Estudo do Modelo de Black-Scholes para Precificação de Opções Europeias

MACHADO, Gustavo[1]; Protachevicz, Paulo[1]; Batista, Antonio M.[1,2]; Soares, Carlos E. K.[4]

Universidade Estadual de Ponta Grossa – Programa de Pós-Graduação em Ciências/Física[1,2,3]
Universidade Estadual de Ponta Grossa – Departamento de Matemática e Estatística[3,4]

gustavo.bmachado@outlook.com[1]

Palavras-Chave: Black-Scholes; opções; gregas.

Resumo

O modelo de Black-Scholes é uma das principais ferramentas para a precificação de opções europeias no mercado financeiro. Neste trabalho são apresentados seus fundamentos teóricos, hipóteses e principais medidas de sensibilidade associados à equação. Foram gerados gráficos para analisar o comportamento das opções de compra e venda em função do preço do ativo subjacente e do tempo até o vencimento. Os resultados mostraram a influência do tempo, do *strike* e do valor do ativo sobre o prêmio das *calls*, e evidenciaram o comportamento das gregas.

I. Introdução

A precificação de opções é um dos principais problemas do mercado financeiro, motivando o desenvolvimento de modelos matemáticos que buscam determinar o preço justo desses contratos e analisar o seu comportamento. O modelo Black-Scholes busca propor uma relação quantitativa entre o preço da opção e as variáveis associadas ao ativo.

As opções são contratos de compra ou de venda de ativos negociados no mercado financeiro. Esses ativos são ações de empresas listadas em bolsas de valores e esse contrato possui um preço, também chamado de prêmio das opções. Uma analogia possível é o mercado de seguros, onde o assegurado paga um prêmio para a seguradora para adquirir proteção em eventos futuros. Nesse exemplo, o ativo subjacente é o ativo assegurado e o valor desse ativo influencia no valor do prêmio ou valor da opção.

O mercado de opções é um mercado derivativo que sofre com o comportamento do ativo subjacente, e é um contrato que dá o direito de compra ou de venda de um ativo por um preço determinado previamente. Black-Scholes é o nome dado ao modelo que se destacou na busca da precificação de contratos de ativos. Este modelo foi desenvolvido em 1973

pelo economista Fischer Black e o professor Myron Scholes, e depois foi aperfeiçoado pelo professor Robert Merton, o que rendeu um prêmio Nobel de Economia em 1997 (HISSA, 2010). Apesar de sua importante contribuição, o modelo possui algumas simplificações, o que motivou o desenvolvimento de outros modelos para precificar as opções, como o de Merton encontrado em Romaggi (2025).

Este trabalho busca apresentar o modelo de Black-Scholes, as gregas, e simulações numéricas.

II. Fundamentação Teórica/Materiais e Métodos

O modelo de Black-Scholes assume algumas hipóteses sobre o preço do ativo. Uma delas é que a volatilidade do ativo é constante durante todo o período do contrato. Também assume a existência de uma taxa livre de riscos constante. Além disso, assume que não há arbitragem, isto é, a existência de uma estratégia de investimento com lucro certo. Assume ainda que o preço do ativo (S) segue um Movimento Browniano Geométrico (GBM), cuja dinâmica é governada por um processo de Wiener (ROMAGGI, 2025).

O GBM precisa satisfazer a equação diferencial estocástica que estima o preço do ativo, com uma parte "previsível" dependente da taxa de retorno médio (μ), uma parte aleatória dependente da volatilidade (σ), ambas dependentes do preço do ativo subjacente (ROMAGGI, 2025). A equação é:

$$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dW. \tag{1}$$

A partir dessa hipótese e usando o lema de Itô, chegamos à Equação Diferencial Parcial (EDP) de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, \tag{2}$$

cuja solução estima o preço teórico das opções do tipo europeias.

As gregas são medidas de sensibilidade que medem a atuação e influência das variáveis na equação de Black-Scholes. Neste trabalho são analisadas Delta, Gama, Vega, Theta e Rhô, atreladas à sensibilidade em relação ao preço do ativo subjacente, à variação do Delta, à volatilidade, ao tempo e à variação da taxa de juros, respectivamente (FILHO, 2022).

A solução do preço da *call* (c) e da *put* (p) é dada em Filho (2022), respectivamente, por:

$$c = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad \text{e} \quad p = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_t N(-d_1), \tag{3}$$

onde N representa a distribuição normal e $T - t$ é o tempo até o vencimento. Após o estudo bibliográfico e com o objetivo de analisar visualmente o comportamento do modelo apresentado e de suas gregas, foram construídos gráficos da solução analítica do modelo e das funções associadas. Os parâmetros adotados estão especificados na Tabela I.

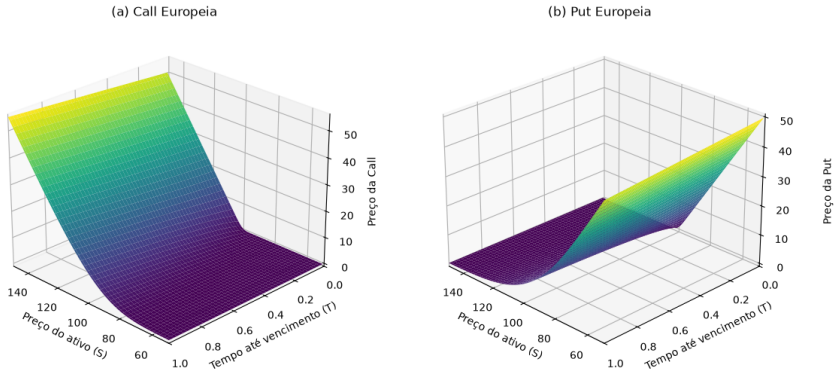
Tabela I. Parâmetros utilizados nas simulações numéricas.

Parâmetro	**Valor**
Preço do ativo (S)	Variável
Preço de exercício (K)	100
Taxa livre de risco (r)	5%
Volatilidade (σ)	20%
Tempo até o vencimento (T)	1 ano

III. Resultados

Call e Put em função do ativo

Fig. 1. Superfícies do preço da *call* e da *put* obtidas pelo modelo de Black-Scholes em função do preço do ativo e do tempo até o vencimento.



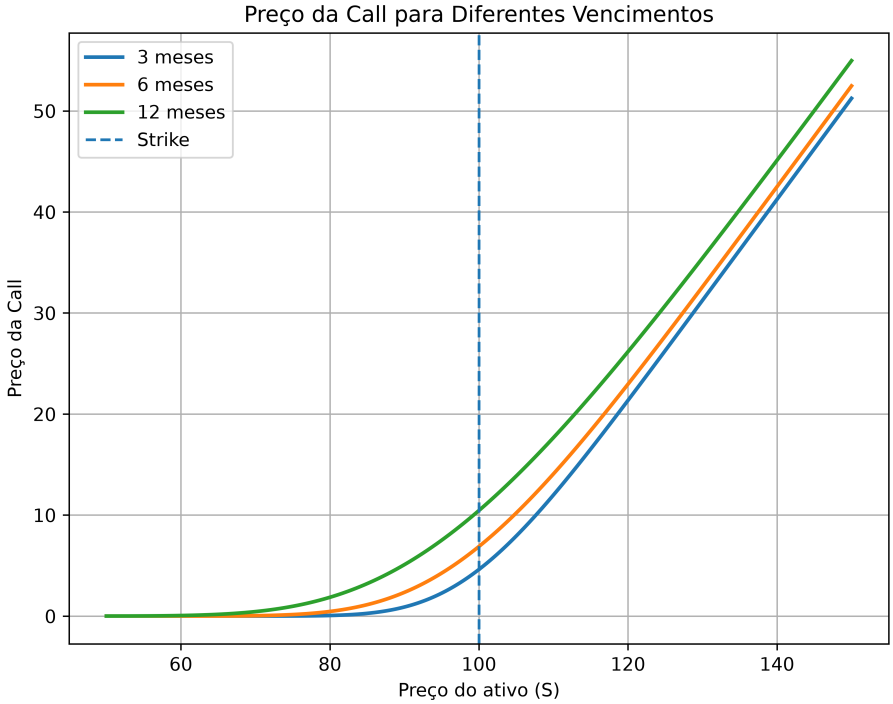
Fonte: O autor.

A Figura 1 apresenta o preço da *call* e da *put* em função do preço do ativo e do tempo até o vencimento. Observa-se que o valor da *call* aumenta à medida que o preço do ativo cresce, pois cresce a possibilidade de exercer a opção com lucro. Em contrapartida, o valor da *put* diminui com o aumento do preço do ativo, uma vez que se torna menos vantajoso vender o ativo pelo preço de exercício. Também foi observada uma região de maior sensibilidade próximo ao *strike*, ou seja, uma pequena mudança no preço do ativo

influencia maiores mudanças no *strike*.

No gráfico de comparação do comportamento para tempos diferentes de vencimento, Figura 2, notou-se que quanto maior o prazo, maior é o prêmio devido à quantidade de tempo hábil para atingir a condição favorável, e também por conta da maior imprevisibilidade, pois é mais fácil prever algo que está mais próximo de acontecer.

Fig. 2. Preço da opção de compra, *call*, para diferentes tempos até o vencimento, em função do preço do ativo subjacente.



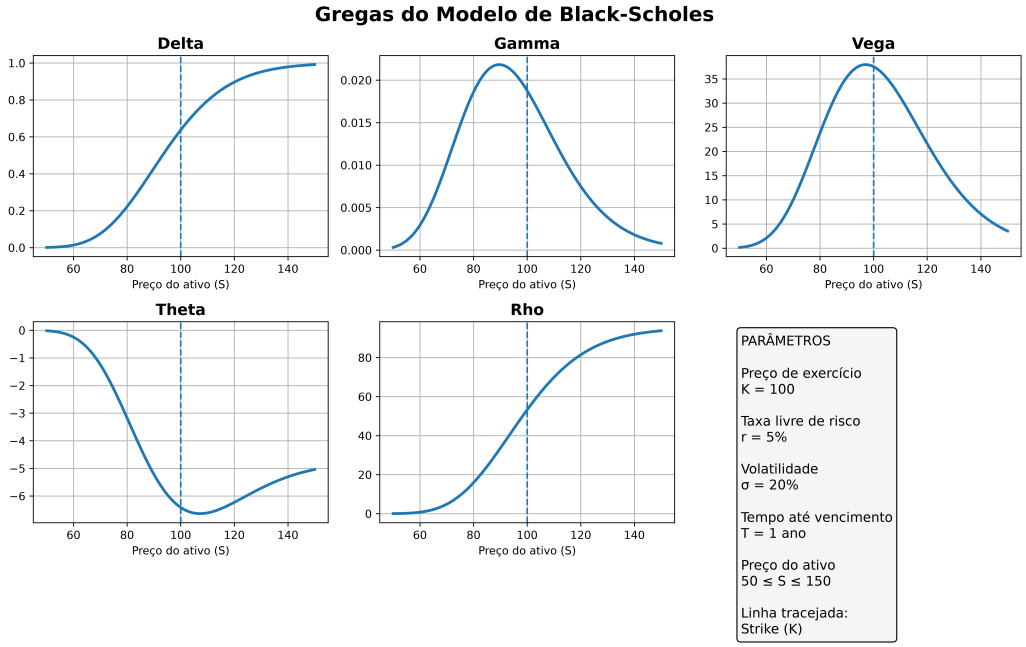
Fonte: O autor.

Gregas

A Figura 3 mostra o comportamento das cinco gregas de Black-Scholes variando somente o preço do ativo subjacente, mantendo o *strike*, a taxa de juros livre de risco, a volatilidade e o tempo constantes. Os gráficos não representam uma série temporal, mas a sensibilidade do prêmio da opção em função do preço do ativo subjacente. O Delta vai de zero a um à medida que a cotação vai além do *strike*, aumentando o valor de Delta quanto mais longe do *strike* e a sensibilidade do prêmio. O Gama mostra um pico na região próxima ao *strike*, indicando maior variação do Delta. O Vega tem um comportamento muito parecido com o Gama, mostrando que a volatilidade influencia mais o prêmio nessa região. O Theta é predominantemente negativo, apresentando o efeito que o tempo causa no prêmio, diminuindo-o à medida que o vencimento se aproxima. Rhô tem comportamento parecido com o de Delta, cresce com o preço do ativo, o que indica que a

taxa de juros livre de risco influencia mais nas opções próximas ao *strike* (FILHO, 2022).

Fig. 3. Comportamento das gregas do modelo de Black-Scholes em função do preço do ativo subjacente.



Fonte: O autor.

IV. Conclusões

Neste trabalho estudou-se o comportamento do modelo original de Black-Scholes e também das funções associadas que influenciam e parametrizam a EDP do modelo. Este estudo fornece uma base para trabalhos futuros ao analisar modelos de precificação publicados posteriormente ao modelo original, encontrar limitações e possíveis proposições de novos modelos de precificação.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus e à família, à UEPG pelo espaço e ao Grupo 105.

Referências

FILHO, F. B. d. A. **Aplicação da fórmula de Black & Scholes para precificação de contratos de opções de energia elétrica no Ambiente de Contratação Livre**. São Paulo: Dialética, 2022. 67–74 p.

HISSA, M. **Introdução às opções: aprenda a operar com segurança**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

ROMAGGI, F. **Black-Scholes Model: Mathematical Modeling and Continuous/Discrete Simulation**. 2025. Engineering Technology for Strategy and Security.