Efeitos da Desordem Aperiódica na Dinâmica de Caminhadas Quânticas

PAIXÃO, Maria Eduarda Oshiro[1,2]; TSUSTUI, Thiago Takaji[1,2]; ANDRADE, Fabiano M. [1,3,4];

Universidade Estadual de Ponta Grossa - QPQI Group[1]
Universidade Estadual de Ponta Grossa - Departamento de Física[2]
Universidade Estadual de Ponta Grossa - Departamento de Matemática e Estatística[3]
Universidade Estadual de Ponta Grossa - Programa de Pós-Graduação em Ciências/Física[4]

mariaeduardaoshiro@gmail.com[1]

Palavras-Chave: Caminhadas quânticas; aperiodicidade; grafos.

Resumo

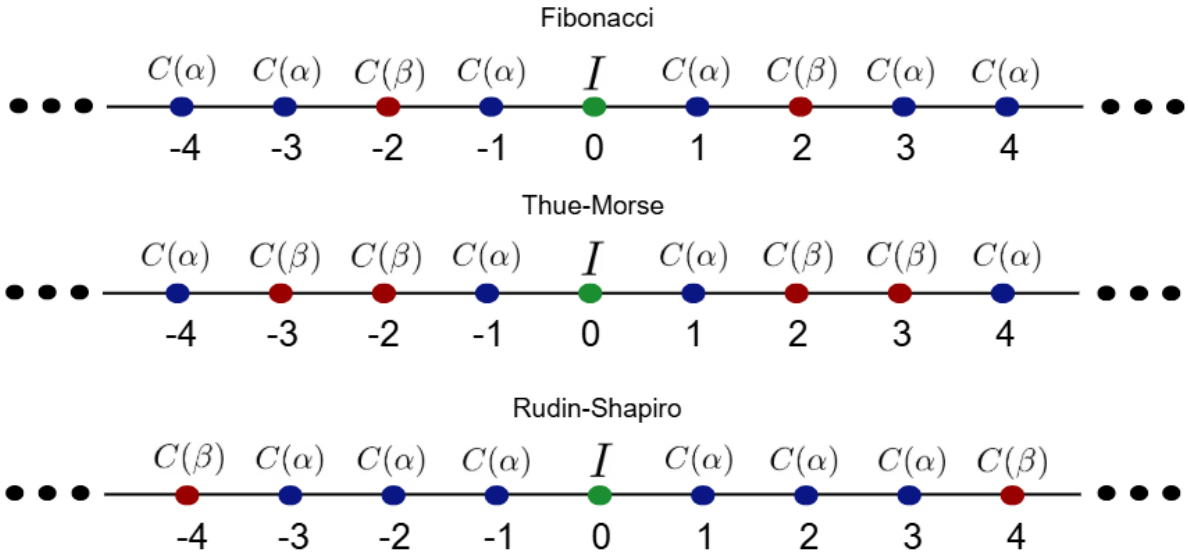
Neste trabalho, investigamos modelos de caminhadas quânticas em redes não homogêneas, com o objetivo de analisar a introdução de desordem por meio de sequências aperiódicas e seus efeitos sobre a dinâmica desses sistemas, uma vez que esses modelos possuem aplicações em computação quântica. Então, realizamos simulações numéricas para investigar sua evolução temporal, sendo que sua dinâmica foi caracterizada por meio do desvio padrão, da distribuição de probabilidades e do emaranhamento entre o espaço de moeda e posição. Os resultados mostram que a desordem aperiódica modifica significativamente as propriedades de difusão e correlação quântica.

I. Introdução

As caminhadas quânticas de tempo discreto (CQ) são análogas quânticas das caminhadas aleatórias clássicas (CAC), distinguindo-se pela evolução unitária do caminhante em superposição de estados (AHARONOV; DAVIDOVICH; ZAGURY, 1993). No modelo de caminhadas quânticas com moeda (CQM) em uma linha, o sistema é descrito pelo espaço de Hilbert composto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_c$, onde $\mathcal{H}_p$ corresponde ao espaço associado a posição e $\mathcal{H}_c$ ao espaço da moeda. O estado do caminhante é representado por $|\psi\rangle = |j\rangle \otimes |\sigma\rangle$, em que j denota a posição na rede e $\sigma = \pm$ os estados da moeda (ANDRADE, 2009), os quais constituem uma base ortonormal.

Nesse modelo, a dinâmica é composta por duas operações sucessivas. Primeiramente, aplica-se o operador moeda C_c, que atua sobre o grau de liberdade interno do caminhante e pode gerar uma superposição dos estados de moeda. Em seguida, aplica-se o operador de deslocamento condicional S_p, que move o caminhante para a direita ou

Fig. 1. Distribuição dos operadores de moeda $C(\alpha)$ e $C(\beta)$ aplicados aos vértices da rede para as sequências de Fibonacci, Thue-Morse e Rudin-Shapiro.



Fonte: Os autores (2026).

para a esquerda na rede de acordo com o estado da moeda. A repetição dessas operações produz a evolução temporal da caminhada quântica:

$$U_c = \left(S_p \otimes |+\rangle\langle +| + S_p^{\dagger} \otimes |-\rangle\langle -|\right)(1_p \otimes C_c), \tag{1}$$

de modo que, após n passos,

$$|\psi(n)\rangle = U_c^n |\psi(0)\rangle. \tag{2}$$

Neste trabalho, consideramos redes não homogêneas nas quais os operadores moeda

$$C(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{3}$$

e $C(\beta)$ são distribuídos segundo as sequências aperiódicas de Fibonacci, Thue-Morse e Rudin-Shapiro (GULLO et al., 2017), como mostra a Fig. 1.

O espalhamento do caminhante é caracterizado pelo desvio padrão,

$$\sigma(n) \propto n^{c_i(\alpha,\beta)}, \tag{4}$$

onde o expoente $c_i(\alpha, \beta)$ determina o regime de difusão para cada sequência (SANTOS, 2023), classificando o espalhamento como subdifusivo ($0 < c_i < 0,5$), difusivo ($c_i = 0,5$), superdifusivo ($0,5 < c_i < 1$), balístico ($c_i = 1$) ou superbalístico ($c_i > 1$).

O grau de emaranhamento entre os espaços de moeda e posição pode ser quanti-

ficado por meio da entropia de von Neumann da matriz densidade reduzida da moeda. Para isso, define-se a matriz densidade reduzida da moeda como sendo

$$\rho_c = \mathrm{Tr}_p \left(|\psi(n)\rangle\langle\psi(n)| \right), \tag{5}$$

onde o traço parcial é realizado sobre os graus de liberdade da posição. A entropia de von Neumann associada a essa matriz é dada por

$$E(n) = -\sum_{i=1} \lambda_i \log_2 \lambda_i, \tag{6}$$

onde λ_i são os autovalores de ρ_c.

II. Fundamentação Teórica/Materiais e Métodos

Este trabalho fundamentou-se no estudo teórico de modelos de CQ e sequências aperiódicas, com base na literatura e nas referências bibliográficas da área. Para investigar a dinâmica dos modelos estudados, foram feitas simulações numéricas utilizando a linguagem de programação Python.

III. Resultados

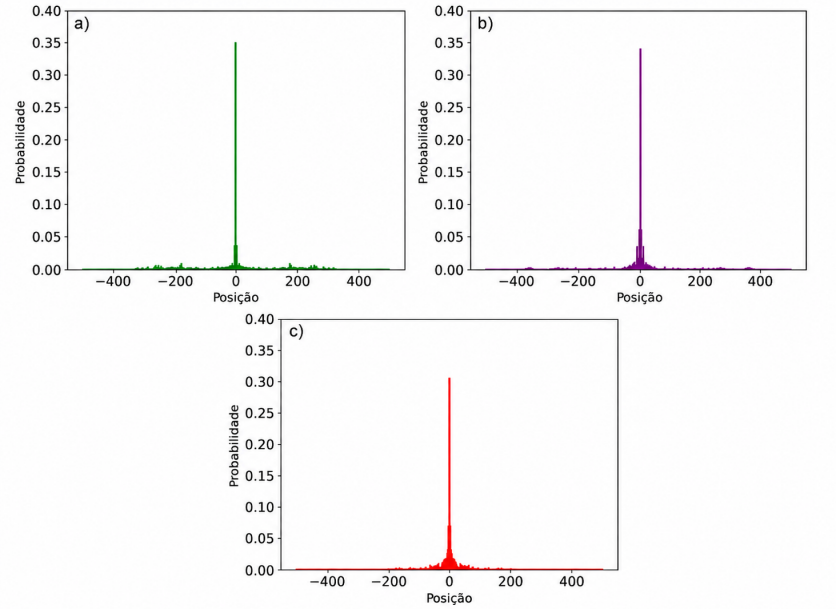
As simulações numéricas foram realizadas considerando um estado inicial simétrico dado por

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle \otimes |-\rangle + i|0\rangle \otimes |+\rangle \right). \tag{7}$$

Todas as simulações foram executadas para $n = 500$ passos, de modo a analisar o regime assintótico das CQ não homogêneas. Os parâmetros do operador moeda foram fixados em $\alpha = \pi/4$ e $\beta = \pi/6$. A Fig. 2 mostra a distribuição de probabilidade da partícula ao longo da rede para cada sequência.

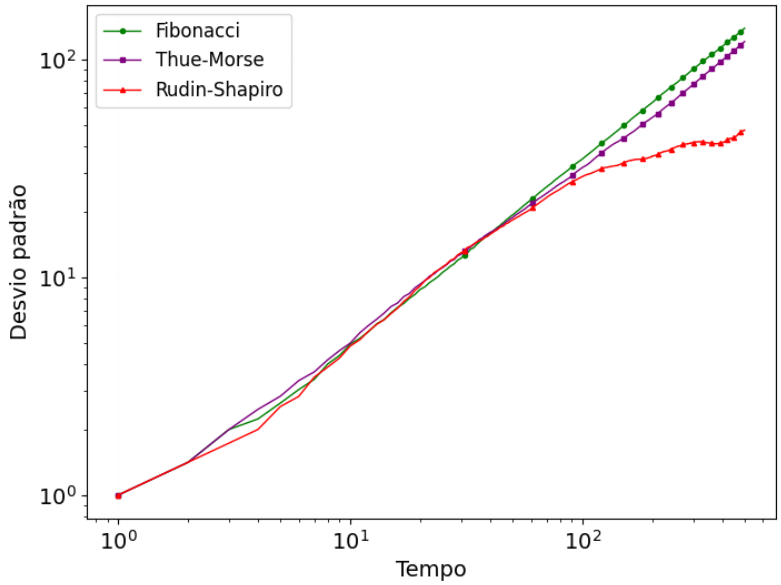
A Fig. 3 apresenta o desvio padrão dos diferentes modelos de CQ. Em comparação com a caminhada clássica, onde $c_{CAC} = 0,5$, foram obtidos os valores $c_F(\pi/4, \pi/6) = 0,86$ e $c_{TM}(\pi/4, \pi/6) = 0,84$. Esses resultados indicam comportamento superdifusivo para as sequências de Fibonacci e Thue-Morse, evidenciando diferentes regimes de propagação e espalhamento do caminhante.

Fig. 2. Distribuição de probabilidade da partícula no regime assintótico para cada modelo de sequência: (a) Fibonacci, (b) Thue-Morse e (c) Rudin-Shapiro.



Fonte: Os autores (2026).

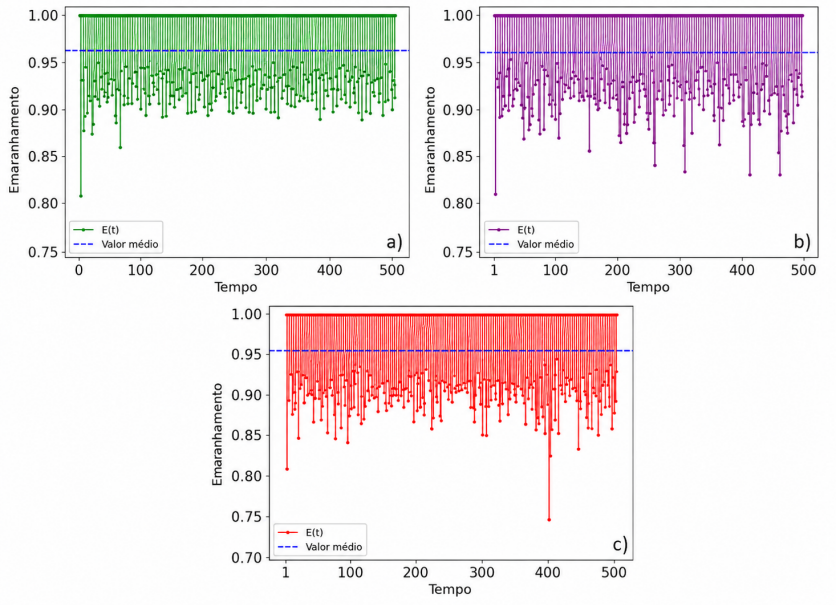
Fig. 3. Desvio padrão para cada modelo de sequência: Fibonacci (verde), Thue-Morse (roxo) e Rudin-Shapiro (vermelho).



Fonte: Os autores (2026).

Quanto ao emaranhamento, mostrado na Fig. 4, observa-se que todas as sequências apresentam forte correlação entre moeda e posição, com valores médios após $n = 200$ passos de aproximadamente 0,82 (Fibonacci), 0,86 (Thue-Morse) e 0,79 (Rudin-Shapiro). Vale destacar que a análise gráfica desconsidera o ponto inicial $t = 0$, no qual não há emaranhamento.

Fig. 4. Emaranhamento entre moeda e posição no regime assintótico para diferentes sequências: (a) Fibonacci, (b) Thue-Morse e (c) Rudin-Shapiro.



Fonte: Os autores (2026).

IV. Conclusões

Os resultados mostram que a não homogeneidade introduzida por sequências aperiódicas altera significativamente a dinâmica das CQ, produzindo regimes distintos de difusão para cada sequência. Além disso, observa-se um valor alto de emaranhamento médio em todos os casos, indicando correlações entre moeda e posição.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação Araucária de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Paraná pelo suporte financeiro concedido para a realização deste trabalho.

Referências

AHARONOV, Y.; DAVIDOVICH, L.; ZAGURY, N. Quantum random walks. **Physical Review A**, v. 48, n. 2, p. 1687–1690, 1993.

ANDRADE, F. M. d. **Métodos de Função de Green na Análise de Grafos Quânticos e Caminhadas Quânticas**. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

GULLO, N. L. et al. Dynamics and energy spectra of aperiodic discrete-time quantum walks. **Physical Review E**, v. 96, n. 1, p. 012111, 2017.

SANTOS, A. S. **Emaranhamento em Caminhadas Quânticas**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2023.