Uma Proposta de Densidade de Informação Espacial na Mecânica Quântica

BORECKI, Gabriel[1]; ANGELO, Renato[2];

Universidade Federal do Paraná - Programa de Pós-Graduação em Física[1,2]

gabrielgborecki@gmail.com[1]

Palavras-Chave: Paradoxo do Amigo de Wigner; Densidade de Informação Espacial; Equação de Continuidade Para Densidade de Informação Espacial

Resumo

Inspirado nos paradoxos do demônio de Maxwell e do amigo de Wigner, que revelam o caráter físico e relacional da informação na mecânica quântica, este trabalho introduz os conceitos de informação espacial e sua respectiva densidade. O resultado central é a derivação de uma equação de continuidade para essa grandeza, revelando a existência de "sorvedouros"informacionais. Esse novo formalismo descreve matematicamente como a informação depende do observador e foi testado em sistemas unipartidos simples, oferecendo uma estrutura teórica inédita para analisar a dinâmica da informação espacial.

I. Introdução

Nas últimas décadas, a compreensão do papel da informação na física tomou contornos fundamentais. Resoluções para o paradoxo do demônio de Maxwell, como o princípio de Landauer, demonstraram que a informação possui natureza física e que o seu apagamento exige um custo energético (Landauer (1961)). Isso levanta a hipótese de que as próprias leis físicas são limitadas pelo processamento de informação disponível (Landauer (1991)).

Complementarmente, a mecânica quântica lida com medições relativas aos observadores. O paradoxo do amigo de Wigner ilustra isso de forma aguda: enquanto o observador externo (Wigner) descreve a dinâmica do laboratório com emaranhamento e informação mútua, o observador interno (o amigo) possui uma perspectiva reduzida (Wigner (1995)). Para adequar a sua descrição à aquisição de informação, o amigo precisaria lidar com alguma forma de “sorvedouro” informacional.

Motivado por essa questão, este trabalho dá o primeiro passo para descrever esse tipo de dinâmica introduzindo a noção de **informação espacial** e de **densidade**

de informação espacial. Utilizando um estado de máxima ignorância como *prior*, o formalismo proposto visa capturar o caráter relacional da informação associada a um aparato de medida no espaço contínuo.

Outro resultado original é a dedução de uma **equação de continuidade** para a densidade de informação espacial. Diferente de outras abordagens na literatura, essa formulação permite separar os termos dinâmicos e explicitar a presença dos ralos informacionais previstos pela nossa discussão acerca do amigo de Wigner.

II. A Informação Espacial e Sua Densidade

Desenvolvemos o limite contínuo do formalismo da informação espacial total, partindo da estrutura discreta com blocos I_n^ε de resolução ε. O *prior* uniforme é o operador densidade

$$\sigma_d = \frac{1}{d}\sum_{n=0}^{d-1} |\phi_n^\varepsilon\rangle\langle\phi_n^\varepsilon|, \tag{1}$$

onde $|\phi_n^\varepsilon\rangle = \varepsilon^{-1/2}\int_{I_n^\varepsilon} dx\,|x\rangle$ são os estados de bloco normalizados. Por ser diagonal na base dos projetores $P_n^\varepsilon = \int_{I_n^\varepsilon} dx|x\rangle\langle x|$, ele satisfaz $\Phi_X^\varepsilon(\sigma_d) = \sigma_d$, e a probabilidade que lhe é associada em cada bloco resulta em

$$q_n^\varepsilon = \mathrm{Tr}(P_n^\varepsilon \sigma_d) = \frac{\varepsilon}{L}, \tag{2}$$

de onde se conclui que $q(x) = 1/L$ uniformemente em Ω. Sob a hipótese de regularidade de $\rho(x,x)$ em cada bloco, os demais termos assumem, no limite $\varepsilon \to 0$, as formas

$$p_n^\varepsilon = p(x_n)\varepsilon + o(\varepsilon), \qquad \rho_n^\varepsilon = \sigma_n^\varepsilon = |\phi_n^\varepsilon\rangle\langle\phi_n^\varepsilon|. \tag{3}$$

A coincidência entre os estados pós-medição anula a divergência quântica por bloco, e a soma de Riemann converge à integral clássica:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} D(\Phi_X^\varepsilon(\rho)\,\|\,\Phi_X^\varepsilon(\sigma_d)) = \int_\Omega dx\; p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}. \tag{4}$$

Usando $\Phi_X^\varepsilon(\sigma_d) = \sigma_d$ e $q(x) = 1/L$, define-se a **informação total espacial** no contínuo como

$$\mathcal{I}_X(\rho) = \lim_{\varepsilon\to 0}\, D(\Phi_X^\varepsilon(\rho)\,\|\,\sigma_d) = \int_\Omega dx\; p(x)\log(L\,p(x))\,, \tag{5}$$

e a **densidade de informação espacial** como $i(x) = p(x)\log(Lp(x))$, de modo que $\mathcal{I}_X(\rho) = \int_\Omega dx\, i(x)$.

III. A Equação Da continuidade Para Densidade de Informação Espacial

Derivamos a equação de continuidade para a densidade de informação espacial $i(\mathbf{r},t) = p(\mathbf{r},t)\log(Vp(\mathbf{r},t))$. Calculando sua derivada temporal e substituindo a equação da continuidade para a probabilidade, $\partial p/\partial t = -\nabla\cdot\mathbf{J}$, obtém-se

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}\log(eVp) = -(\nabla\cdot\mathbf{J})\log(eVp). \tag{6}$$

Pela identidade vetorial $(\nabla\cdot\mathbf{J})\log(eVp) = \nabla\cdot[\mathbf{J}\log(eVp)] - \mathbf{J}\cdot\nabla\log(eVp)$ e usando $\nabla\log(eVp) = \nabla p/p$, define-se a **corrente de informação espacial**

$$\mathbf{J}_i \coloneqq \mathbf{J}\log(eVp), \tag{7}$$

e a equação de continuidade resultante é

$$\frac{\partial i}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J}_i = \mathbf{J}\cdot\frac{\nabla p}{p}. \tag{8}$$

O lado direito, denominado **Termo de Fluxo Dispersivo** (TFD), atua como fonte ou sorvedouro local de informação e mede o quanto a corrente de probabilidade está alinhada com a direção de maior variação da surpresa relativa $\nabla\log(Vp)$. Diferentemente da densidade de probabilidade, $i(\mathbf{r},t)$ não é conservada, e o TFD é o responsável por sua produção ou dissipação locais.

Integrando sobre Ω e aplicando o teorema da divergência, obtém-se

$$\frac{d\mathcal{I}_{\mathbf{R}}(\rho)}{dt} + \oint_{\partial\Omega}\mathbf{J}_i\cdot d\mathbf{n} = \int_\Omega \mathbf{J}\cdot\frac{\nabla p}{p}\,dV. \tag{9}$$

Na ausência de fluxo informacional pelas fronteiras, isto é, $\mathbf{J}_i\cdot\mathbf{n} = 0$, a variação da informação total é governada exclusivamente pelo TFD integrado:

$$\frac{d\mathcal{I}_{\mathbf{R}}(\rho)}{dt} = \int_\Omega \mathbf{J}\cdot\frac{\nabla p}{p}\,dV. \tag{10}$$

No caso difusivo da equação de Fokker-Planck, $\mathbf{J} = -C\nabla p$ implica $\mathbf{J}\cdot\nabla p/p = -C|\nabla p|^2/p \le 0$, de modo que a informação decresce monotonicamente. No caso quântico, porém, $\mathbf{J}$ não possui sinal definido, e o TFD pode ser positivo ou negativo ponto a ponto: a informação espacial total pode crescer, decrescer ou oscilar, em consonância com a reversibilidade da dinâmica unitária. Por fim, distinguem-se os papéis de $\mathbf{J}$ e $\mathbf{J}_i$: a corrente de probabilidade $\mathbf{J}$ é uma quantidade dinâmica determinada pela teoria subjacente, enquanto $\mathbf{J}_i$ é uma construção informacional independente de teoria, induzida por $\mathbf{J}$ e $i(\mathbf{r},t)$.

IV. A partícula Livre

O pacote gaussiano livre possui hamiltoniano $H = P^2/2m$ e densidade de probabilidade gaussiana centrada em $x = vt$, com largura temporal

$$\sigma_t = a\sqrt{1 + \left(\frac{t}{\tau_E}\right)^2}, \tag{11}$$

onde $\tau_E = 2ma^2/\hbar$ é o tempo de Ehrenfest, escala natural que demarca a transição entre o regime localizado e o regime de espalhamento livre. A densidade de corrente de probabilidade e a distribuição de probabilidades, obtidas da equação de Schrödinger, são

$$p(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\hbar^2t^2}{m^2a^4}}}\exp\left\{-\frac{2a^2\left(x-\frac{\hbar k}{m}t\right)^2}{a^4+\frac{4\hbar^2t^2}{m^2}}\right\}, \qquad J = p(x,t)\left[v + \frac{a^2(t/\tau_E)}{\tau_E\,\sigma_t^2}\,(x-vt)\right], \tag{12}$$

e com ela constroem-se analiticamente todos os termos da equação de continuidade para $i(x,t)$: a corrente de informação $J_i = J\log(eVp)$, seu divergente $\partial_x J_i$ e o TFD $J\,\partial_x p/p$.

A Figura 1 mostra os mapas de calor de p, i, $\partial_t i$, $\partial_x J_i$ e do TFD em função de x e t/τ_E.

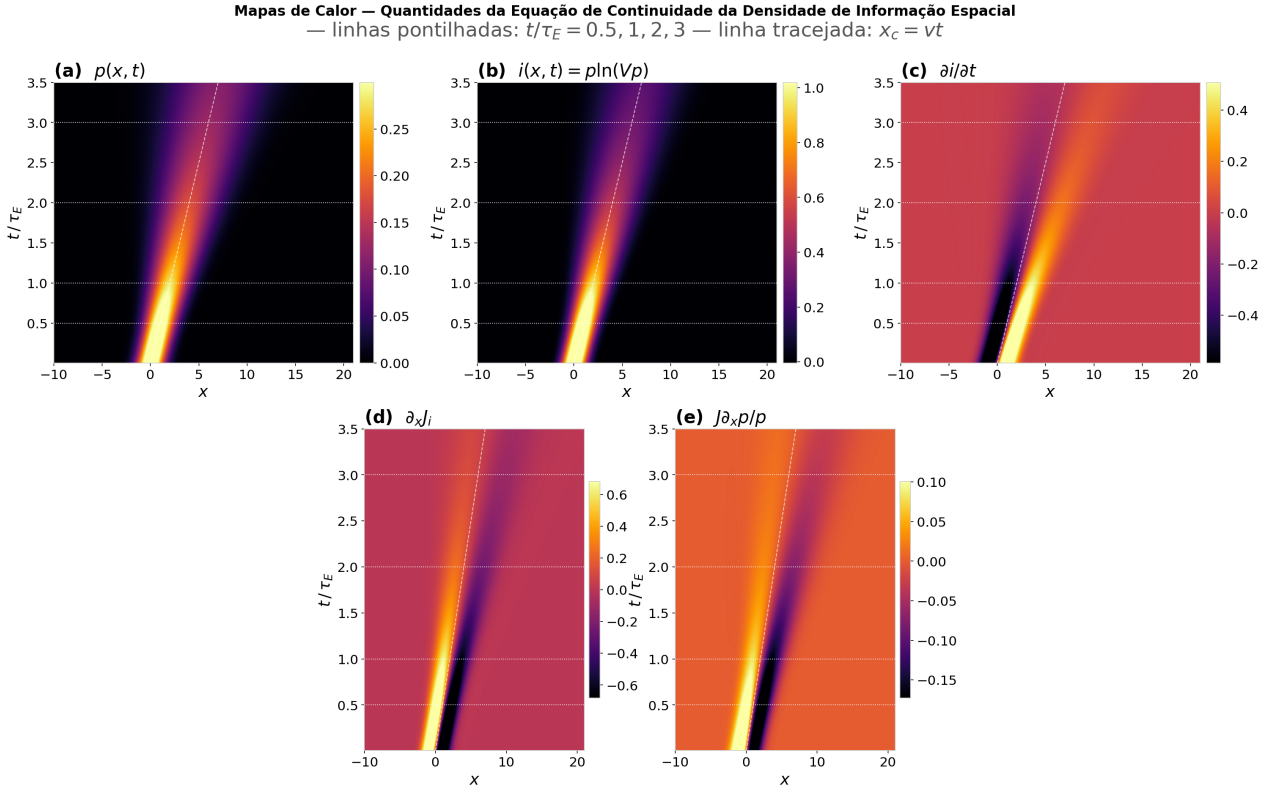
Verifica-se que $\mathcal{I}_X(\rho)$ decresce monotonicamente à medida que o pacote se evolui, a distribuição $p(x,t)$ aproxima-se do *prior* uniforme e a informação espacial total diminui. A integração sobre o espaço confirma que toda essa variação é atribuída exclusivamente ao TFD, enquanto o termo de superfície de $\partial_x J_i$ permanece nulo enquanto a normalização não é violada. O tempo de Ehrenfest emerge como escala determinante: é no intervalo $t \in [0, \tau_E]$ que a perda de informação é mais intensa, e, após isso, a taxa de variação decresce assintoticamente. A velocidade média v desloca o pacote, mas não altera qualitativamente a dinâmica informacional.

V. Conclusões

A motivação central deste trabalho foi descrever a evolução e a eventual dissipação da informação no espaço físico durante o processo de aquisição de conhecimento. Através de um formalismo híbrido, superou-se a dificuldade da mecânica quântica em lidar com bases contínuas, estabelecendo os conceitos de informação espacial e de densidade de informação espacial. Demonstrou-se que essa densidade se comporta como uma quantidade física distribuída no espaço e obedece a uma equação de continuidade, onde a dinâmica é ditada pelo fluxo de transporte informacional e por termos locais de sorvedouro ou fonte.

As aplicações do modelo revelaram comportamentos físicos notáveis. No caso da partícula livre, a ausência de potenciais resulta em uma redução monotônica da informação

Fig. 1. Mapas de calor das quantidades da equação de continuidade para a densidade de informação espacial do pacote gaussiano livre. Em termos de t/τ_E: densidade de probabilidade (a); densidade de informação espacial (b); variação temporal de i (c); divergente da corrente de informação (d); e TFD (e). A linha inclinada demarca o centro do pacote; note que os centros das grandezas dinâmicas (c)–(e) não coincidem com ela, reflexo da assimetria imposta pela propagação direcional da informação.



espacial, sugerindo um aspecto de irreversibilidade intrínseca.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

LANDAUER, R. Irreversibility and heat generation in the computing process. **IBM Journal of Research and Development**, v. 5, n. 3, p. 183–191, July 1961.

LANDAUER, R. Information is physical. **Physics Today**, American Institute of Physics, v. 44, n. 5, p. 23–29, May 1991.

WIGNER, E. P. Remarks on the mind-body question. In: **Philosophical Reflections and Syntheses**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1995. p. 247–260.