O estudo do cálculo com expoentes não inteiros e algumas aplicações

BUHRER, Rian[1]; TROBIA, José[2]

Universidade Estadual de Ponta Grossa – Departamento de Física[1]
Universidade Estadual de Ponta Grossa – Departamento de Matemática e Estatística[2]

25003505@uepg.br[1]

Palavras-Chave: cálculo fracionário; função de Mittag-Leffler; equações diferenciais fracionárias.

Resumo

O cálculo fracionário generaliza os operadores clássicos de derivação e integração para ordens não inteiras, permitindo modelar sistemas com efeitos de memória. Neste trabalho utilizamos a derivada fracionária de Caputo para analisar três modelos: o decaimento radioativo, o oscilador harmônico e o sistema presa-predador de Lotka-Volterra. As soluções são obtidas por meio da transformada de Laplace e expressas em termos da função de Mittag-Leffler. Os resultados mostram que a introdução da memória altera significativamente a dinâmica dos sistemas: o decaimento torna-se mais lento, o oscilador apresenta amortecimento intrínseco mesmo sem dissipação explícita, e o modelo presa-predador passa a exibir convergência ao equilíbrio.

I. Introdução

O cálculo fracionário estende o cálculo diferencial e integral clássico para ordens não inteiras de derivação e integração (PODLUBNY, 1999). Seu interesse em aplicações cresceu nas últimas décadas devido à capacidade de descrever sistemas com memória, nos quais o estado presente depende de toda a evolução passada. Entre os diversos operadores fracionários, a derivada de Caputo destaca-se por admitir condições iniciais com interpretação física clássica, e as soluções das equações resultantes envolvem a função de Mittag-Leffler, generalização natural da exponencial. Neste trabalho investigamos três aplicações: o decaimento radioativo, o oscilador harmônico e o modelo presa-predador de Lotka-Volterra, analisando em cada caso como a memória modifica a dinâmica clássica. Antes da análise desses modelos, apresentamos os principais conceitos matemáticos utilizados ao longo do trabalho, em especial a derivada de Caputo e a função de Mittag-Leffler.

II. Fundamentação Teórica

Derivada fracionária de Caputo

Para $n-1 < \alpha \leq n$, a derivada fracionária de Caputo é definida por

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\, dt, \tag{1}$$

onde Γ denota a função Gama. Essa definição recupera a derivada ordinária quando $\alpha = n$. A derivada de Caputo é amplamente utilizada em aplicações por permitir a formulação de condições iniciais em termos de grandezas físicas usuais (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006).

Função de Mittag-Leffler e sua transformada de Laplace

A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \tag{2}$$

generaliza a exponencial (caso $\alpha = \beta = 1$). A ferramenta central para resolução das equações fracionárias é sua transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\right\}(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\lambda}. \tag{3}$$

Nos casos de um parâmetro usa-se a notação $E_{\alpha}(z) \equiv E_{\alpha,1}(z)$. Essas ferramentas permitem obter soluções analíticas para diversas equações diferenciais fracionárias. A seguir, ilustramos sua aplicação em três modelos clássicos de diferentes áreas da ciência.

III. Resultados

Decaimento radioativo fracionário

Como primeira aplicação, consideramos o problema do decaimento radioativo. Sua generalização fracionária é dada por

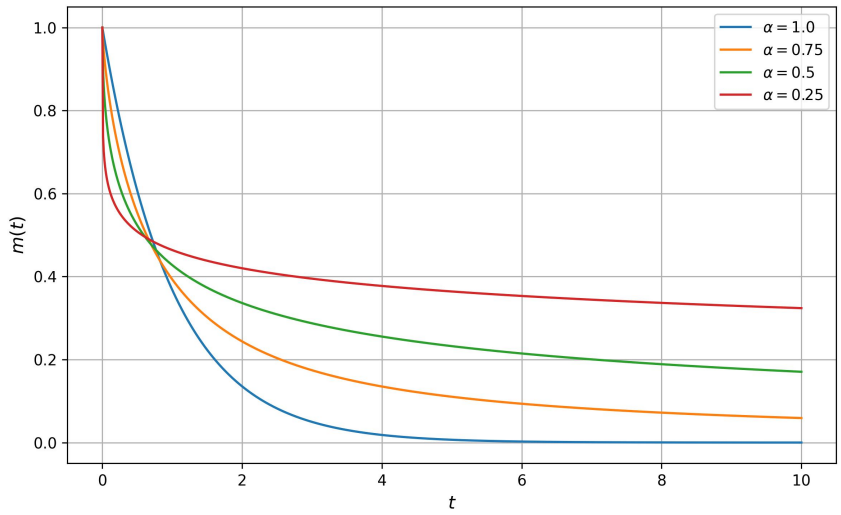
$${}^{C}D^{\alpha}_{0+}m(t) = -k\, m(t), \qquad 0 < \alpha \leq 1, \tag{4}$$

com condição inicial $m(0) = m_0$. Aplicando a transformada de Laplace e utilizando (3), obtém-se

$$m(t) = m_0\, E_{\alpha}(-kt^{\alpha}). \tag{5}$$

Para $\alpha = 1$ recupera-se o decaimento exponencial clássico. Como mostra a Figura 1, a redução de α torna o decaimento progressivamente mais lento, evidenciando os efeitos de memória.

Fig. 1. Solução $m(t) = m_0 E_\alpha(-kt^\alpha)$ para diferentes α.



Fonte: elaborado pelo autor (2026).

O exemplo anterior mostra como a memória altera a taxa de decaimento de um sistema simples. Em seguida, analisamos um modelo oscilatório, no qual os efeitos fracionários produzem consequências qualitativamente distintas.

Oscilador harmônico fracionário

No caso do oscilador harmônico, a introdução de derivadas fracionárias conduz ao modelo

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0+}x(t) + \omega^2 x(t) = 0, \qquad 1 < \alpha \leq 2, \tag{6} $$

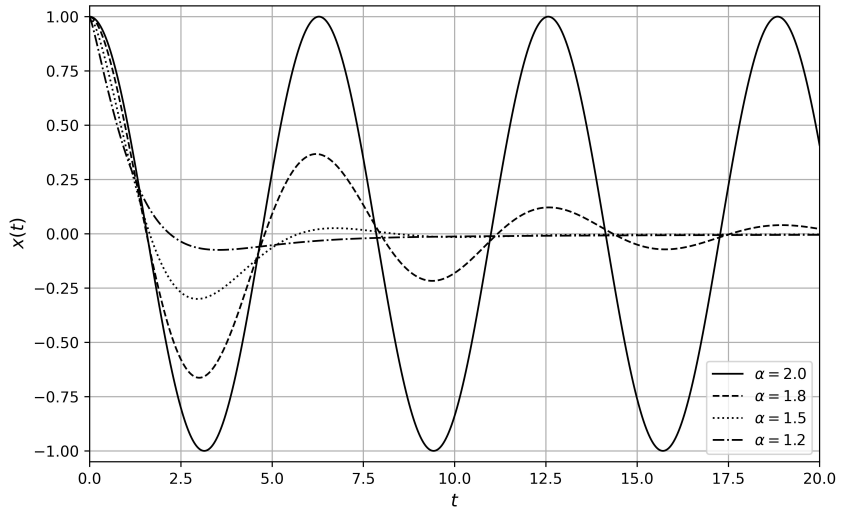
com condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$. A solução é

$$ x(t) = x_0\, E_\alpha(-\omega^2 t^\alpha). \tag{7} $$

Para $\alpha = 2$ reproduzem-se as oscilações periódicas clássicas sem dissipação. Para $1 < \alpha < 2$ surgem oscilações amortecidas mesmo na ausência de termos dissipativos explícitos (Figura 2), o que indica que a memória atua como mecanismo efetivo de amortecimento.

Enquanto os exemplos anteriores envolvem sistemas físicos descritos por uma única variável dinâmica, muitos fenômenos naturais dependem da interação entre múltiplas

Fig. 2. Solução $x(t) = x_0 E_\alpha(-\omega^2 t^\alpha)$ para $\alpha \in (1, 2]$. O amortecimento intrínseco intensifica-se conforme α se afasta de 2.



Fonte: elaborado pelo autor (2026).

populações. Um exemplo clássico é o modelo presa-predador de Lotka-Volterra.

Modelo presa-predador de Lotka-Volterra fracionário

Para investigar os efeitos de memória em sistemas biológicos, substituímos as derivadas ordinárias do modelo clássico de Lotka-Volterra por derivadas fracionárias de Caputo, obtendo

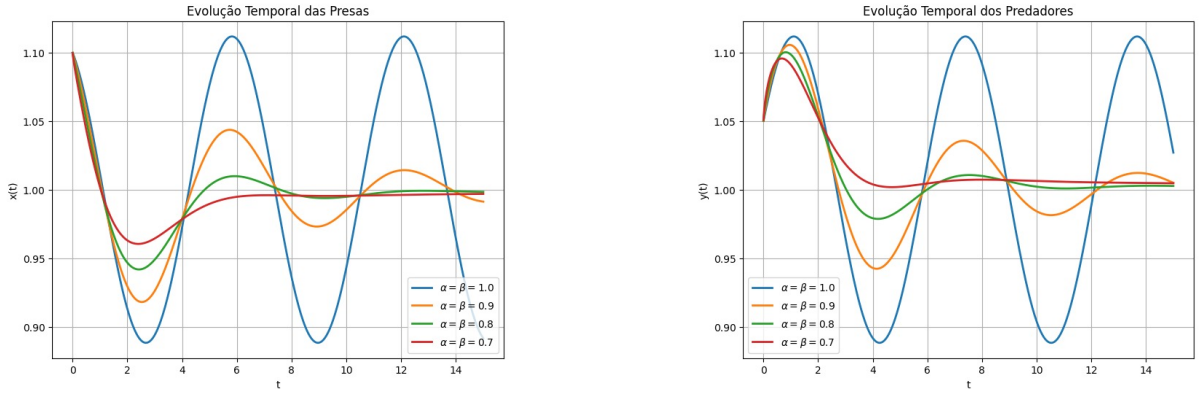
$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{0+}x(t) = ax - bxy, \\ {}^{C}D^{\beta}_{0+}y(t) = -cy + dxy, \end{cases} \qquad 0 < \alpha, \beta \leq 1, \tag{8}$$

cujo ponto de equilíbrio não trivial permanece em $E^* = (c/d,\, a/b)$. Aplicando a transformada de Laplace ao sistema linearizado em torno de E^* e utilizando (3), obtêm-se soluções analíticas que revelam três comportamentos: para $\alpha = \beta$ as oscilações são simétricas e amortecidas; para $\alpha > \beta$ ($\alpha < \beta$) a memória influencia predominantemente a dinâmica das presas (predadores). Em todos os casos fracionários as órbitas convergem para o equilíbrio, em contraste com as oscilações periódicas do modelo clássico. A Figura 3 ilustra a evolução temporal para $\alpha = \beta$ e parâmetros $a = b = c = d = 1$. Observa-se que a presença de memória reduz gradualmente a amplitude das oscilações, conduzindo o sistema ao equilíbrio de forma distinta daquela prevista pelo modelo clássico.

IV. Conclusões

O cálculo fracionário permite incorporar efeitos de memória em modelos físicos e biológicos de forma sistemática. Nos três sistemas analisados, a substituição da derivada ordinária pela derivada de Caputo produziu modificações qualitativas importantes: decai-

Fig. 3. Evolução temporal das populações para $\alpha = \beta$: amortecimento simétrico em ambas as populações.



(a) Presas $x(t)$. (b) Predadores $y(t)$.

Fonte: elaborado pelo autor (2026).

mento mais lento, amortecimento intrínseco no oscilador e convergência ao equilíbrio no modelo presa-predador. Em todos os casos a função de Mittag-Leffler desempenhou papel central na obtenção das soluções, generalizando a exponencial clássica e confirmando o potencial do cálculo fracionário na modelagem de fenômenos complexos.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio das agências da CAPES e CNPq e ao apoio financeiro da Fundação Araucária (FA) por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade Estadual de Ponta Grossa. Agradecemos também ao grupo de pesquisa 105 pelas valiosas contribuições e discussões.

Referências

KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. **Theory and Applications of Fractional Differential Equations**. Amsterdam: Elsevier, 2006.

PODLUBNY, I. **Fractional Differential Equations**. San Diego: Academic Press, 1999.