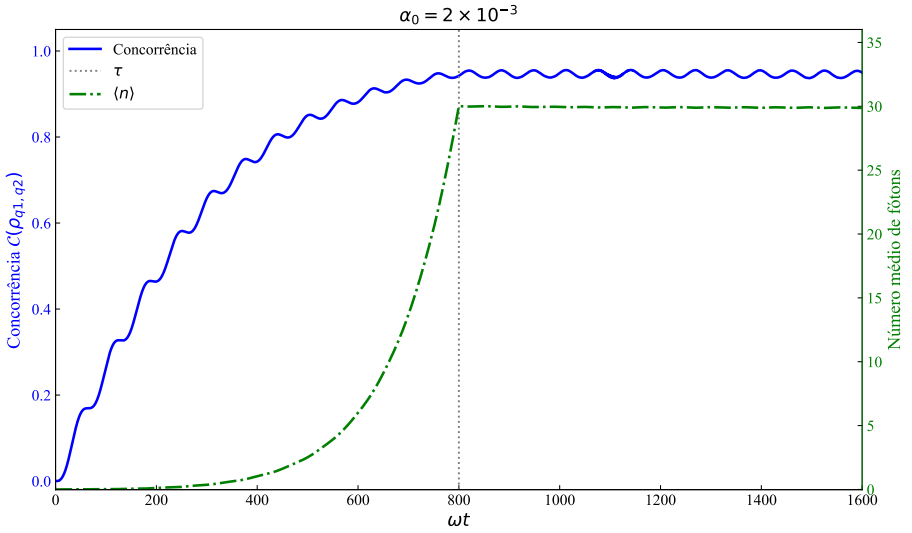
## III. Resultados

Nossos resultados foram obtidos a partir de simulações numéricas utilizando a biblioteca QuTip do Python. Normalizamos os parâmetros de acoplamento $g_i$, amplitude de excitação $\alpha_0$ e o tempo $t$ a partir da frequência natural da cavidade $\omega_r = \omega = 1$. Em ambos os casos analisados, a simulação consiste em evoluir o sistema temporalmente por um intervalo de tempo $t$, onde durante um intervalo $\tau$ mantemos a excitação paramétrica externa aplicada à frequência ressonante $\omega_d = 2\omega_r$. Escolhemos o caso mais simples em que as excitações externas aplicadas aos dois SQUIDs estão em fase, ou seja, $\phi_1 = \phi_2 = \pi/4$.

Para determinar a concorrência, partimos do estado inicial $|\psi\rangle \equiv |g, 0\rangle \otimes |g, 0\rangle$, no qual ambos os qubits estão no estado fundamental e o modo da cavidade no estado de vácuo. Evoluímos nosso sistema, escolhendo $\tau = 800$. Após esse tempo, atinge-se um máximo de emaranhamento entre os dois qubits quando desligamos o bombeamento paramétrico, interrompendo a emissão de fótons na cavidade. A partir da Fig. 1, verificamos que, mesmo após desligarmos o bombeamento paramétrico externo, ainda há um alto grau de emaranhamento, o que demonstra que o DCE é um ótimo recurso para a geração de emaranhamento.

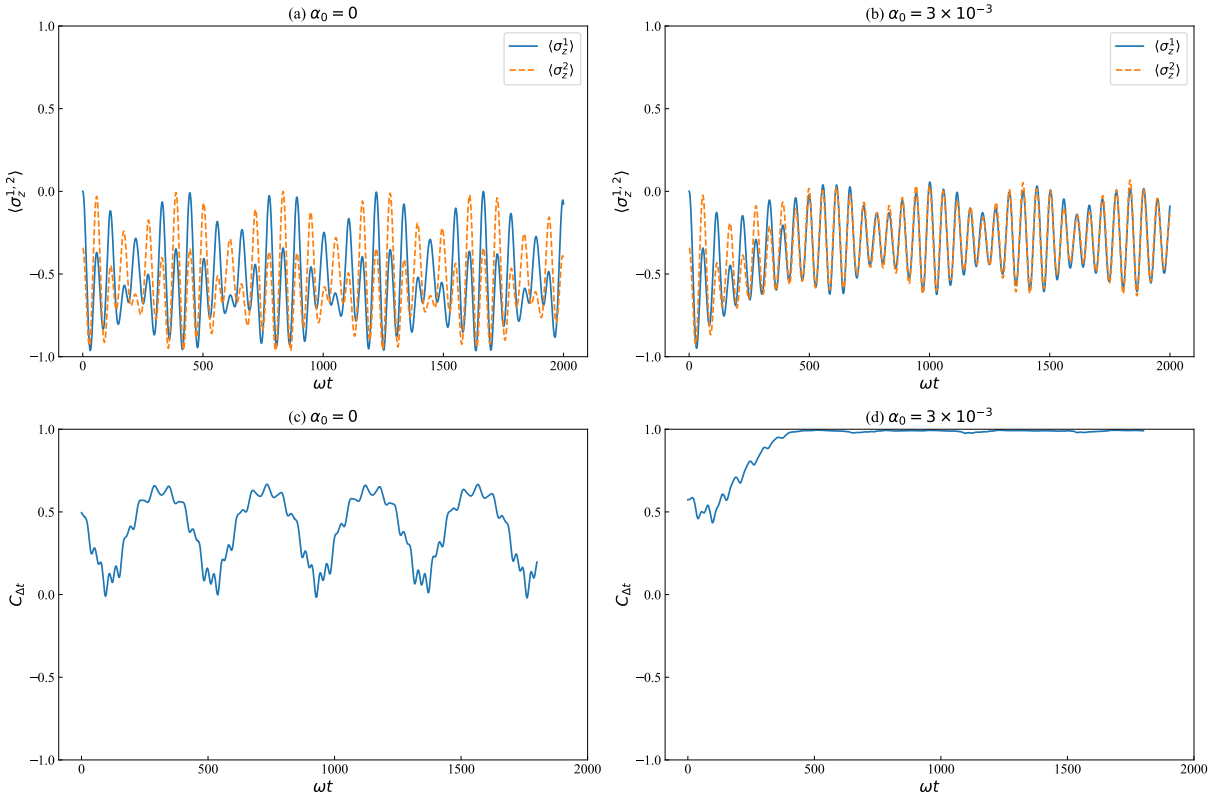
Para simular a sincronização entre os dois qubits, vamos assumir que o estado

**Fig. 1.** Concorrência e número médio de fótons variando no tempo com os seguintes parâmetros: $\omega_{q,1} = \omega_{q,2} = 1$, $\omega_r = \omega = 1$ e $g_1 = g_2 = g_0 = 0,04\,\omega$.




Fonte: O autor.

**Fig. 2.** Evolução temporal do valor esperado de $\sigma_z^{1,2}$ e do coeficiente de correlação de Pearson $C_{\Delta t}$ para (a-c) $\alpha_0 = 0$ e (b-d) para $\alpha_0 = 3 \times 10^{-3}$, com os seguintes parâmetros, $\omega_r = \omega = 1$, $g_1 = g_2 = g_0 = 0.04\omega$, $\omega_{q,1} = \omega_{q,2} = 1$ e $\Delta t = 200$.




Fonte: O autor.

inicial do sistema é dado por

$$|\psi(0)\rangle = (\cos\theta_1|g\rangle_1 + \sin\theta_1|e\rangle_1) \otimes (\cos\theta_2|g\rangle_2 + \sin\theta_2|e\rangle_2) \otimes |0\rangle, \tag{6}$$

onde $|g\rangle_\mu(|e\rangle_\mu)$ indica o estado fundamental (excitado) do $\mu$-ésimo qubit. A diferença entre

os estados iniciais dos qubits é determinada pela escolha de valores de $\theta$. Aqui utilizamos $\theta_1 = \pi/4$ e $\theta_2 = 11\pi/36$, de modo que iniciamos nosso sistema dessincronizado. Na Fig. 2, observamos que o sistema já entra em sincronização máxima após o tempo $\tau = 500$, com o coeficiente de correlação de Pearson mantendo-se muito próximo de seu valor máximo e permanecendo nesta condição após o desligamento do bombeamento.

## IV. Conclusões

Neste trabalho, investigamos um circuito supercondutor baseado no análogo dinâmico do ECD. Os resultados revelaram que o bombeamento do vácuo na cavidade induz com sucesso um alto grau de emaranhamento entre os qubits a partir do estado fundamental. Também verificamos que o sistema é capaz de promover a sincronização temporal máxima de observáveis entre os qubits, mesmo quando iniciados em estados dessincronizados. É importante ressaltar que ambos os fenômenos persistem após o desligamento da excitação externa ($\tau$). Esses resultados consolidam o modelo proposto como uma plataforma robusta e promissora para aplicações em processamento de informação, simulações quânticas e desenvolvimento de tecnologias quânticas baseadas em circuitos supercondutores.

## Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES, Finance Code 001) e pela Fundação Araucária, projeto nº 305.

## Referências

CASIMIR, H. B. G.; POLDER, D. The influence of retardation on the london-van der waals forces. **Physical Review**, v. 73, p. 360–372, 2 1948. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.73.360>.

DODONOV, A. V.; DODONOV, V. V.; MIZRAHI, S. S. Separability dynamics of two-mode gaussian states in parametric conversion and amplification. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 38, n. 3, p. 683, dec 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/38/3/008>.

FELICETTI, S. et al. Dynamical casimir effect entangles artificial atoms. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 113, 8 2014. ISSN 10797114.

GALVE, F.; GIORGI, G. L.; ZAMBRINI, R. Quantum correlations and synchronization measures. In: _____. **Lectures on General Quantum Correlations and their Applications**. Cham: Springer International Publishing, 2017. p. 393–420. ISBN 978-3-319-53412-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-53412-1_18>.

KOCH, J. et al. Charge-insensitive qubit design derived from the cooper pair box. **Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics**, v. 76, 10 2007. ISSN 10502947.

MITARAI, H.; HASEGAWA, Y. Quantum synchronization of qubits via the dynamical casimir effect. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 110, 10 2024. ISSN 24699934.

MOORE, G. T. Quantum theory of the electromagnetic field in a variable-length one-dimensional cavity. **Journal of Mathematical Physics**, v. 11, p. 2679–2691, 1970. ISSN 00222488.

PEROPADRE, B.; HUH, J.; SABíN, C. Dynamical casimir effect for gaussian boson sampling. **Scientific Reports**, Nature Publishing Group, v. 8, 12 2018. ISSN 20452322.

WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. **Physical Review Letters**, APS, v. 80, n. 10, p. 2245, 1998.