4
2022

Revista OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

"Promovendo a inclusão social e ajudando a mudar o cenário da educação."

Universidade Estadual de Ponta Grossa,
Setor de Ciências Exatas e Naturais
Departamento de Matemática e Estatística

Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

v.4 (2022)

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Reitor: Miguel Sanches Neto
Vice-Reitor: Ivo Mottin Demiate

PRÓ-REITORIA DE ASSUNTOS ADMINISTRATIVOS - PROAD

Pró-Reitor: Emerson Martins Hilgemberg

PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO - PROEX

Pró-Reitora: Maria Salete Marcon Gomes Vaz

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO - PROGRAD

Pró-Reitor: Miguel Arcanjo de Freitas Júnior

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Chefe: Deyse Márcia Pacheco Gebert
Chefe Adjunto: Jocemar de Quadros Chagas

Apoio:

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA - IMPA

CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática - OPMat/ Universidade Estadual de Ponta Grossa. Departamento de Matemática e Estatística. v.1 (2019). Ponta Grossa: UEPG/ DEMAT, 2022.

Anual
v. 2, 2020
v.3, 2021
v.4, 2022
Link: https://www2.uepg.br/opmat/revista-da-opmat/

1. Matemática – competições. 2. Matemática – questões problemas. 3. Matemática – exercícios. I. Universidade Estadual de Ponta Grossa. II. Departamento de Matemática e Estatística. III. T.

CDD: 510

Ficha Catalográfica elaborada por Maria Luzia Fernandes Bertholino dos Santos – CRB9/986

Arte da Capa:
CCOM - Coordenadoria de Comunicação Social

Postagem:
Segundo semestre de 2022

Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática v.4 (2022)

Sumário

Apresentação

Caro Leitor,

A *Revista da Olímpiada Pontagrossense de Matemática* é resultado do projeto de extensão: *Olímpiadas de Matemática: Promovendo a Inclusão Social e ajudando a mudar o cenário da Educação*, desenvolvido pelo Departamento de Matemática e Estatística da UEPG. Tem periodicidade anual, sendo este o seu 4° volume.

Esta edição apresentará os problemas e as soluções referentes a I OPM (utilizou-se esta sigla somente em sua primeira edição, para designar a Olimpíada Pontagrossense de Matemática), a II OPMat e a III OPMat. O principal objetivo da Revista é compor um material robusto em conteúdos matemáticos com vista a ser utilizado como recurso pedagógico ao letramento mate-mático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e como fonte de estudo e treinamento para olimpíadas de matemática.

Encorajamos todos os leitores a nos enviar soluções para os desafios encontrados na seção "Problemas Propostos", bem como submeter artigos, que serão publicados na próxima edição, desde que sejam aprovados pelo Comitê Editorial da Revista.

Para ficar por dentro das notícias da Olimpíada Pontagrossense de Matemática, próximas edições, fotos e resultados, acompanhe-nos pelas nossas redes sociais:

`https://www.facebook.com/opmat.uepg`

`instagram.com/opmat_uepg/`

e pela homepage:

`www2.uepg.br/opmat/revista-da-opmat/`

Ponta Grossa, 03 de dezembro de 2022.

Comitê Editorial

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

1ª OPM

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

"Promovendo a inclusão social e ajudando a mudar o cenário da educação."

Premiados

A Cerimônia de Premiação da *1ª Olimpíada Pontagrossense de Matemática* (1ªOPM) ocorreu no dia 07 de dezembro de 2013, no Cine Teatro PAX, às 14h00 para os alunos do Níveis **1** (6º e 7º anos do Ensino Fundamental II), **2** (8º e 9º anos do Ensino Fundamental II), **3** (Ensino Médio).

A Cerimônia de Premiação contou com a presença das seguintes autoridades:

- Prof. Carlos Luciano Sant'Ana Vargas - Reitor da Universidade Estadual de Ponta Grossa
- Profa. Gisele Alves de Sá Quimelli - Pró-Reitora de Extensão e Assuntos Culturais da UEPG
- Prof. Ariangelo Hauer Dias - Pró-Reitor de Assuntos Administrativos da UEPG
- Prof. José Tadeu Teles Lunardi - Diretor do Setor de Ciências Exatas e Naturais da UEPG
- Profa. Lorena Ramos Correia Cardoso - Chefe do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG
- Profa. Rita de Cássia Amaral Vieira - Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPG
- Profa. Maria Izabel Vieira - Chefe do Núcleo Regional da Educação de Ponta Grossa
- Prof. Luiz Fabiano dos Anjos - Coordenador da Educação Básica do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa
- Profa. Sandra Mara Dias Pedroso - Técnica-pedagógica de Matemática do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa
- Profa. Carmen Lúcia Valgas - Membro da comissão organizadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática
- Profa. Elisangela dos Santos Meza - Coordenadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Nessa Cerimônia foram premiados 160 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 32,06% dos alunos que participaram da segunda Fase da 1ª OPM): 15 com medalhas de ouro; 30 com medalhas de prata; 45 com medalhas de bronze e 70 com medalhas de menção honrosa.

Também foram entregues certificados para todas as escolas participantes da 1ª OPM.

Primeiro Lugar Geral (Netbook)

- Matheus Grabin Kovalski (Colégio Neo Master) - Nível 3

Nível 1

Troféu

- João Lucas Batistão Nalevaiko (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- João Pedro Wardani(Colégio Sagrada Família)

Ouro

- João Pedro Wardani(Colégio Sagrada Família)
- Nathan Nabozny (Escola Tales de Mileto)
- Gabriel Dalzoto Salles (Colégio Sagrada Família)
- Cassiano José Kounaris Fuziki (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Hailyn Ribas de Lima (Colégio Sagrado Coração de Jesus)

Prata

- Amy Sakakibara (Escola Desafio)
- Breno Antunes da Luz (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Juan Vitor Oliveira Pêgas (Colégio Marista Pio XII)
- Mike Helder Durvalino Botelho Ribeiro (Colégio Neo Master)

- Pedro Azevedo Fornazari (Colégio Sagrada Família)
- Gabriel Henrique Kwiatkovski Godinho (Colégio Neo Master)
- João Lucas Batistão Nalevaiko (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Renan Nishimura de Lima (Escola Santa Terezinha)
- Rafael Strack (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- João Gabriel de Souza (Colégio Pontagrossense Sepam)

Bronze

- Vitor Kosloski (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Malu Ferreira Bueno (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Victor Sturmer Eneas da Silva (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Allan Nabozny (Escola Tales de Mileto)
- Amanda Franczak da Silva (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Henrique de Carvalho Furia (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lucio Enzo Horie (Colégio Neo Master)
- Otávio Winnik Carvalho de Gouvêia(Colégio Sagrada Família)
- Ana Luisa Yoshie Ogatta Yadomi (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Bruno Vieira Harmatruk (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- Felipe Stanislavski Mendes (Escola Tales de Mileto)
- Gustavo Perlin Fior (Colégio Neo Master)
- Barbara Hellen Sowinski Alves (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Isis Fernandes do Carmo (Colégio Sant'Ana)
- Leticia Oliveira Almanso (Colégio Sagrada Família)

Menção Honrosa

- Igor Henrique Krugel Borba (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gabriel Gravena (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Patrick Guilherme Macyszyn dos Santos (Colégio Estadual Santa Maria)
- Gustavo Carreira Roth (Colégio Sagrada Família)
- Leonardo Perreto (Colégio Sagrada Família)
- André Fernandes Boratto (Colégio Marista Pio XII)
- Eduarda Grobe Alberti (Colégio Estadual Professor Elzira Correia de Sá)
- Luíza Helena Machado Santos (Escola Santa Terezinha)
- Maria Eduarda Belo (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Natália Ruppel Mourão (Colégio Sagrada Família)
- Heitor Mariano Costa (Escola Desafio)
- Vicente Johansen Capri (Colégio Sagrada Família)
- Gabriel Pimentel Sampaio (Colégio Marista Pio XII)
- Gianluca Moleta (Escola Tales de Mileto)
- Kauan Golçalves de Oliveira (Colégio Sagrada Família)
- Rodrigo de Oliveira (Colégio Marista Pio XII)
- Sabrina Machado (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Tayná Prestes Jacinto (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Victor Hugo de Oliveira Dantas (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Jonathan Antunes de Oliveira (Colégio Sagrada Família)
- Veronica Kristine Schneider (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Eduardo Naoto Saito (Colégio Integração)

- Pedro Victor Pereira (Colégio Integração)
- Peterson Alin Kabaz (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Beatriz Raffaelly Schneider (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Nicolas Dalthon Franco Bertão (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Talissa Santos de Assis (Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell du Vernay)
- Jordana Nicoly Carraro (Colégio Sagrada Família)
- Lucas José Tiepermann (Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell du Vernay)
- Paulo Henrique Neto (Escola Estadual Jesus Divino Operário)

Nível 2

Troféu

- João Pedro Herche Cavasotti (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Kawane Rafaela Rodrigues (Colégio Pontagrossense Sepam)

Ouro

- João Pedro Herche Cavasotti (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Kawane Rafaela Rodrigues (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Mateus André Wozniaki (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Rafaela Penteado Gomes (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Gabriel Moro Conche (Colégio Sagrada Família)

Prata

- Leonardo Kiers (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gustavo Cunninghan Gmyterco (Colégio Neo Master)

- Juliana Malucelli Tozetto (Colégio Neo Master)
- Acacio de Oliveira Lacerda Neto (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Gustavo Lanzini Levandoski (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Gabriela de Carvalho Furia (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Francielle Nocêra Viechineski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Milena Christine Krol do Nascimento (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Elyevan José de Melo (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Lucas dos Santos Pereira Mariano (Centro Social Marista Santa Mônica)

Bronze

- Jaime Bozzetto Junior (Colégio Neo Master)
- Gabrielle Jagas Neves (Colégio Sagrada Família)
- Luiz Arthur Feola (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- Raylane Martins (Colégio Sagrada Família)
- Gustavo Chanoski (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Daniel José Schulmeister (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Luna Rhaine Nascimento Oliveira (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Rafaela Franscisquini (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Carla Thais do Amaral (Escola Estadual Professor Edison Pietrobelli)
- Tiago Daniel Gueiber (Colégio Marista Pio XII)
- Leandro Volski (Colégio Estadual Professor José Gomes do Amaral)
- Anne Mylene Stroka (Colégio Sagrado Coração De Jesus)

- Giana Margraf Althaus (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Cibelli Eliane Brugge (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Bruno Gabriel Telles (Colégio Sagrada Família)

Menção Honrosa

- Gustavo Franzener Gonçalves da Silva (Colégio Sant'Ana)
- Luiza Bastos Bianco (Colégio Neo Master)
- Jonas Ribeiro dos Santos (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Vitória Moura Willemann (Escola Santa Terezinha)
- Carolina Ignachewiski da Silva (Colégio Sagrada Família)
- Carlos Daniel Knoll Pinheiro (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Guilherme da Silva Costa (Escola Estadual Professor Edison Pietrobelli)
- Marcela Caroline Gomes (Colégio Sagrada Família)
- Maria Julia Dechandt (Colégio Neo Master)
- Larissa Schechtel (Colégio Sagrada Família)
- Maria Eduarda Franzini Ozório (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Leonardo Scandolara Junior (Colégio Sagrada Família)
- Vitor Augusto dos Santos (Colégio Sagrada Família)
- Lucas Martinelli (Colégio Sagrada Família)
- Isabelly Pedroso Hilgenberg (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Amanda Priscila Soistak (Colégio Sagrada Família)
- Eduarda Jula de Oliveira (Colégio Sagrada Família)
- Gabriel Philippini Ferreira Borges da Silva (Colégio Marista Pio XII)

- Thiago Gabriel Lichoveski (Colégio Neo Master)
- Luiz Henrique Noronha Maia (Colégio Sagrada Família)
- Gabriel Strack Stadler Crispim (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Luiz Felipe Biuk (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Leandro Machado dos Santos (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Bianca Piccoli Brayner (Colégio Neo Master)
- Bruno Stori (Escola Santa Terezinha)

Nível 3

Troféu

- Wesley Lauber Dias da Silva (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Thaís Carolina Klepa (Colégio Sagrada Família)

Ouro

- Matheus Grabin Kovalski (Colégio Neo Master)
- Thaís Carolina Klepa (Colégio Sagrada Família)
- Leonardo Bérgamo Ortolan (Colégio Neo Master)
- Camila Varotto Baroncini (Colégio Marista Pio XII)
- Gustavo Kenzo Takeda (Colégio Marista Pio XII)

Prata

- Wesley Lauber Dias da Silva (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Juliano Estelmhsts (Colégio Sagrada Família)
- Cauê Ogatta Maia (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gustavo Gomes Papi (Colégio Neo Master)

- Elias Estevão Pereira dos Santos (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Jeniffer Caroline Zarpellon (Colégio Sagrada Família)
- Eduardo Ribas de Menezes (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Charles Hartmann Zelenski (Colégio Sagrada Família)
- Gabriela Baier (Colégio Sagrada Família)
- Rubens Leonidas Primor (Colégio Sagrada Família)

Bronze

- Vinícius Gomes da Silva (Colégio Marista Pio XII)
- Fernanda Deschamps (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Julia Sanches Ito (Colégio Sagrada Família)
- Lenon Diniz Seixas (Colégio Sagarda Família)
- Natália Macedo Carvalho (Colégio Marista Pio XII)
- Raul Malucelli Tozetto (Colégio Neo Master)
- Letícia Izumi Yoshida Yamazaki (Colégio Marista Pio XII)
- Luiz Otavio Oyama (Colégio Sagrada Família)
- Tayná Fusaro (Colégio Sagrada Família)
- Mariana Bechtold Pereira (Colégio Marista Pio XII)
- Matheus Benedito Mendes (Colégio Integração)
- Pamela Pereira Guaringue (Colégio Sagrada Família)
- Gabriel Bojko (Colégio Sagrada Família)
- Cecília Wolochn Schell (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Bruno Rafael Farias Speltz (Colégio Pontagrossense Sepam)

Menção Honrosa

- Larissa Yumi Ito (Colégio Sagrada Família)
- Gustavo Souza Alves (Colégio Marista Pio XII)
- Wellington Patrick de Lima (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Everaldo Batista Penczkoski (Colégio Sagrada Família)
- Débora Hiromi Yoshizawa (Colégio Estadual Colônia Dona Luiza)
- Victoria Schlumberger Cachoeira (Colégio Neo Master)
- Letícia Staszczak (Colégio Sagrada Família)
- Andressa Hamilko Balzer (Colégio Sagrada Família)
- Thainara Krubniki Aquino (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Mathias Rodrigues da Luz (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Rômulo Lacerda Zavatario Barros (Colégio Sant'Ana)
- Gabriel Staichak (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Larissa Ohana Felício (Colégio Marista Pio XII)
- Bárbara de Aguiar Justus (Colégio Marista Pio XII)
- Elisa Roth (Colégio Neo Master)

Professores Premiados

A seguir consta a relação de todos os professores que tiveram alunos participantes da 1ª OPM no ano de 2013:

- José Airton Teófilo dos Santos (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Janislei Aparecida Coplas Becher (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Luciano Mendes Pereira (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Marselha Aparecida Wiecheteck (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Marisol Rocio Vieira da Rosa (Colégio Estadual 31 de Março)
- Shirley Aparecida de Moraes (Colégio Estadual 31 de Março)
- Zeneida Aparecida Inglês (Colégio Estadual 31 de Março)
- Alcebíades Antônio Baretta (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Janeslei Schemberger Werner (Colégio Estadual Alberto Rebello Valente)
- Neide da Silva Domingues de Oliveira (Colégio Estadual Ana Divanir Boratto)
- Simone Cristina Bueno (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Iolanda Gebiluka Mauda (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Fábio Francisco da Silva (Colégio Estadual Becker e Silva)
- Celso Luis Chagas (Colégio Estadual Colônia Dona Luiza)
- Igor Alberto Dantas Abrami (Colégio Estadual Colônia Dona Luiza)
- Taise Crema (Colégio Estadual Colônia Dona Luiza)
- Jaqueline do Rocio Marques Souza da Silva (Colégio Estadual Colônia Dona Luiza)
- Patrícia Adriana Rocha Cerqueira (Colégio Estadual Dorah Gomes Daitschman)
- Maria Eliete Francischinelli Freitas (Colégio Estadual Dorah Gomes Daitschman)

- Adriana Ramos Ferreira (Colégio Estadual Dorah Gomes Daitschman)
- Denise do Rocio Tozetto (Colégio Estadual Espírito Santo)
- Sônia Maria Zaguobinski Pilarski (Colégio Estadual Francisco Pires Machado)
- Lourival do Nascimento e Silva (Colégio Estadual João Ricardo Von Borell du Vernay)
- Juliane Mara Lirani (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Eva Aparecida Carvalho e Silva (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Maristel do Nascimento (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Maria Eutemia Istschuk (Colégio Estadual Polivalente)
- Maria Andreia Dal-Col Martins (Colégio Estadual Professor José Gomes do Amaral)
- Josmael de Jesus Klazura (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Vilma Muler (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Vagner Guedes (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Antônio Henrique Feld (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Dennis Evandro de Camargo (Colégio Estadual Santa Maria)
- Igor Alberto Dantas Abrami (Colégio Estadual Santa Maria)
- Taíse Crema (Colégio Estadual Santa Maria)
- Marcia Terezinha Costa (Colégio Estadual Senador Correia)
- Waldir Uller (Colégio Integração)
- Marcos Augusto Mendes (Colégio Integração)
- Alan Alceu Leachenski (Colégio Integração)
- Vanderlei Siqueira dos Santos (Colégio Marista Pio XII)

- Geane Dias de Moura Jorge (Colégio Marista Pio XII)
- Dayane Rejane Andrade Maia (Colégio Marista Pio XII)
- Jeferson Muller (Colégio Marista Pio XII)
- Tiago Vieira (Colégio Marista Pio XII)
- Ana Elizabeth Osternack Bueno (Colégio Neo Master)
- Geane Dias de Moura Jorge (Colégio Neo Master)
- Simone Daiane Pisnisk (Colégio Neo Master)
- Osni Mongruel Júnior (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Sonia Mongruel (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Fernanda Fetzer (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Rubens Furstenberger (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lucia Yukie Shimasaki (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Irmã Edites Bet (Colégio Sagrada Família)
- Fabio Augusto Souto Rosa (Colégio Sagrada Família)
- Suzane Machado Baer Costa (Colégio Sagrada Família)
- Joseane Gouveia Schenberger (Colégio Sagrada Família)
- Irmã Leonilda Maria Fabris (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Fernando Camilotti (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Roberto Mauro Ramos Mainardes (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Vera do Rocio Vanat Prestes (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Patricia Jardim Strack (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Loreci Dirci Barbiero Bowens (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Irmã Maria Aluísia Rhoden (Colégio Sant'Ana)

- Marisa Franzener Golçalves da Silva (Colégio Sant'Ana)
- José Osni Golçalves da Silva (Colégio Sant'Ana)
- Kelly Cristina Campones (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Joel Lopes da Silva Júnior (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Lucia Yukie Shimasaki (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Antônio Carlos Pilatti (Escola Desafio)
- Sheila Regina Bagatelli Bozz (Escola Desafio)
- Carmen Lúcia Preuss (Escola Estadual do Campo de Vila Velha)
- Romildo Serato Neto (Escola Estadual Edison Pietrobelli)
- José Fernandes Neto (Escola Estadual Edison Pietrobelli)
- Regina Rossa (Escola Estadual Edison Pietrobelli)
- Luis Fernando Ferreira de Lima (Escola Estadual Frei Doroteu de Pádua)
- Paulo Sergio Rufino (Escola Estadual Frei Doroteu de Pádua)
- Fabiana dos Reis (Escola Estadual Frei Doroteu de Pádua)
- Ronilze de Fátima Tozetto (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Sheila Regina Bagatelli Bozz (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Kelen Cristina dos Santos Abrami (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Leandro Lustoza Ferreira (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Adriane Inês Burgardt (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Miriam Jaqueline Gomes Rocha (Escola Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Irmã Faustina Pereira (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Rosni Troyner (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Antônio Jorga Dantas (Escola Estadual Monteiro Lobato)

- Rosa Martins da Silva (Escola Santa Terezinha)
- Angelis Haas Ronchi (Escola Santa Terezinha)
- Alessandra Cardozo (Escola Santa Terezinha)
- Vanize Aparecida Noimann (Escola Tales de Mileto)
- Alisson Lima Emiliano (Escola Tales de Mileto)

Escolas Participantes

Abaixo consta a relação de todas as escolas participantes da 1^a OPM no ano de 2013:

Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa
Centro Social Marista Santa Mônica
Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas
Colégio Estadual 31 de Março
Colégio Estadual Ana Divanir Boratto
Colégio Estadual Colônia Dona Luiza
Colégio Estadual Dorah Gomes Daitschman
Colégio Estadual Francisco Pires Machado
Colégio Estadual General Antônio Sampaio
Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória
Colégio Estadual Polivalente
Colégio Estadual Alberto Rebello Valente
Colégio Estadual Professor Becker e Silva
Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell du Vernay
Colégio Professor José Gomes do Amaral
Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico
Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá
Colégio Estadual Santa Maria
Colégio Estadual Senador Correia
Colégio Integração
Colégio Marista Pio XII
Colégio Neo Master
Colégio Pontagrossense Sepam
Colégio Sagrada Família
Colégio Sagrado Coração de Jesus
Colégio Sant'Ana
Colégio Sesi - Ponta Grossa
Escola Estadual do Campo de Vila Velha
Escola Desafio
Escola Estadual Espírito Santo
Escola Estadual Frei Doroteu de Pádua
Escola Estadual Jesus Divino Operário
Escola Estadual Maestro Bento Mossurunga

Escola Estadual Medalha Milagrosa
Escola Estadual Monteiro Lobato
Escola Estadual Professor Edison Pietrobelli
Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba
Escola Santa Terezinha
Escola Tales de Mileto

1ª OPM - Nível 1

Primeira Fase

Problema 1. Brincando com uma calculadora, um aluno, ao dividir um número natural n por 3, obteve quociente x e resto 1. Continuando a brincadeira, o aluno dividiu x por 3 e obteve quociente y e resto 2. E repetindo o processo mais uma vez, o aluno dividiu y por 3 e obteve quociente z e resto 0. Pode-se então afirmar que se o aluno dividir n por 27, o quociente e o resto serão respectivamente:

a) $x+y+z$ e 0

b) z e 0

c) $x+y$ e 3

d) z e 7

e) $x+y+z$ e 3

Problema 2. Dados três números inteiros positivos a, b e c, distintos, e menores ou iguais a 9, e se N é a soma de todos os números inteiros de três algarismos distintos que podem ser construídos com os números a, b e c, pode-se afirmar que:

a) N pode ser um quadrado perfeito

b) N é múltiplo de 9

c) N pode ser 444

d) O maior valor possível para N é 5994

e) O quociente da divisão de N por 36 pode ser 37

Problema 3. Seja $N_1 = abc$, um número natural de três algarismos distintos (a, b e c) não nulos, $N_2 = bac$, $N_3 = cba$ e $N_4 = acb$. Pode-se afirmar que se $N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ for divisível por 37, então:

a) N_1 é divisível por 3

b) $26a + 10b + c$ é divisível por 37

c) $a + b + c$ pode ser igual a 15

d) $a+b+c$ não pode ser múltiplo de 7

e) $10a+26b+c$ é divisível por 37

Problema 4. Um leitor estabelece como rotina para ler seus livros, as seguintes regras: toda vez que começa a ler um livro, lê todo dia algumas páginas, até terminar a leitura; no primeiro dia lê as 10 primeiras páginas e, a partir do segundo, relê as duas últimas páginas do dia anterior e mais 8 páginas. Mantendo essa rotina, se o leitor começar a ler um livro, com páginas numeradas de 1 a 230, no dia 01/07/2013, em que dia lerá a página 98 pela segunda vez?

a) 13/07/2013

b) 12/07/2013

c) 11/07/2013

d) 10/07/2013

e) 02/08/2013

Problema 5. Simplificando a expressão $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{10}}$

a) $\frac{4}{15}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $\frac{1}{15}$ e) $\frac{1}{3}$

Problema 6. Se uma pizza e meia custa $R\$3,00$, quando custa 5 pizzas?

a) $R\$6,00$ b) $R\$7,50$ c) $R\$9,00$ d) $R\$9,50$ e) $R\$10,00$

Problema 7. Num corredor existem 10 portas enfileiradas e numeradas, em sequência, de 1 a 10. Num certo momento as 5 primeiras portas estão abertas e as 5 últimas estão fechadas. João deve alterar os estados das portas cujo número é par, fechando as que estão abertas e abrindo as que estão fechadas. Em seguida, Maria deve alterar os estados das portas cujo número é múltiplo de 3. E por último, Fernando deve alterar os estados das portas cujo número é múltiplo de 5. Terminadas todas as alterações, quantas portas estarão fechadas?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Problema 8. No tabuleiro 4x4 abaixo, devem ser escritos os números naturais de 1 a 16, de tal forma que a soma dos números colocados em cada linha, coluna ou diagonal seja sempre a mesma. Alguns desses números já estão inseridos no tabuleiro:

1			4
	A	B	
	C	D	
13			16

Após o preenchimento completo do tabuleiro, os números inseridos nas posições A, B, C e D são tais que:

a) $A+C=B+D$

b) $A+D=B+C$

c) $A=2D$

d) $C=2B$

e) $D=A+B+C$

Problema 9. Maria foi à feira e comprou duas dúzias de laranjas, duas dúzias de bananas e uma dúzia de maçãs, gastando $R\$15,80$. Na outra semana, quando voltou à feira, comprou três dúzias de laranjas, duas dúzias de bananas e duas dúzias de maçãs, e desta vez gastou $R\$24,50$. Se os preços das frutas permaneceram inalterados nas duas compras, quanto Maria teria gastado se tivesse comprado apenas duas dúzias de laranjas e duas dúzias de maçãs?

a) $R\$8,70$ b) $R\$10,80$ c) $R\$16,15$ d) $R\$17,40$ e) $R\$19,20$

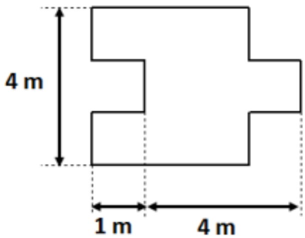
Problema 10. Se b e c são dois números naturais diferentes de zero, $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ e $\frac{b}{c}=\frac{3}{2}$, então $\frac{a}{c}$ é igual a:

a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{3}$

Problema 11. Maria disse para José: - Eu tenho o dobro da sua idade. José disse para João: - Eu tenho metade da sua idade, e João disse para Maria: - Daqui a 20 anos eu terei o quádruplo da idade que José tem hoje. Se todas as afirmações são verdadeiras, qual será a idade de José daqui a 20 anos?

a) 25 anos b) 27 anos c) 28 anos d) 30 anos e) 35 anos

Problema 12. Na figura abaixo, todos os segmentos do contorno são horizontais ou verticais:



Qual o perímetro da figura?

a) 16 m b) 18 m c) 20 m d) 22 m e) 24 m

Problema 13. Se a, b e c são os algarismos que tornam a conta de multiplicação abaixo:

$$\begin{array}{r} a\ b\ 7 \\ \times\ 2\ c \\ \hline 2\ 3\ 9\ 9\ 6 \end{array}$$

correta, então $a + b + c$ é igual a:

a) 12 b) 15 c) 18 d) 19 e) 21

Problema 14. Qual o algarismo das unidades do número 2013^{2015}?

a) 1 b) 2 c) 5 d) 7 e) 9

Problema 15. Por um defeito de fabricação, o teclado de uma calculadora científica veio com a sequência das teclas numéricas invertidas: A tecla 0 corresponde ao dígito 9, a tecla 1 corresponde ao dígito 8, a tecla 2 corresponde ao dígito 7, e assim por diante. Sem saber desse defeito, um aluno, para somar dois números, digitou a seguinte sequência $233 + 458 =$
Qual será o resultado apresentado pela calculadora?

a) 196 b) 691 c) 1186 d) 1307 e) 1087

Problema 16. Numa prova com 10 questões de múltipla escolha, a primeira questão vale 1 ponto, e a partir da segunda questão, cada uma vale o dobro de pontos da questão anterior. Se o aluno acertar a questão, recebe os pontos da questão, se ele errar, não ganha, nem perde os pontos da questão. Se João respondeu todas as questões e totalizou 161 pontos, podemos afirmar que:

a) ele acertou a quarta questão

b) ele errou a sétima questão

c) ele acertou a terceira questão

d) ele errou a sexta questão

e) ele acertou a quinta questão

Problema 17. Aproveitando uma promoção, Joãozinho foi a uma sorveteria que estava vendendo sorvetes de massa com três bolas, podendo ser escolhidas entre 4 sabores: Coco, Flocos, Morango e Chocolate. Se Joãozinho escolheu duas bolas de um mesmo sabor e uma bola de sabor diferente, de quantas maneiras ele pode ter escolhido seu sorvete?

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

Problema 18. Uma empresa resolveu aproveitar o final do ano para trocar os pneus dos seus 8 veículos. Se a empresa possui carros e motos, trocou os 5 pneus (incluindo o estepe) de cada carro e os dois pneus de cada moto, totalizando 31 pneus, quantos carros tem a empresa?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Problema 19. No lançamento de três dados honestos: um verde, um vermelho e um azul, de quantas maneiras o total de pontos obtidos pode ser igual a 15?

a) 2 b) 10 c) 9 d) 15 e) 24

Problema 20. Um caixa contém 2 moedas de $R\$1,00$, 3 moedas de $R\$0,50$ e 3 moedas de $R\$0,25$. Quantas moedas no mínimo devem ser retiradas da caixa para que se tenha certeza de ter tirado pelo menos $R\$2,00$?

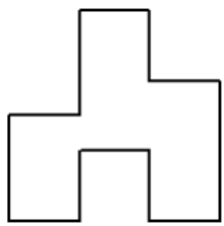
a) 2 b) 3 c) 5 d) 6 e) 7

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
e	b	a	c	d	d	c	a	e	d
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
c	d	b	c	d	d	e	e	b	e

Segunda Fase

Problema 1. A figura abaixo é um dodecágono (polígono de doze lados), cujos lados são horizontais ou verticais.



Nove lados medem $1cm$ cada um, dois lados medem $1{,}5cm$ cada um e um lado mede $2cm$. Qual a área deste polígono?

Problema 2. Determine o maior número natural x tal que o resto da divisão de 2018 por x é 2 e o resto da divisão de 2031 por x é 3.

Problema 3. João, Paulo e Fernando são amigos e possuem comportamentos bem diferentes em relação à prática de dizer a verdade: João sempre diz a verdade, Paulo nunca diz a verdade e Fernando nem sempre diz a verdade. Um deles é dentista, um é ator e o outro é músico. Cada um deles faz uma afirmação. O dentista diz: -João é o ator. O ator diz: -Eu sou Fernando. E o músico diz: -Paulo é o ator. Baseado nestas afirmações, quem é o dentista, quem é o ator e quem é o músico?

Problema 4. João e Maria trabalham juntos em uma mesma empresa. João trabalha cinco dias e folga um dia e Maria trabalha seis dias e folga um dia. Se no dia 19/10/2013, um sábado, ambos estão de folga, quando será a próxima data (dia, mês e ano) em que as folgas dos dois coincidirão novamente? Em que dia da semana isso ocorrerá?

Problema 5. Dada a sequência de sete números:

$$?,\ 3,\ 6,\ 11,\ 18,\ 29,\ ?$$

escreva uma regra que gere a sequência e determine o primeiro e o sétimo número.

Problema 6. Numa caixa havia algumas barras de chocolate. João retirou algumas barras da caixa e percebeu que ainda restaram 3/4 do número total de barras que havia no início. Então João retirou mais três barras da caixa. Se agora o número de barras de chocolate que restaram na caixa é 2/3 do número de barras que havia no início, quantas barras havia na caixa?

Problema 7. Um pintor leva $1,3h$ para pintar uma parede de $5m$ de comprimento por $3m$ de altura e gasta 3 litros de tinta. Se ao invés de um pintor, utilizássemos dois pintores igualmente rápidos e eficientes, em quantos minutos pintariam a parede e quantos litros de tinta utilizariam?

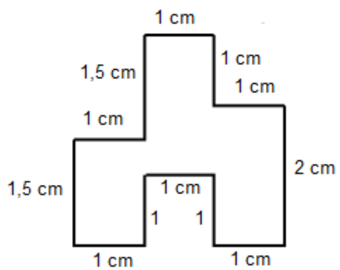
Problema 8. Preencha os quadrados com algarismos adequados para que a conta indicada esteja correta:

$$\begin{array}{rrrrr} & & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{} \\ & & \times & \boxed{} & \boxed{7} \\ \hline \boxed{2} & \boxed{} & \boxed{7} & \boxed{9} & \boxed{3} \end{array}$$

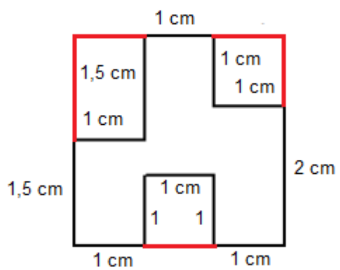
Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Gabriel Dalzoto Salles - Colégio Sagrada Família - São José)*

Sabendo que existe um lado de 2 cm, dois lados de 1,5 cm e 9 de 1 cm, a partir da escala da figura, conseguimos verificar quais lados possuem tais medidas:



Podemos verificar que, se fecharmos a figura em um retângulo, formamos um quadrado de lado 3 cm:



A área do quadrado completo será de $3 \times 3 = 9\ cm^2$.
Desta forma, para encontrarmos a área do polígono basta subtrair da área total do quadrado da soma das áreas que estavam faltando na figura, assim:

$9 - 1,5 - 1 - 1$
$7,5 - 1 - 1$

$6,5 - 1 = 5,5\ cm^2$

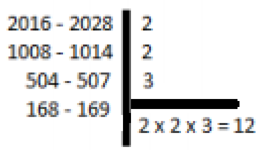
Logo, a área deste polígono mede $5,5\ cm^2$.

Problema 2. *(Resolução de João Pedro Wardani - Colégio Sagrada Família)*

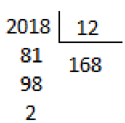
Como o enunciado do problema informa os restos deixados na divisão de 2018 e 2031 por x, podemos subtrair esses restos desses números. Assim:

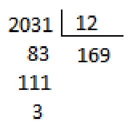
$2018 - 2 = 2016$
$2031 - 3 = 2028$

Após fazer a subtração, obtemos dois novos valores. Efetuando o cálculo do MDC entre esses valores podemos encontar o valor de x:



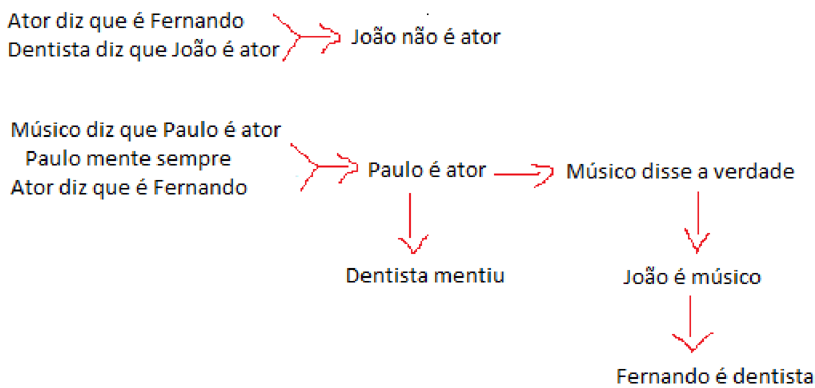
Fazendo a verificação, vemos que o valor de x é 12.





Problema 3. *(Resolução de João Pedro Wardani - Colégio Sagrada Família)*

Podemos analisar as afirmações dadas no problema através de diagramas:



Analisando e relacionando as informações, podemos concluir que Paulo é ator, João é músico e Fernando é dentista.

Problema 4. *(Resolução de Pedro Azevedo Fornazari - Colégio Sagrada Família)*

Calculando os dias e a folga, daria 6 dias para o João e 7 dias para a Maria. Fazendo o MMC entre 6 e 7 obtemos o resultado 42 ($2\times3\times7=42$). De acordo com o enunciado a folga ocorreu no dia 19 do mês de outubro, como outubro tem 31 dias podemos realizar a diferença entre o total de dias do mês de outubro e o dia da folga, ou seja, efetuar $31-19=12$. Como faltavam ainda doze dias para acabar o mês de outubro, podemos somar os dias restantes com o dia da folga, $19+12=30$, logo dia 30 será o dia da próxima folga e novembro será o mês, já que novembro tem 30 dias. Ademais, a folga seria em um sábado, pois ao dividir 42 por 7, $42\div7$, obtemos como resultado 6, o que significa que seriam passadas 6 semanas, o que daria no mesmo dia da semana em que os dois estavam de folga. Assim, a data da próxima folga será: 30/11/2013.

Problema 5. *(Resolução de Cassiano José Kounaris Fuziki - Colégio Pontagrossense Sepam)*

A partir do número 1, pode-se observar que são adicionados números primos progressivamente, de forma crescente, ou seja, números primos que cada vez são maiores, exemplo:

Desta forma, 13 seria o próximo número primo a somar com 29, resultando na sequência:

$$1, 3, 6, 11, 18, 29, 42.$$

Sendo 1 o primeiro número da sequência e 42 o sétimo.

Problema 6. *(Resolução de Nathan Nabozny - Escola Elite Tales de Mileto)*

Sabendo que 3/4 do número total de barras menos 3 equivale a 2/3 do número de barras iniciais, e representando o número de barras iniciais por x, obtemos a equação:

$$\left(\frac{3x}{4}\right) - 3 = \left(\frac{2x}{3}\right)$$

a qual resolvendo, obtemos:

$$\left(\frac{3x}{4}\right) - 3 = \left(\frac{2x}{3}\right)$$

$$\left(\frac{3x}{4}\right) - 3 = \left(\frac{2x}{3}\right)$$

$$\left(\frac{9x-36}{12}\right) = \left(\frac{8x}{12}\right)$$

$$x = 36.$$

A equação resolvida, nos mostra que o número de barras iniciais era 36.

Problema 7. *(Resolução de João Pedro Wardani - Colégio Sagrada Família)*

Pelo enunciado do problema um pintor leva 1,3 horas para pintar uma parede, logo, 2 pintores levariam a metade do tempo para pintar a mesma parede, ou seja, dois pintores levariam 0,65 horas. Fazendo a conversão de horas para minutos temos:

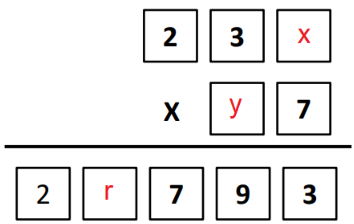
Horas	Minutos
1h	60 min
0,65h	x

$x = 60 \times 0,65 = 39\ min$

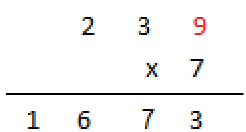
Como são em dois pintores, cada um gastaria 1,5L de tinta, já que um pintor sozinho gasta 3L.
Logo, dois pintores pintariam a parede em 39 minutos e no total, também utilizariam 3 litros de tinta.

Problema 8. *(Resolução de Nathan Nabozny - Escola Elite Tales de Mileto)*

Inicialmente chamaremos os algarismos que estão faltando de x, y e r, como na figura abaixo:

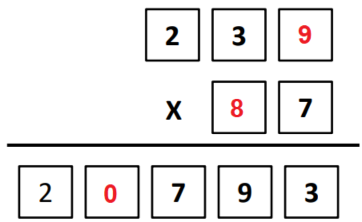


Sabe-se que o número x deve ser algum algarismo que multiplicado por 7 deve resultar em 3, obtendo facilmente que x é igual a 9, então resolve-se o início da multiplicação normalmente.



Após isso, sabe-se que y deve ser igual a um número que multiplicado por 9 tenha o último algarismo igual a 2 (de acordo com o início da conta), obtendo que y é igual a 8 e como resultado r é igual a 0.

Assim, após encontrar que os valores são $x = 9$, $y = 8$ e $r = 0$, a figura com os quadrados preenchidos ficaria da seguinte forma:



1ª OPM - Nível 2

Primeira Fase

Problema 1. Quantas soluções inteiras; isto é, quantos pares ordenados (x, y) de números inteiros, satisfazem a equação $5x^2 + 5y^2 + 6x + 2y = 98$:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Problema 2. Brincando com uma calculadora, um aluno, ao dividir um número natural n por 3, obteve quociente x e resto 1. Continuando a brincadeira, o aluno dividiu x por 3 e obteve quociente y e resto 2. E repetindo o processo mais uma vez, o aluno dividiu y por 3 e obteve quociente z e resto 0. Pode-se então afirmar que se o aluno dividir n por 27, o quociente e o resto serão respectivamente:

a) $x + y + z$ e 0

b) z e 0

c) z e 7

d) $x + y$ e 3

e) $x + y + z$ e 3

Problema 3. Dados três números inteiros positivos a, b e c, distintos, e menores ou iguais a 9, e se N é a soma de todos os números inteiros de três algarismos distintos que podem ser construídos com os números a, b e c, pode-se afirmar que:

a) N pode ser um quadrado perfeito

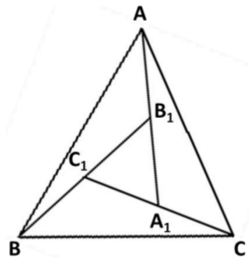
b) N é múltiplo de 9

c) O quociente da divisão de N por 36 pode ser 37

d) O maior valor possível para N é 5994

e) N pode ser 444

Problema 4. Na figura abaixo, a área do triângulo ABC é $14m^2$; os vértices A, B e C estão nos prolongamentos dos segmentos A_1B_1, B_1C_1 e $C1A_1$, respectivamente, AB_1=B_1A_1, $BC_1 = C_1B_1$ e $CA_1 = A_1C_1$. Pode-se então afirmar que a área do triângulo $A_1B_1C_1$ é:



a) $2m^2$ b) $2{,}5m^2$ c) $3m^2$ d) $3{,}25m^2$ e) $3{,}75m^2$

Problema 5. Observando o movimento dos ponteiros de um relógio, Joãozinho percebeu que em alguns momentos os ponteiros das horas e dos minutos ficavam sobrepostos. Se Joãozinho anotou a posição em que ocorreu a primeira sobreposição depois das 14h00, a posição do ponteiro das horas às 14h20min, e calculou corretamente o menor ângulo central compreendido entre essas duas posições, ele obteve aproximadamente:

a) $10^0\ 30'\ 20''$

b) $8^0\ 20'\ 36''$

c) $5^0\ 22'\ 36''$

d) $4^0\ 32'\ 44''$

e) $3^0\ 28'\ 36''$

Problema 6. Igual ao Problema 6 do Nível 1.

Problema 7. Simplificando a expressão $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{10}}$ obtemos:

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 0 d) $\dfrac{1}{15}$ e) $\dfrac{4}{15}$

Problema 8. Igual ao Problema 4 do Nível 1.

Problema 9. Igual ao Problema 16 do Nível 1.

Problema 10. Num corredor existem 20 portas enfileiradas e numeradas, em sequência, de 1 a 20. Num certo momento as 10 primeiras portas estão abertas e as 10 últimas estão fechadas. João deve alterar os estados das portas cujo número é par, fechando as que estão abertas e abrindo as que estão fechadas. Em seguida, Maria deve alterar os estados das portas cujo número é múltiplo de 3. E por último, Fernando deve alterar os estados das portas cujo número é múltiplo de 5. Terminadas todas as alterações, quantas portas estarão fechadas?

a) 10 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

Problema 11. Igual ao Problema 9 do Nível 1.

Problema 12. Igual ao Problema 10 do Nível 1.

Problema 13. Uma caixa contém 5 cartões numerados com números naturais distintos e não nulos. Ordenando esses números em ordem crescente, verifica-se que os três números centrais são consecutivos e o número central é a média aritmética entre o primeiro e o último número; isto é, a metade da soma do primeiro com o último número. Se a soma dos 5 números é 25 e apenas um dos 5 números é múltiplo de 3, então:

a) a soma dos três últimos números é 15

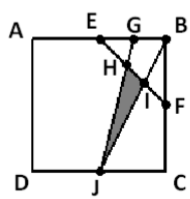
b) a soma dos primeiros números é 11

c) um dos cinco números é múltiplo de 9

d) apenas um dos cincos números é primo

e) nenhum dos números é múltiplos de 8

Problema 14. Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de lado 2m, E, F e G são os pontos médios dos segmentos AB, BC e EB, respectivamente, e os pontos H e I são as intersecções do segmento EF com os segmentos GJ e BJ, respectivamente:



Qual a área do triângulo HIJ?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{4}{15}$

Problema 15. O produto dos divisores positivos de 2013^{2012} é:

a) 2013^{2012}

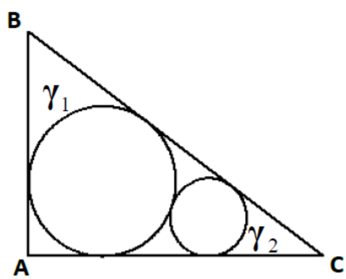
b) 2012^{2013}

c) $2013^{(1006.2013^3)}$

d) $2013^{(503.2012^3)}$

e) $2013^{2012}.2012^{2013}$

Problema 16. Na figura abaixo, temos um triângulo retângulo ABC, retângulo em A, e duas circunferências: γ_1 e γ_2. A circunferência γ_1 é tangente aos três lados do triângulo, e a circunferência γ_2 aos lados AC e BC e à circunferência γ_1.



Se AB=3m e AC=4m, qual a medida do raio da circunferência γ_2?

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}m$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}m$ c) $\frac{2\sqrt{7}-5}{2}m$ d) $\frac{1}{2}m$ e) $\frac{11-2\sqrt{10}}{9}m$

Problema 17. No tabuleiro 4×4 abaixo, devem ser escritos os números naturais de 1 a 16, de tal forma que a soma dos números colocados em cada linha, coluna ou diagonal seja sempre a mesma. Alguns desses números já estão inseridos no tabuleiro:

1			**4**
A			**B**
	C	**D**	
13			**16**

Após o preenchimento completo do tabuleiro, os números inseridos nas posições A, B, C, D e E são tais que:

a) A + C = B + D

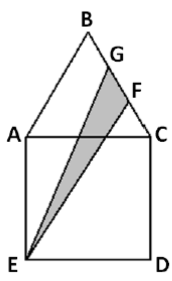
b) A + B = C + D

c) A = 2D

d) C = 2B

e) D = A + B + C

Problema 18. Na figura abaixo, ABC é um triângulo equilátero e ACDE é um quadrado, ambos de lado 3m.



Se BG = GF = FC, qual a medida da área do triângulo EFG?

a) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}m^2$

b) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}m^2$

c) $\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}m^2$

d) $\dfrac{3\sqrt{3}+3}{4}m^2$

e) $\dfrac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{8}m^2$

Problema 19. Igual ao Problema 13 do Nível 1.

Problema 20. Quantos divisores positivos tem o número 111111 (seis algarismos iguais a 1)?

a) 3 b) 5 c) 12 d) 32 e) 128

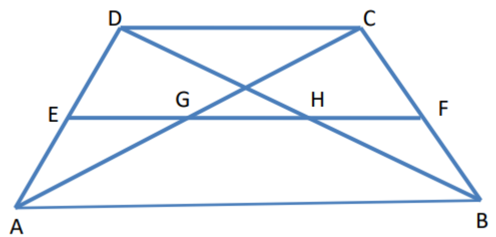
Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
d	c	d	c	a	a	b	e	a	b
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
d	c	b	e	c	e	b	e	d	d

Segunda Fase

Problema 1. Determine o maior número natural x tal que o resto da divisão de 2018 por x é 2 e o resto da divisão de 2031 por x é 3.

Problema 2. A figura ABCD é um trapézio onde $\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{BC} = 4$ e $\overline{AB} = 8$. Calcule o perímetro da figura ABHG, sabendo que $\overline{AE} = \overline{ED} = \overline{BF} = \overline{FC}$.



Problema 3. João, Paulo e Maria colecionam selos. Se Maria tivesse dez selos a mais, teria 1/3 do número de selos de João e cinco selos a mais do que Paulo. Se juntos os três possuem 135 selos. Quantos selos tem cada um?

Problema 4. Aproveitando um exercício da primeira fase, considere 60 portas numeradas de 1 a 60, estando alternadamente abertas ou fechadas: a primeira está fechada, a segunda está aberta, a terceira está fechada, e assim sucessivamente. Inicialmente João altera os estados das portas cujo número é um múltiplo de 3, abrindo as que estão fechadas e fechando as que estão abertas. A seguir Fernando faz o mesmo com as portas cujo número é um múltiplo de 5. Concluídas as alterações feitas por João e Fernando, quantas portas estarão fechadas e quantas estarão abertas?

Problema 5. Um professor de matemática escreve seis números naturais não nulos e distintos em um caderno e faz as seguintes afirmações, todas verdadeiras, a respeito deles:

- Estão escrito três números primos, três números ímpares e três números pares.
- Apenas um dos seis números é múltiplo de 3.
- A média aritmética dos três pares é 12.

- Nenhum deles é maior que 21.
- A média aritmética dos três primos é 6.
- Apenas um dos seis números é múltiplo de 5.
- Nenhum deles é múltiplo de 7.

Quais são estes números?
Observação: A média aritmética de três números é o resultado da divisão da soma dos três números por 3. Por exemplo, a média aritmética dos números 2, 4 e 9 é igual a 5, pois $\frac{2+4+9}{3} = 5$.

Problema 6. Numa certa comunidade todas as pessoas possuem um comportamento bastante estranho quando fazem alguma afirmação, ou sempre mentem ou sempre dizem a verdade. Num certo dia, João, Paulo e Maria, que são primos, se encontram para comemorar o aniversário de um deles. Acontece que apenas um dos primos não é da comunidade, e esse algumas vezes diz a verdade, algumas vezes mente. De repente começam a discutir sobre um fato na infância deles. Então João disse: -Eu me lembro! Foi o seu Zeca que pintou o porquinho de azul, e vocês sabem que eu não sou daqui da comunidade. E então Maria disse: -Deixa o Paulo falar, porque ele que não é daqui, é mais confiável. Então Paulo disse: -Espera aí! Algumas vezes vocês dizem a verdade. Baseado nestas falas pode-se concluir qual dos três não é da comunidade. Quem é? Justifique!

Problema 7. Considere a sequência $(1, 3, 7, 15, 31, \ldots)$

a) Determine o décimo termo da sequência.

b) Determine o n-ésimo termo da sequência.

Problema 8. Num triângulo retângulo um ângulo agudo mede a metade do outro e o menor cateto mede $25cm$. Determine o perímetro e a área desse triângulo.

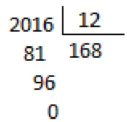
Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Bruno Gabriel Telles - Colégio Sagrada Família)*

$2018 - 2 = 2016$. Com essa conta, se encontra um número pertencente à tabuada do número x

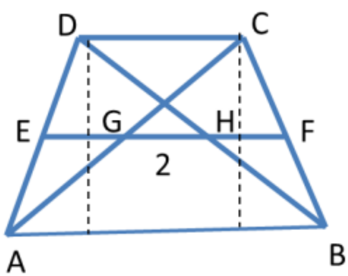
$2031 - 3 = 2028$. Agora já tenho dois números da tabuada do x.

Verifica-se que a diferença entre estes dois números é 12, ou seja, $x \leq 12$.



Observando que 2016 e 2018 são da tabuada do 12, ou seja, a divisão de 2016 e 2018 por 12 deixa resto zero, para as possibilidades de $x \leq 12$, o maior valor em que isso ocorre é com o 12.

Problema 2. *(Resolução da Pauta)*



Cálculo da altura do trapézio ABCD:
$h^2 = 16 - 4 \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow h = \sqrt{12}$.

Cálculo da diagonal do trapézio ABCD:
$d^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow d^2 = 48 \Rightarrow d = \sqrt{48}$.

Cálculo da metade da diagonal do trapézio ABCD:
$AG = BH = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{48}}{2}$.

Trapézio ABGH:
Base maior: 8
Base menor: $\frac{8-4}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Logo, o perímetro do trapézio é:

$P = 2 + 8 + \frac{\sqrt{48}}{2} + \frac{\sqrt{48}}{2}$
$P = 10 + \sqrt{48}$
Simplificando a raiz, obtemos:
$P = 10 + 4\sqrt{3}$.

Problema 3. *(Resolução de Kawane Rafaela Rodrigues - Colégio Pontagrossense Sepam)*

m = Maria p = Paulo j = João
$m + 10 = \frac{1j}{3}[1]$
$m + 10 = p + 5[2]$
$m + j + p = 135[3]$

Multiplicando ambos os lados por 3 em [1], obtemos:
$3m + 30 = j$
Separando incógnitas em um membro e valores numéricos em outro membro em [2] temos: $m - p = -5$

Com essas equações podemos montar dois sistemas, o primeiro sistema será:

$$\begin{cases} 3m + 30 & = j \\ m + 10 & = p + 5 \\ m + j + p & = 135 \end{cases}$$

E o segundo:

$$\begin{cases} 3m - j & = -30 \\ m - p & = -5 \\ m + j + p & = 135 \end{cases}$$

Resolvendo o segundo sistema, somando as três equações, conseguimos encontrar o valor de m:

$$\begin{cases} 5m & = -35+135 \\ m & = \frac{100}{5} \\ m & = 20 \end{cases}$$

Substituindo $m = 20$ na primeira e na segunda equação do primeiro sistema montado, conseguimos descobrir os valores de j e p.
Na primeira equação temos:

$$\begin{cases} 20 \times 3 + 30 & = j \\ 60 + 30 & = j \\ 90 = j \end{cases}$$

E na segunda:

$$\begin{cases} 20 + 10 & = p + 5 \\ 30 - 5 & = p \\ p & = 25 \end{cases}$$

Logo, Maria tem 20 selos, Paulo tem 25 e João 90.

Problema 4. *(Resolução de Gabriela de Carvalho Furia - Colégio Pontagrossense Sepam)*

$[I]$ 60 portas, dessas 30 abertas (pares) e 30 fechadas (ímpares).
$[II]$ As portas múltiplas de 3 alteram seus estados, ou seja, continuam 30 abertas e 30 fechadas, mas não mais em sequência, pois 10 pares e 10 ímpares se alteraram.
$[III]$ As portas múltiplas de 5 alteram seus estados, ou seja, 12 portas alterarão seu estado (6 pares e 6 ímpares) e ficarão 30 portas abertas e 30 portas fechadas.
Conclusão: o número de portas abertas e fechadas não se altera (30), apenas a sequência de uma fechada seguida por uma aberta é desfeita.

Observação: para descobrir o número de portas que irão alterar o seu estado é só dividir o número de portas pelo número cujos múltiplos serão alterados. Ex: mudar o estado dos múltiplos de 2, $60 \div 2 = 30$, portas que vão mudar de estado.

Problema 5. *(Resolução de Gustavo L. Levandossi - Escola Estadual Medalha Milagrosa)*

Denotando os seis números naturais escritos como a, b, c, d, e e f, podemos obter que:

Um dos números primos deve ser 2, pois somente 2 é par e é primo ao mesmo tempo, e como 3 números ímpares somados resultam em um número ímpar e a soma dos três primos é 18, segue também que um dos primos é 2. Denominando $d = 2$, e e f só podem ser 16 e 18 (para somar 36) pois 14 não pode, porque é múltiplo de 7, restando só eles. Como d é 2, b e c só podem ser 5 e 11 os único números primos fora 7 que somados com a dão 18. Restando o 2. Como vimos lá em cima somente um número pode ser múltiplo de 3 mas já achamos 18, então eliminamos todos os múltiplos de 3, restando 1, 13, 17, 19 (como vemos temos 3 pares e 2 ímpares até agora, 2 só pode ser ímpar). Como já temos três primos e 13, 17 e 19 são primos. Logo, estes números são 1, 2, 5, 11, 16, 18.

Problema 6. *(Resolução de Gabriela de Carvalho Furia - Colégio Pontagrossense Sepam)*

João não é da comunidade, pois Paulo mentiu ao afirmar que os $\underline{dois}$ algumas vezes falam a verdade e isso não seria possível já que só uma pessoa, a que não é da comunidade, às vezes fala a verdade e às vezes não. Maria é da comunidade pois mente ao dizer que Paulo (que mentiu também) não é da comunidade, logo, apenas João falou a verdade a respeito de não ser da comunidade.

Problema 7. *(Resolução da Pauta)*

a) Os termos da sequência são escritos da seguinte forma:

1º termo: $1 = 2^1 - 1$

2º termo: $3 = 2^2 - 1$

3º termo: $7 = 2^3 - 1$

4º termo: $15 = 2^4 - 1$

5º termo: $31 = 2^5 - 1$

6º termo: $2^6 - 1 = 63$

7º termo: $2^7 - 1 = 127$

8º termo: $2^8 - 1 = 255$

9º termo: $2^9 - 1 = 511$

Logo, o 10º termo é:

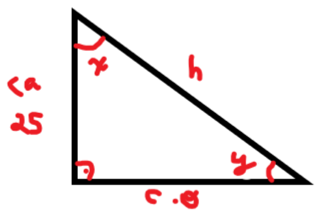
10º termo = $2^{10} - 1 = 1023$.

b) O n-ésimo termo da sequência será:

nº termo = $2^n - 1$.

Problema 8. *(Resolução de Kawane Rafaela Rodrigues - Colégio Pontagrossense Sepam)*

Inicialmente, esboçamos o triângulo retângulo:



Da figura, podemos determinar os seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = y \\ x + y = 90 \end{cases}$$

Que é equivalente ao sistema linear:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 90 \end{cases}$$

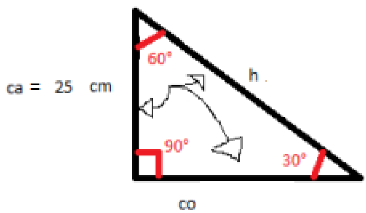
Resolvendo o sistema temos:

$$\begin{cases} 2y + y & = 90 \\ 3y & = 90 \\ y & = 30 \end{cases}$$

Substituindo $y = 30$ em $x + y = 90$ conseguimos descobrir o valor de x, assim:

$$\begin{cases} x+30 & = 90 \\ x & = 90-30 \\ x & = 60 \end{cases}$$

Descobertos os ângulos do triângulo, fazemos uma novo esboço da figura:

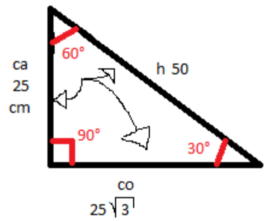


Para encontrar as medidas do cateto oposto e da hipotenusa do triângulo, podemos utilizar as relações trigonométricas $\dfrac{co}{ca} = tg\ \theta$ e $\dfrac{ca}{h} = cos\ \theta$, onde co = cateto oposto, ca = cateto adjacente e h = hipotenusa. Desta forma:

$$tg(60°) = \frac{x}{25}$$
$$\sqrt{3} = \frac{x}{25}$$
$$x = 25\sqrt{3}$$

$$cos(60°) = \frac{25}{h}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{25}{h}$$
$$h = 50$$

Com a medida dos catetos e da hipotenusa, temos a seguinte figura:



Logo, o perímetro desse triângulo será:

$$P = 25 + 50 + 25\sqrt{3}$$
$$P = 75 + 25\sqrt{3}\ m$$

E a sua área:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$
$$A = \frac{25\sqrt{3} \times 25}{2}$$
$$A = \frac{625\sqrt{3}}{2}\ cm^2$$

1ª OPM - Nível 3

Primeira Fase

Problema 1. Igual ao Problema 1 do Nível 2.

Problema 2. Brincando com uma calculadora, um aluno, ao dividir um número natural n por 3, obteve quociente x e resto 1. Continuando a brincadeira, o aluno dividiu x por 3 e obteve quociente y e resto 2. E repetindo o processo mais uma vez, o aluno dividiu y por 3 e obteve quociente z e resto 0. Pode-se então afirmar que se o aluno dividir n por 27, o quociente e o resto serão respectivamente:

a) $x+y+z$ e 0

b) z e 7

c) $x+y$ e 3

d) z e 0

e) $x+y+z$ e 3

Problema 3. Igual ao Problema 4 do Nível 2.

Problema 4. Igual ao Problema 5 do Nível 2.

Problema 5. Igual ao Problema 3 do Nível 2 e Problema 2 do Nível 1.

Problema 6. Um corpo em queda livre, a partir do repouso (velocidade zero), percorre em cada segundo da queda, distâncias proporcionais aos números ímpares consecutivos; isto é, se no primeiro segundo ele percorreu x metros, no segundo ele percorreu 3x metros, no terceiro, 5x metros, e assim sucessivamente. Se a partir de uma altura h do solo, um corpo, inicialmente em repouso, cai em queda livre, percorrendo 5m no primeiro segundo e gastando $5-2\sqrt{5}$s para percorrer o último quinto da altura inicial h, qual o valor de h?

a) $45m$ b) $60m$ c) $80m$ d) $100m$ e) $125m$

Problema 7. Igual ao Problema 6 do Nível 2 e Problema 3 do Nível 1.

Problema 8. Seja S = 1 + 11 + 111 + 1111+ .... + 1111 .... 111, onde a última parcela contém 99 algarismos, todos iguais a 1. Se T = 81S + 901, então:

a) $T = 10^{100}$

b) $T = \dfrac{10^{100}-1}{9}$

c) $T = 10^{100}-1$

d) $T = \dfrac{10^{99}-1}{9}$

e) $T = 10^{99}-1$

Problema 9. Sabendo que $log_3 2 = a$ e $log_7 6 = b$, então $log_{21} \dfrac{81}{343}$ é igual a:

a) $\dfrac{a}{b}$

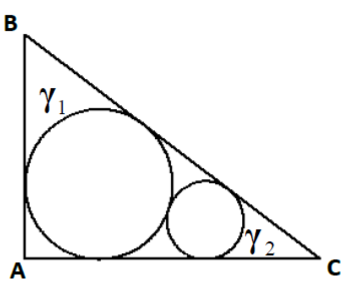
b) $\dfrac{a+1}{b}$

c) $\dfrac{4b-3a-3}{a+b+1}$

d) $\dfrac{2b-3a+1}{a+b-1}$

e) $\dfrac{b}{a+1}$

Problema 10. Na figura abaixo, temos um triângulo retângulo ABC, retângulo em A, e duas circunferências: γ_1 e γ_2. A circunferência γ_1 é tangente aos três lados do triângulo, e a circunferência γ_2 aos lados AC e BC e à circunferência γ_1.



Se AB=3m e AC=4m, qual a medida do raio da circunferência γ_2?

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$m

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$m

c) $\dfrac{2\sqrt{7}-5}{2}$m

d) $\dfrac{11-2\sqrt{10}}{9}$m

e) $\dfrac{1}{2}$m

Problema 11. Um leitor estabelece como rotina para ler seus livros, as seguintes regras: toda vez que começa a ler um livro, lê todo dia algumas páginas, até terminar a leitura; no primeiro dia lê as 10 primeiras páginas e, a partir do segundo, relê as duas últimas páginas do dia anterior e mais 8 páginas. Mantendo essa rotina, se o leitor começar a ler um livro, com páginas numeradas de 1 a 230, no dia 01/07/2013, em que dia lerá a página 98 pela segunda vez?

a) 10/07/2013

b) 11/07/2013

c) 12/07/2013

d) 13/07/2013

e) 02/08/2013

Problema 12. Sabendo que $x = 2$ é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + ax^3 + bx^2 - 12x + 36 = 0$, qual o valor da soma $a + b$?

a) -7 b) 8 c) 9 d) -9 e) 10

Problema 13. Num corredor existem 100 portas enfileiradas e numeradas, em sequência, de 1 a 100. Num certo momento as 50 primeiras portas estão abertas e as 50 últimas estão fechadas. João deve alterar os estados das portas cujo número é par, fechando as que estão abertas e abrindo as que estão fechadas. Em seguida, Maria deve alterar os estados das portas cujo número é múltiplo de 3. E por último, Fernando deve alterar os estados das portas cujo número é múltiplo de 5. Terminadas todas as alterações, quantas portas estarão fechadas?

a) 28 b) 36 c) 40 d) 45 e) 56

Problema 14. No lançamento simultâneo de três dados honestos, um verde, um vermelho e um azul, quais resultados (número total de pontos) possuem a maior probabilidade de ocorrer ?

a) 7 e 8 b) 9 e 10 c) 10 e 11 d) 12 e 13 e) 14 e 15

Problema 15. Igual ao Problema 13 do Nível 2.

Problema 16. Considere as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, \text{se } x \leq 2 \\ 3-x, \text{se } x > 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 3-x, \text{se } x \leq 2 \\ x-1, \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Assinale a alternativa que contém a função h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(g(x-1))$:

a) $h(x) = \begin{cases} 3-x, \text{se } x \leq 3 \\ 6-2x, \text{se } x > 3 \end{cases}$

b) $h(x) = \begin{cases} 3-x, \text{se } x \leq 2 \\ 2x-3, \text{se } x > 2 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} x-1, \text{se } x < 2 \\ 3-x, \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ x-3, \text{se } 3 < x \leq 4 \\ 5-x, \text{se } x > 4 \end{cases}$

d) $h(x) = \begin{cases} 3 - x, \text{se } x < 2 \\ x - 1, \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ 5 - x, \text{se } 3 < x \leq 4 \\ 2x - 1, \text{se } x > 4 \end{cases}$

e) $h(x) = \begin{cases} x - 1, \text{se } x < 2 \\ 3 - x, \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ 2x - 6, \text{se } 3 < x \leq 4 \\ 6 - x, \text{se } x > 4 \end{cases}$

Problema 17. Igual ao Problema 14 do Nível 2.

Problema 18. Igual ao Problema 15 do Nível 2.

Problema 19. Uma matriz quadrada é ortogonal, se ela for invertível e sua inversa for igual à sua transposta. Se A é uma matriz ortogonal de ordem n, A_i é a matriz 1xn corresponde à i-ésima linha de A e $A_i.A_j = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + ... + a_{in}a_{jn}$ é a soma dos produtos ordenados dos elementos da i-ésima linha pelos elementos da j-ésima linha de A, pode-se afirmar que:

a) $A_i.A_j = 1, i \neq j$

b) $A_i.A_j = 1, i = j$

c) $A_i.A_j = 0, i = j$

d) $A_i.A_j = -1, i \neq j$

e) $A_i.A_j = -1, i = j$

Problema 20. Dizemos que a sequência $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, é uma progressão aritimética de segunda ordem, se a sequência $b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$, definida por: $b_k = a_{k+1} - a_k, k \geq 1$, for uma progressão aritmética. Portanto, sabendo que a sequência: 2, 5, 11, 20, 32$\cdots$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, qual o centésimo termo essa sequência?

a) 50000 b) 42800 c) 29900 d) 15050 e) 14852

Gabarito da Primeira Fase

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	b	a	d	e	e	b	a	c	d
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
d	d	d	c	c	b	c	e	e	b

Segunda Fase

Problema 1. Num triângulo retângulo ABC, reto em A, considere os segmentos AE, altura relativa à hipotenusa BC, ED, perpendicular ao cateto AB, com o ponto D em AB, e EF, perpendicular ao cateto AC, com o ponto F em AC. Se o quadrilátero ADEF é um quadrado e a área da cincunferência inscrita no mesmo é $\frac{18\pi}{25}cm^2$, determine a área do triângulo ABC.

Problema 2. Aproveitando um exercício da primeira fase, considere 100 portas numeradas de 1 a 100, estando alternadamente abertas ou fechadas: a primeira está fechada, a segunda está aberta, a terceira está fechada, e assim sucessivamente. Inicialmente João altera os estados das portas cujo número é um múltiplo de 3, abrindo as que estão fechadas e fechando as que estão abertas. A seguir Fernando faz o mesmo com as portas cujo número é um múltiplo de 5 e Maria, o mesmo com as portas cujo número é múltiplo de 7. Concluídas as alterações feitas por João, Fernando e Maria, quantas portas estarão fechadas e quantas estarão abertas?

Problema 3. Um professor de matemática escreve seis números naturais não nulos e distintos em um caderno e faz as seguintes afirmações, todas verdadeiras, a respeito deles:

a) Estão escrito três números primos, três números ímpares e três números pares.

b) Apenas um dos seis números é múltiplo de 3.

c) A média aritmética dos três pares é 12.

d) Nenhum deles é maior que 21.

e) A média aritmética dos três primos é 6.

f) Apenas um dos seis números é múltiplo de 5.

g) Nenhum deles é múltiplo de 7.

Quais são estes números?

Problema 4. Seja γ uma circunferência de raio R e centro C.

a) Se P é um ponto exterior a γ e r uma reta que passa por P, mostre que se r é tangente a γ num ponto T, então: $PT^2 = PC^2 - R^2$.

b) Se P é interior à circunferência γ e a intercepta nos pontos A e B, ou P pertence a γ, então: $PA \cdot PB = R^2 - PC^2$

Problema 5. Um achocolatado é vendido em dois tipos de embalagens: uma em forma de paralelepípedo retângulo de altura πh e base quadrada de lado da base a, a segunda embalagem tem forma de um cilindro circular reto de altura $2h$ e diâmetro a. A primeira embalagem é vendida por $R\$6,00$ e a segunda é vendida por $R\$3,20$, qual a embalagem mais vantajosa para o comprador?

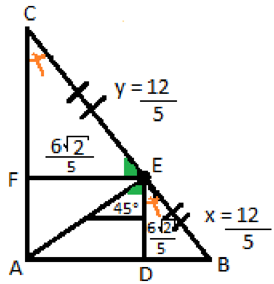
Problema 6. Lançamos um dado duas vezes. Seja n_1 o número de pontos obtidos no primeiro lançamento e n_2 o número de pontos obtidos no segundo lançamento. Qual a probabilidade da razão $\frac{n_2}{n_1}$ ser um número natural?

Problema 7. Seja A o conjunto dos números naturais x tais que o resto da divisão de 2018 por x é 2 e o resto da divisão de 2031 por x é 3. Quantos elementos tem o conjunto A?

Problema 8. Num terreno serão plantadas 120 árvores de uma determinada fruta. Espera-se que cada árvore produza em média 400 frutas. Nesse mesmo terreno, para cada árvore adicional plantada espera-se, em média, um rendimento de duas frutas a menos por árvore. Qual será o número de árvores adicionais a serem plantadas para que o pomar produza o máximo de frutas? Qual é essa produção máxima?

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Matheus Grabin Kovalski - Colégio Neo Master)*



$A_c = \pi r^2$
$\pi r^2 = \frac{18}{25}\pi$
$R = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{25}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

$L_D = AF = 2 \cdot R = \frac{6\sqrt{2}}{5}$

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$x \cdot \cos 45° = \frac{6\sqrt{2}}{5}$
$\frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$
$5x = 12$
$x = \frac{12}{5} cm$

$x = y$
$y = \frac{12}{5} cm$

$d =$ diagonal do quadrado $= l\sqrt{2}$
$d = \frac{6\sqrt{2}}{5} \cdot \sqrt{2} = \frac{12}{5}$cm

$S_{\triangle} =$ área do triângulo $= \frac{1}{2}.B.h = \left(\frac{12}{5} + \frac{12}{5}\right) \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{2}$
$= \frac{24}{5} \cdot \frac{12}{10}$
$= \frac{288}{50}$

$= 2,88 \cdot 2$
$= 5,76cm^2$

Resposta: A área do triângulo ABC mede 5,76cm^2.

Problema 2. *(Resolução de Gustavo Gomes Papi - Colégio Neo Master)*

Inicialmente temos que as portas estão da seguinte forma:

f = fechada, a = aberta

1 f, 2 a, 3 f, 4 a, 5 f, 6 a, ..., e assim por diante

Portas indicadas com números pares estão abertas, já as com números ímpares estão fechadas.

Para encontrar a quantidade de portas abertas e fechadas, vamos analisar separadamente os múltiplos de 3, 5 e 7. Começando pelos múltiplos de 3, temos:

Múltiplos de 3 até 100 → 33, ou seja, encontramos 33 múltiplos de 3, onde 17 são ímpares e 16 são pares.

Inicialmente tínhamos 50 portas abertas e 50 fechadas, após a alteração feita por João ficamos com 51 portas abertas e 49 fechadas.

Múltiplos de 5 até 100 → 20. Desses 20 múltiplos de 5, 10 são pares e 10 são ímpares. Dos pares, 3 portas serão abertas e 7 fechadas e dos ímpares 3 portas serão fechadas e 7 serão abertas.

15 a, 30 f, 45 a, 60 f, 75 a, 90 f

Após a primeira alteração tínhamos 51 portas abertas e 49 fechadas.

Depois da alteração realizada por Fernando, continuamos com 51 portas abertas e 49 fechadas.

Múltiplos de 7 até 100 → 14. Desses, 7 são ímpares com 3 portas fechadas e 4 abertas e 7 são pares, dos quais 3 portas serão abertas e 4 fechadas.

21 a, 35 a, 42 f, 63 a, 70 f, 84 f

Após a alteração feita por Fernando tínhamos 51 portas abertas e 49 fechadas.
A alteração realizada por Maria, não alterou o número de portas abertas e fechadas, assim permaneceram 51 abertas e 49 fechadas.

Logo, após as três alterações 51 portas estarão abertas e 49 estarão fechadas.

Problema 3. *(Resolução de Camila Varotto Baroncini - Colégio Marista Pio XII)*

Analisando as informações dadas temos:

- Seis números naturais não nulos e distintos (3 pares, 3 ímpares e 3 primos).
- Nenhum maior que 21.
- Nenhum múltiplo de 7.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \underline{14}, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \underline{21}$$

- Três primos entre $\{2, 3, 5, \underline{7}, 11, 13, 17, 19, 21\}$.

Como pelo enunciado a média dos primos deve ser 6, então a soma desses três primos deve ser 18, e assim eliminamos 17 e 19. 11, 5, 2 ou 13, 3, 2 → um dos números é 2 (par e primo).

- Três pares incluindo 2 $\{2, 4, 6 \ldots 20\}$.

Como a média é 12, a soma total é 36, que subtraindo o número 2, resulta que a soma dos outros dois é 34.
18, 16 é a única possibilidade (14 e 20 não pode) ⇒ 18 e 16.

- Apenas um é múltiplo de 3 → é o 18.

Única possibilidade dos três primos é 11, 5, 2 ⇒ 11 e 5.

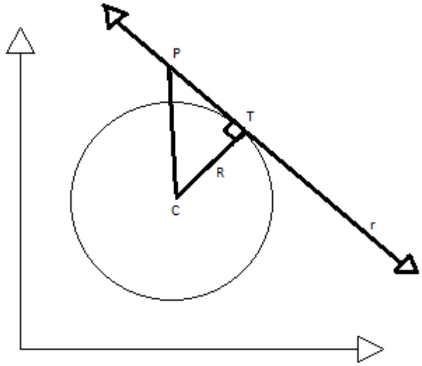
- Apenas um é múltiplo de 5 → é o 5.

- Eliminando-se do conjunto inicial os demais números primos, números pares, múltiplos de 3 e 5, o único número que resta é 1 (que não é considerado primo).

Assim, os seis números são: 1, 2, 5, 11, 16 e 18.

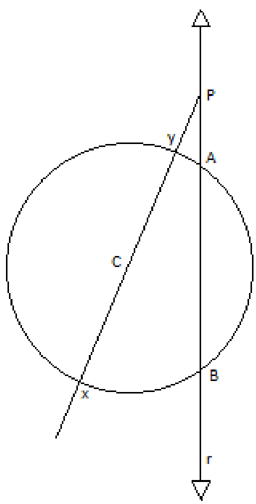
Problema 4. *(Resolução de Thaís Carolina Klepa - Colégio Sagrada Família)*

a) A partir do enunciado, podemos esboçar a figura abaixo:



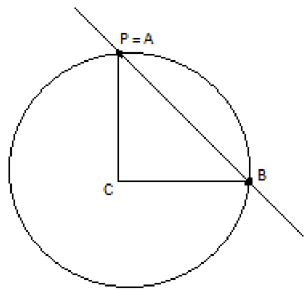
Uma reta tangente a circunferência forma ângulo reto com o seu raio no ponto de tangência.
Sendo assim, pela relação de Pitágoras:

$PC^2 = PT^2 + R^2$, logo
$PT^2 = PC^2 - R^2$



$Px = PC + R$
$Py = PC - R$
$PA \cdot PB = Py \cdot Px$
$PA \cdot PB = (PC - R)(PC + R)$
$PA \cdot PB = PC^2 - R^2$

b) Resolução baseada na teoria de distância de um ponto em relação a circunferência, sendo válido tanto para o ponto P interior e exterior a circunferência.



PA = 0
PC = R → $PC^2 - R^2 = 0$
Logo, $PA \cdot PB = R^2 - PC^2$

Problema 5. *(Resolução de Camila Varotto Baroncini - Colégio Marista Pio XII)*

Dados:
embalagem (1) → paralelepípedo, preço R$6,00.
embalagem (2) → cilindro, preço R$3,20.

Calculando os volumes das embalagens, temos:

$V_1 = h_1 \cdot S$

$S = a^2$, onde S é a área da base do paralelepípedo e $h_1 = \pi$h

Logo, $V_1 = \pi h \cdot a^2$

$V_2 = h_2 \cdot S$

$S = \pi^2 r$, onde S é a área da base do cilindro e $h_2 = \pi$h

Como d (diâmetro) = a → r = $\frac{a}{2}$

Logo, $S = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2\pi}{4}\right)$ e $V_2 = \frac{2h \cdot a^2\pi}{4} = \frac{\pi h a^2}{2}$.

Assim:

Razão de volumes: $\frac{V_1}{V_2} \to \frac{\pi h \cdot a^2}{\frac{\pi h a^2}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$

Razão de preços: $\frac{(1)}{(2)} \to \frac{6,00}{3,20} = \frac{15}{8}$

Como $\frac{15}{8} < 2$, conclui-se que a embalagem (1) é a mais vantajosa ao consumidor (tem o dobro da capacidade volumétrica e seu preço é menor que o dobro do preço de (2)).

Problema 6. *(Resolução de Cauê Ogatta Maia - Colégio Pontagrossense Sepam)*

Como cada dado possui seis faces, o total de possibilidades é $n_a = 36$.

Condições: $n_2 \geq n_1$ e $\frac{n_2}{n_1}$ =divisão exata

Vamos verificar quais são os possíveis valores que ao lançar o dado, n_1 pode assumir. Assim se n_1 for:

1 → possibilita 6 divisões

2 → possibilita 3 divisões

3 → possibilita 2 divisões

4 → possibilita 1 divisão

$5 \rightarrow$ possibilita 1 divisão

$6 \rightarrow$ possibilita 1 divisão

Totalizando 14 possibilidades de divisão.

Assim, a probabilidade é $= \frac{14}{36} = \frac{7}{18} \simeq 38,888\ldots\%$

Problema 7. *(Resolução de Matheus Grabin Kovalski - Colégio Neo Master)*

$$\begin{array}{l|l} 2018 & \underline{\;x\;} \\ \\ \;\;2 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} 2031 & \underline{\;x\;} \\ \\ \;\;3 & \end{array}$$

Diminuindo os restos dos números dados temos:

$2018 - 2 = 2016$
$2031 - 3 = 2028$

Calculando o MDC entre 2016 e 2028:

2016	2028	2	*
1008	1014	2	
504	507	3	
168	169		

* Número de divisores simultâneos.
$n = C_3^2 + C_3^3 = 3 + 1 = 4$
$n = 3 + 1 = 4$

Observação: Não se acrescentam 1, 2 e 3, pois estes não deixariam resto em se dividindo 2018 e 2031. Retira-se uma combinação, pois há duas vezes a multiplicação 2×3, portanto:

$n = 4 - 1 = 3$

Assim, o conjunto A apresenta 3 elementos.

Problema 8. *(Resolução de Camila Varotto Baroncini - Colégio Marista Pio XII)*

Dados:
120 árvores
400 frutas por árvore
+ 1 árvore, - 2 frutas por árvore

Produção = n árvores $\cdot x$ frutas por árvores

$(120+n)(400-2n) = P(n)$

$P(n) = 4800 + 400n - 240n - 2n^2 = -2n^2 + 160n + 4800$

Calculando o delta temos:

$\triangle = b^2 - 4ac = 25600 - 4(-2)48000 = 409600$

Produção máxima = vértice da função

$Vx = \frac{-b}{2a} = \frac{-160}{-4} = 40$
$Vy = \frac{-\triangle}{4a}$
$Vy = \frac{-409600}{-8} = 51200$

ou

$P(40) = -2 \cdot 40^2 + 160 \cdot 40 + 48000 = -3200 + 6400 + 48000 = 51200$

A produção máxima ocorre quando são adicionadas mais 40 árvores (totalizando 160 árvores) e é de 51200 frutos.

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

2ª OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

"Promovendo a inclusão social e ajudando a mudar o cenário da educação."

Premiados

A Cerimônia de Premiação da *2ª Olimpíada Pontagrossense de Matemática* ocorreu no dia 22 de novembro de 2014, no Cine Teatro PAX, às 14h00 para os alunos dos Níveis **1** (6º e 7º anos do Ensino Fundamental II), **2** (8º e 9º anos do Ensino Fundamental II), **3** (1ª e 2ª séries do Ensino Médio) e **4** (3ª e 4ª séries do Ensino Médio e aqueles estudantes que tenham concluído Ensino Médio há menos de um ano e não tenham ingressado em nenhum curso superior, quando da realização da primeira fase da OPMat).

A Cerimônia de Premiação contou com a presença das seguintes autoridades:

- Prof. José Tadeu Teles Lunardi representando a reitoria - Diretor do Setor de Ciências Exatas e Naturais
- Profa. Marilisa do Rocio Oliveira representando a Pró-Reitoria de Extensão e Assuntos Culturais da UEPG
- Profa. Luciane Grossi - Chefe do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG
- Profa. Maria Izabel Vieira - Chefe do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa
- Prof. Luiz Fabiano dos Santos - Coordenador da Educação Básica do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa
- Profa. Marli Terezinha Van Kan - Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática UAB da UEPG
- Profa. Sandra Mara Dias Pedroso - Coordenadora de Matemática do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa
- Sr. Amaury dos Martyres - Pró-Reitor de Assuntos Administrativos da UEPG
- Prof. Miguel Arcanjo de Freitas Júnior - Pró-Reitor de Graduação da UEPG
- Prof. Ariangelo Hauer Dias - Pró-Reitor de Planejamento da UEPG
- Prof. Carlos Luciano Sant'Ana Vargas - Reitor da Universidade Estadual de Ponta Grossa

- Profa. Elisangela dos Santos Meza - Coordenadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Na ocasião foram premiados 266 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 38,55% dos alunos que participaram da segunda fase da 2ª OPMat): 20 com medalhas de ouro; 40 com medalhas de prata; 56 com medalhas de bronze e 150 com medalhas de menção honrosa.

Foram entregues troféus para as escolas e para os professores dos dois alunos que obtiveram a maior pontuação em cada nível (1, 2, 3 e 4) da 2ª OPMat, sendo um de escola particular e um de escola pública. Além disso, todos os professores cujos alunos foram premiados receberam certificados de congratulações, assim como todas as escolas participantes da 2ª OPMat.

Primeiro Lugar Geral

- Mateus Antônio Chinelatto (Colégio Marista Pio XII)

Nível 1

Troféu

- Karenn Unrein Dos Santos (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Cassiano José Kounaris Fuziki (Colégio Pontagrossense Sepam)

Ouro

- Cassiano José Kounaris Fuziki (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lucas Perondi Kist (Escola Tales de Mileto)
- Elaine Cristina Margraf Martins (Colégio Sant'Ana)
- Danilo Beltrame (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Livia Maria Mayer (Colégio Integração)

Prata

- Karenn Unrein Dos Santos (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Lucas Dolatto Milléo (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Renan Nishimura de Lima (Escola Santa Teresinha)
- Bruno Vieira Harmatiuk (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- Aléxia Liz Narok Stevan (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Isabele Lopatko Correia (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- Gustavo Wnuk Maciel (Colégio Sagrada Família)
- Ricardo Correia (Escola Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Renata Cury Caruso (Colégio Sant'Ana)
- Beatriz Raffaelly Schneider (Colégio Estadual Nossa Senhora das Glória)

Bronze

- Amanda Franczak da Silva (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Heitor Mariano Costa (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gabriel Dalzoto Salles (Colégio Sagrada Família)
- Luan Rodrigo Jensen (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Arthur Moscardi Milléo (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Weslei Gonçalves da Rosa (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Leandro Macedo Rosa (Colégio Sagrada Família)
- Fabrizio Halila Reusing (Colégio Neo Master)
- Alice Santos Carmo Cabral (Escola Tales de Mileto)
- Leonardo Kauã de Lara (Colégio Estadual 31 de Março)

- Taís Sousa Maestri (Colégio Marista Pio XII)
- Gustavo Perlin Fior (Colégio Neo Master)
- Rodrigo de Oliveira (Colégio Marista Pio XII)
- Rafael Stori (Escola Santa Terezinha)
- Thaysa Neris Dos Santos (Colégio Sant'Ana)

Menção Honrosa

- Thiago Felipe de Freitas da Luz (Colégio Sant'Ana)
- Barbara Feducenko Moreira (Colégio Sant'Ana)
- Leonardo Gabriel Ribeiro Dias (Colégio Sagrada Família)
- Rhuan Kleber Gonçalves (Colégio Integração)
- Marcos Eduardo Baldykowski (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Bruna Balzer Maciel (Colégio Neo Master)
- Maria Luiza Lippel (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Sara Rebeca de Lima Alves (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Gabriel Dos Santos (Colégio Integração)
- Ligia Fenanda Inglês Dos Santos (Colégio Sant'Ana)
- Heric Bruno Fontana (Colégio Marista Pio XII)
- Fernando Cherevate (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Pedro Azevedo Fornazari (Colégio Sagrada Família)
- Allan Nabozny (Escola Tales de Mileto)
- Luiz Gabriel de Andrade (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Veronica Kristine Schneider (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)

- Augusto Luis Mayer (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Angela Amarath Galvão (Colégio Neo Master)
- Cleyton Neumann (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Daniele Luiza Fidelix Silva (Escola Santa Teresinha)
- João Victor Waldeck de Oliveira (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Francislainy de Sá Alves (Colégio Estadual Ana Divanir Boratto)
- Eliane Aparecida Donato (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Alessandra de Oliveira Pacheco (Colégio Neo Master)
- Aline de Lara (Colégio Sant'Ana)
- André Gustavo Kichileski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Gustavo Konofal da Silva (Colégio Sagrada Família)
- Isabelle Walylo Ricexenete (Escola Santa Teresinha)
- Lana Rosa Nascimento Oliveira (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Layla Fernanda Matheus Basso (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Renan José Ferreira Scorsin (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Luiz Felipe Kincheski de Ávila (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Diogo Leal da Silva (Colégio Integração)
- Eduardo Vouk Ribeiro (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Emanoel Ferreira Pinto (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Gabriel Leme Campos (Escola Tales de Mileto)
- Hellen Cristine da Silva (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Leticia Brito da Silva (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Lucca Krik Mazzei (Escola Estadual Medalha Milagrosa)

- Nicolas Michel de Oliveira Araujo (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Verônica Rodrigues Fiuza (Colégio Neo Master)
- Luiz Daniel Fabricio (Escola Tales de Mileto)
- Alana Tramontin (Colégio Sant'Ana)
- Amanda Dos Santos Gonsalves (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Anna Luiza Padro (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Cleberton Kobay Dos Santos (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Eduardo José Bueno de Camargo (Escola Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Leonardo Ribeiro Meira (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Loren Victória Klaus (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Rafael Marques Dalzotto (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Fernanda de Paula Mazur (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Giovana Madureira Grochowicz (Colégio Marista Pio XII)
- Ana Alice Dos Santos Wendt (Escola Desafio)
- Ana Helena Machado (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Isabela Andrade Ribeiro (Colégio Sagrada Família)
- Isabelle Narumi Funada (Colégio Marista Pio XII)
- Patrick Fontana Vieira da Rosa (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Raiely Ribeiro (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Ramon Henrique Petuya Degraf (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Keyla Rodrigues Dos Santos (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Natalia Kalugin (Colégio Francisco Pires Machado)
- Sergio Luis Batista Filho (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Leticia Aparecida Martins de Lima (Colégio Estadual Senador Correia)

Nível 2

Troféu

- João Vitor Dos Santos (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Lucio Enzo Horie (Colégio Neo Master)

Ouro

- João Vitor Dos Santos (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Lucio Enzo Horie (Colégio Neo Master)
- Amy Sakakibara (Escola Desafio)
- Tiago Daniel Gueiber (Colégio Marista Pio XII)
- Ana Luisa Yoshie Ogatta Yadomi (Colégio Pontagrossense Sepam)

Prata

- Larissa Almeida Busnello (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Guilherme José de Lima Manique Barreto (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Camila Cury Caruso (Colégio Sant'Ana)
- Ana Caroline Dlugokenski Mocelin (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Lucas Melani Rocha Volpe (Colégio Neo Master)
- Luiza Bastos Bianco (Colégio Neo Master)
- Gustavo Franzener Gonçalves da Silva (Colégio Sant'Ana)
- Ana Carolina Mello Fontoura de Souza (Colégio Neo Master)
- Nathan Nabozny (Escola Tales de Mileto)
- João Pedro Wardani de Castro (Colégio Sagrada Família)

Bronze

- Henrique de Carvalho Furia (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lucas Dos Santos Pereira Mariano (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Gabriel Henrique Kwiatkovski Godinho (Colégio Neo Master)
- Gustavo Marenda de Lima (Escola Desafio)
- Alysson Henrique Rublesperger de Almeida (Colégio Neo Master)
- Elizane Verônica Pereira Dos Santos (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Paulo Henrique Neto (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- João Ari Simões Ceregato (Escola Santa Teresinha)
- Thomas de Andrade Carraro (Colégio Marista Pio XII)
- Gustavo Sabatoski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Thiago Samara Gaia (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Daniel Silveira Salamucha (Colégio Estadual 31 de Março)
- Guilherme Maciel Mello (Escola Desafio)
- Gustavo Lanzini Levandoski (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Rafael Strack (Escola Estadual Medalha Milagrosa)

Menção Honrosa

- Mayara Beltrame (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gustavo Ferreira Nicoluzzi (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Ketlen Cristina Teixeira (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Lis Anne Ribeiro da Luz (Colégio Sagrada Família)
- Allana Nayara Woiciechowski (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- Ana Paula Biale Holm (Colégio Sant'Ana)

- Amanda Viante Rodrigues (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Luíza Helena Machado Santos (Escola Santa Teresinha)
- Rulyan Golinski Costa (Colégio Sagrada Família)
- Eduardo de Lima Soares (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Isis Fernandes Do Carmo (Colégio Sant'Ana)
- João Lucas Depeiris Baieta (Colégio Estadual 31 de Março)
- Otávio Winnik Carvalho de Gouveia (Colégio Sagrada Família)
- Brenda Lee de Medeiros (Colégio Marista Pio XII)
- Daniel de Oliveira Mesquita (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Rafael de Figueiredo Schuinki (Colégio Sagrada Família)
- Gabriel Guilherme Biscaia Martins (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Ariane Gabrielli Massalaka Rubles (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Kelly Caroline Lepinski (Colégio Marista Pio XII)
- Natalia Ruppel Mourão (Colégio Sagrada Família)
- Yasmim Brick Santos (Colégio Marista Pio XII)
- Gianmarco Stefano Sovinski Migliorini (Escola Desafio)
- Larissa de Cássia Ribeiro Svistum (Escola Estadual Professor José Gomes do Amaral)
- Natalia Moura (Colégio Neo Master)
- Thiago Takaji Tsutsui (Colégio Sagrada Família)
- Pedro Victor Pereira (Colégio Integração)
- Augusto Valentim Pavezi (Colégio Neo Master)
- Bruno Stori (Escola Santa Teresinha)

- Dafne Stenveld Francisco (Colégio Sant'Ana)
- Juliana Akemy Inamine Vieira (Colégio Neo Master)
- Malu Ferreira Bueno (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Mike Hélder Durvalino Botelho Ribeiro (Colégio Neo Master)
- Rafaela Ariadne Cunha Monteiro (Colégio Integração)
- Alexandre de Freitas Faisst (Colégio Marista Pio XII)
- Gustavo Cristofer Medeiros Rodrigues (Colégio Sagrada Família)
- Jonathan Antunes de Oliveira (Colégio Sagrada Família)
- Sieslen de Oliveira Kieski (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Vitor Augusto Dos Santos (Colégio Sagrada Família)
- Amanda Priscilla Soistak (Colégio Sagrada Família)
- Daniel Henrique Vieira Aleixo (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Diogo Hiraiwa de Oliveira (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Marcelly Meller Popik (Colégio Marista Pio XII)
- Maria Aline Chemin (Colégio Sagrada Família)
- Vitoria Scheffel Dias (Colégio Sant'Ana)
- Francisco Tullio Carneiro (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Gustavo Kossar Van Thienen da Silva (Colégio Becker E Silva)
- João Gabriel de Souza (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Luiz Gabriel Do Nascimento Blum (Escola Estadual Prof. Edison Pietrobelli)
- Daniel Chaves Simão (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- Gabriele Strack (Colégio Sant'Ana)
- Guilherme Portela Meller (Colégio Marista Pio XII)

- Julia Gouveia Schemberger (Colégio Sagrada Família)
- Leonardo Rodrigues Mazur (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Marco Antônio de Mattos Koltun (Colégio Integração)
- Otávio Ramos Janoski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Jeniffer Lauber (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Mathias Gabriel Alves da Silva (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Rafaela Dobginski de Lima e Silva (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Vitor Kosloski (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Camila Rodrigues Prestes (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Pedro Henrique Sauka (Escola Santa Teresinha)

Nível 3

Troféu

- Elias Estevão Pereira dos Santos (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Gabriela Baier (Colégio Sagrada Família)

Ouro

- Elias Estevão Pereira dos Santos (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Gabriela Baier (Colégio Sagrada Família)
- Lucas Matheus Sandeski (Instituto Estadual de Educação Professor César Prieto Martinez)
- João Pedro Herche Cavasotti (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Matheus Bach (Colégio Marista Pio XII)

Prata

- Daniel Jose Schulmeister (Instituto Estadual de Educação Professor César Prieto Martinez)
- Guilherme Ari Scortegagna (Colégio Neo Master)
- Lucas Liebel Camargo Ribas (Colégio Sagrada Família)
- Alexandre Domingues Caspechaque (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lucas Martinelli (Colégio Sagrada Família)
- Débora Hiromi Yoshizawa (Colégio Sagrada Família)
- Alexandre Antunes (Colégio Sagrada Família)
- Helena Ribeiro Bara (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Giovana Akemi Okubo (Colégio Neo Master)
- Luna Rhaine Nascimento Oliveira (Instituto Estadual de Educação Professor César Prieto Martinez)

Bronze

- Gabriela de Carvalho Furia (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gabriel Benelli (Colégio Neo Master)
- Sofia Pujol Ricarte (Colégio Marista Pio XII)
- Rodrigo Pansolim da Rosa (Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell du Vernay)
- Francielle Nocêra Viechineski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Ana Paula Fontanella Lesnau (Colégio Neo Master)
- Victória Galdino Manta (Colégio Sagrada Família)
- Bruna Elisa de Campos (Colégio Neo Master)
- Eduarda Roberta Schamne (Colégio Sagrado Coração de Jesus)

- Cecília Wolochn Schell (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gabrielle Jagas Neves (Colégio Sagrada Família)
- Cauynê Freitas Vieira (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Natália Moura Willemann (Colégio Neo Master)
- Matheus Goulart de Freitas (Colégio Sant'Ana)
- Mateus Oltramari Toledo (Colégio Neo Master)

Menção Honrosa

- Maria Catarina Huk Distéfano Grácia (Colégio Sagrada Família)
- Maria Clara Rodrigues Istschuk (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Alex Genu (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Matheus Willian Malinoscky (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Ester Do Carmo (Colégio Sant'Ana)
- Laura Bazzi Longo (Colégio Neo Master)
- Lizana Carneiro Dos Santos (Colégio Sant'Ana)
- Giulihano Luis Feltz Zeni (Instituto Estadual de Educação Professor César Prieto Martinez)
- Kawane Rafaela Rodrigues (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Juliana Vieira Schulomei (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Lucas Samara Rodrigues de Lima (Colégio Integração)
- Jessica Dos Santos (Colégio Sagrada Família)
- Alefe Wesley Pontes de Freitas (Colégio Sant'Ana)
- Beatriz Oliveira Marenda (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Aline Pissaia (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)

Nível 4

Troféu

- Agnes Christie Herche Cavasotti (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Mateus Antônio Chinelatto (Colégio Marista Pio XII)

Ouro

- Mateus Antônio Chinelatto (Colégio Marista Pio XII)
- Lincoln Boer (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lenon Diniz Seixas (Colégio Sagrada Família)
- Matheus Henrique Do Amaral Prates (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gabriel Teixeira Santos (Colégio Sagrada Família)

Prata

- Flavia Luisa Pires Enembreck (Colégio Neo Master)
- Mariana Lourenço Sturzeneker (Colégio Marista Pio XII)
- Natália Macedo Carvalho (Colégio Marista Pio XII)
- Maiari Scheibel (Colégio Sagrada Família)
- Julia Sanches Ito (Colégio Sagrada Família)
- Luiz Otávio Oyama (Colégio Sagrada Família)
- Luiz Rodolfo Machado (Colégio Sagrada Família)
- Thales Solano Rodrigues Braga (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Victor Pereira de Oliveira Zanetti Gomes (Colégio Neo Master)
- Nathalia Kuipers (Colégio Pontagrossense Sepam)

Bronze

- Pamela Pereira Guaringue (Colégio Sagrada Família)
- Gabriel Kosinski da Silva (Colégio Neo Master)
- Gabriel Staichak (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Vithor Tozetto Ferreira (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Bruno Diniz Batista (Colégio Neo Master)
- Gabriel Bojko (Colégio Sagrada Família)
- Agnes Christie Herche Cavasotti (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Guilherme Augusto de Souza (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Renatha Farago Almeida (Colégio Sagrada Família)
- Daniele Caroline Gueiber (Colégio Marista Pio XII)
- Fabio Katsuo Nakano (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Isabela Silva Safraider (Colégio Sant'Ana)
- Murilo Hilgemberg (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Patrick de Oliveira Rosa Staroin (Colégio Sant'Ana)
- Elisa Roth (Colégio Neo Master)

Menção Honrosa

- Bruno Rodrigues (Colégio Integração)
- Alana Garcia (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Emanuela Pires Matsen (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Heri Carla Maria Amaral (Colégio Estadual Ana Divanir Boratto)
- Lucyely Carneiro de Freitas (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)

Professores Premiados

Abaixo consta a relação de todos os professores que receberam troféus nos respectivos níveis:

Nível 1 - Troféu:

- Professora Sheila Regina Bagatelli Bozz (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Professora Fernanda Fetzer (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Professora Amélia Eponina da Luiz Ruivo (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)

Nível 2 - Troféu:

- Professor Rosni Troyner (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Professora Geane Dias de Moura Jorge (Colégio Neo Master)

Nível 3 - Troféu:

- Professor Lenilton Kovalski (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Professor Francisco Fanchin Neto (Colégio Sagrada Família)

Nível 4 - Troféu:

- Professor Jeferson Müller (Colégio Marista Pio XII)
- Professor Marcos Maurício Ferreira Sachs (Colégio Estadual Regente Feijó)

A seguir consta a relação de todos os professores que tiveram alunos participantes da 2ª OPMat no ano de 2014:

- Lenilton Kovalski (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Alzenir Virginia Ferreira Soistak (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Arlene Cristiane Martins de Lima (Colégio Estadual 31 de Março)
- Denilson dos Santos Machado (Colégio Estadual 31 de Março)

- Marissol do Rocio Vieira da Rosa (Colégio Estadual 31 de Março)
- Igor Alberto Dantas Abrami (Colégio Estadual Ana Divanir Boratto)
- Amélia Eponina da Luiz Ruivo (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Rafael Fernandes de Lara Cordeiro (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Terezinha Nicolaio (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Marisete do Rocio Kopis (Colégio Estadual Professor Becker e Silva)
- Adnilson Ribeiro Montuani (Escola Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Lucia Yukie Shimasaki (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Marcia Cristiane Ramos Padilha (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Maria Isabel Tiburcio Fanha (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Igor Alberto Dantas Abrami (Escola Desafio)
- Regina Rossa (Colégio Estadual Professor Edison Pietrobelli)
- Carlos Adolfo Weckerlin (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Nazilda Antonia Chiaramonte (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Sheila Sayuri Yono Ohi (Colégio Estadual Francisco Pires Machado)
- Sheila Regina Bagatelli Bozz (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Valquíria Glinski (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Juliana de Fátima Holm Brim (Colégio Integração)
- Nicholas Raphael Beruski (Colégio Integração)
- Adriane de Castro (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Danieli Walichinski (Escola Estadual Jesus Divino Operário)

- Débora de Lima Moscardi dos Santos (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Josiane Deschk (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Margarete Faber (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Vanize Aparecida Noimann (Colégio Estadual Professor João Von Borell Du Vernay)
- Carla Adriana Lourenço Pinto (Colégio Estadual Professor José Gomes do Amaral)
- Dirceu Eduardo Correa (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Maria Ester Senver Schwab (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Marselha Aparecida Wiecheteck (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Rafael Bruno Ligeski (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Elizabete Feld (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Jeanine Alves dos Santos (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Renan Andrey Bianco (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Rosni Troyner (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Simone de Fátima Soltes (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Libia Andréia Cosati (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Wladimir Bosca (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Diefrei Alves (Colégio Neo Master)
- Fabrício Gonçalves dos Santos (Colégio Neo Master)
- Felipe Alberto Hey (Colégio Neo Master)
- Geane Dias de Moura Jorge (Colégio Neo Master)
- Simone Daiane Pisnisk (Colégio Neo Master)

- Aline Mendes de Arruda (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Edmir Ferreira Neves (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Emilene Conceição Marins da Silva Bochnek (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Eva Aparecida Carvalho e Silva (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Gisele Aparecida Carvalho e Silva (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Juliane Helena Rosa (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Marcos Augusto Mendes (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Maristel do Nascimento (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Keli Cristina Rodrigues (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Marlise Tirelli (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Rodrigo França Pleis (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Sidenéia do Rocio (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Dayane Rejane Andrade Maia (Colégio Marista Pio XII)
- Geane Dias de Moura Jorge (Colégio Marista Pio XII)
- Lucia Yukie Shimasaki (Colégio Marista Pio XII)
- Jeferson Müller (Colégio Marista Pio XII)
- Fernanda Fetzer (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Sheila Regina Bagatelli Bozz (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Maurício Kuchininski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Rubens Edgard Furstenberger (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Beatriz Scheibel (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Márcia Luzia Biale Holm (Colégio Estadual Regente Feijó)

- Marcos Maurício Ferreira Sachs (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Bruna Kriks dos Santos (Colégio Estadual Senador Correia)
- Bruna Elisabete Adamowicz (Colégio Sagrada Família)
- Diefrei Alves (Colégio Sagrada Família)
- Fábio Augusto Souto Rosa (Colégio Sagrada Família)
- Francisco Fanchin Neto (Colégio Sagrada Família)
- Marina Marra (Colégio Sagrada Família)
- Rita Nara Aparecida de Carvalho (Colégio Sagrada Família)
- Rosilda Aparecida Chociai Scremin (Colégio Sagrada Família)
- Suzane Machado Baer Costa (Colégio Sagrada Família)
- Maria Regina Urban (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Roberto Mauro Ramos Mainardes (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Vera do Rocio Vanat Prestes (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Willian Thomas Rocha (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Claudia Danielle Ferreira de França (Colégio Sant'Ana)
- Gilvan Aparecido Tratch (Colégio Sant'Ana)
- Keli Cristina Rodrigues (Colégio Sant'Ana)
- Paulo Fernando Zaratini de Oliveira e Silva (Colégio Sant'Ana)
- Alessandra Cardozo (Escola Santa Teresinha)
- Angelis Haas Ronchi (Escola Santa Teresinha)
- Izabelle Cristiane Matkovski (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Alisson Lima Emiliano (Escola Tales de Mileto)

- Carlos Roberto Schebeliski (Instituto Estadual de Educação Professor César Pietro Martinez)
- João Luiz Schirlo (Instituto Estadual de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Sandranara Pires de Oliveira (Instituto Estadual de Educação Professor César Pietro Martinez)

Escolas Participantes

Abaixo consta a relação de todas as escolas participantes da 2^a OPMat no ano de 2014:

Centro de Educação Básica Para Jovens e Adultos - UEPG
Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa
Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa
Centro Social Marista Santa Mônica
Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas
Colégio Estadual Ana Divanir Boratto
Colégio Estadual Becker e Silva
Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny
Colégio Estadual Colônia Dona Luíza
Colégio Estadual Dorah Gomes Daitschman
Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas
Colégio Estadual General Antônio Sampaio
Colégio Estadual Francisco Pires Machado
Colégio Estadual João Ricardo Von Borell du Vernay
Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória
Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças
Colégio Estadual Polivalente
Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico
Colégio Estadual Regente Feijó
Colégio Estadual Senador Correia
Colégio Estadual 31 de Março
Colégio Integração
Colégio Marista Pio XII
Colégio Neo Master
Colégio Pontagrossense Sepam
Colégio Sagrada Família
Colégio Sagrado Coração de Jesus
Colégio Sant'Ana
Colégio Sesi - Ponta Grossa
Escola Desafio
Escola Estadual Amálio Pinheiro
Escola Estadual Edison Pietrobelli
Escola Estadual Halia Terezinha Gruba

Escola Estadual Jesus Divino Operário
Escola Estadual Maestro Bento Mossurunga
Escola Estadual Medalha Milagrosa
Escola Estadual Monteiro Lobato
Escola Estadual Parque da Vila Velha
Escola Estadual Professor José Gomes do Amaral
Escola Santa Teresinha
Escola Tales de Mileto
Instituto Estadual de Educação Professor César Prieto Martinez

2ª OPMat - Nível 1

Primeira Fase

Problema 1. Somando todos os números naturais pares menores que 2014 obtemos um número cujo algarismo das unidades é:

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

Problema 2. Joãozinho pegou um número natural de três algarismos distintos e o escreveu de trás para frente. A seguir, subtraiu o menor do maior e obteve como resultado 297. Se o primeiro algarismo era o maior dos três, então a diferença entre o primeiro algarismo e o último algarismo era:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 7

Problema 3. Numa conversa entre amigos, João estava tentando lembrar em que dia da semana nasceu seu filho mais novo. Mariazinha, que é boa em matemática, se propôs a ajudá-lo. Perguntou a João em que dia, mês e ano o menino nasceu. João disse que o menino nasceu em 10 de junho de 2013. Após algumas continhas, Mariazinha concluiu, corretamente, que o dia da semana em que o menino nasceu foi:

a) um domingo.

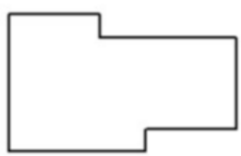
b) uma segunda-feira.

c) uma terça-feira.

d) uma quarta-feira

e) um sábado.

Problema 4. A figura a seguir é formada por oito segmentos de reta, quatro horizontais e quatro verticais, de medidas 3 cm, 2 cm ou 0,5 cm.



Qual o perímetro e a área da figura?

a) 12 cm e 12,5 cm^2

b) 17 cm e 15 cm^2

c) 12 cm e 16 cm^2

d) 16 cm e 12,5 cm^2

e) 11 cm e 16 cm^2

Problema 5. No dia das mães, uma comunidade fez uma festinha reunindo apenas as mães e seus filhos. Estiveram presentes todas as mães e seus respectivos filhos. Ao todo, entre mães e filhos, havia 28 pessoas na festa. Sabe-se que havia 9 mães na festa, nenhuma mãe tinha mais do que 3 filhos e 2 mães tinham exatamente 2 filhos cada uma. Quantas mães tinham apenas 1 filho?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Problema 6. Numa chácara havia gatos e frangos, mais gatos do que frangos, o número total de patas dos frangos e dos gatos era 14, quantos animais, frangos ou gatos, havia na chácara?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Problema 7. Ao dividir um número natural x por 7, Joãozinho encontrou um resto igual a 2. Pode-se afirmar então que:

a) $x+5$ é divisível por 7

b) x é divisível por 7

c) $x-7$ é divisível por 7

d) $x+2$ é divisível por 7

e) $x+7$ é divisível por 2

Problema 8. Efetuando algumas transformações de unidades de massa e tempo, assinale a alternativa que contém uma conversão correta:

a) 2,2 kg é igual a 2 kg e 2 g

b) 1,2 min é igual a 1 min e 2 s

c) 2,2 kg é igual a 2 kg e 20 g

d) 1,2 min é igual a 1 min e 12 s

e) 2,02 kg é igual a 2 kg e 200 g

Problema 9. Se o número de quatro algarismos a2b0 é múltiplo de 3 e 11, então podemos afirmar que este número é um múltiplo de:

a) 85 b) 120 c) 225 d) 330 e) 440

Problema 10. João, Paulo e Maria foram a uma padaria e pediram 30 pãezinhos de queijo. João comeu 1 pãozinho a mais que Paulo e 4 pãezinhos a menos que Maria. Quantos pãezinhos Maria comeu?

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

Problema 11. Ao multiplicar 28 por certo número natural, usando uma calculadora, um aluno digitou errado o algarismo das unidades do multiplicador, digitando 3 no lugar do algarismo correto, que era 2. Com isso o resultado obtido foi 924. Calculando o multiplicador correto que deveria ser digitado, e somando seus algarismos, obtemos:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

Problema 12. Numa competição de natação, John, Paul e William foram os medalhistas. Os três são de nacionalidades diferentes, um é inglês, um é americano e o outro é escocês. Sabe-se que John, que venceu a prova, não é americano; quem chegou em segundo lugar é o escocês e William, que não chegou em segundo lugar, também não é inglês. Pode-se então afirmar que:

a) Paul chegou em segundo lugar

b) John não é inglês

c) William chegou em segundo lugar

d) Paul chegou em terceiro lugar

e) William não é americano

Problema 13. Ao dividir certo número natural por 22, um aluno obteve 20 como quociente e 11 como resto. Qual era o número?

a) 262 b) 242 c) 429 d) 361 e) 451

Problema 14. A figura 1 abaixo representa o mapa do Brasil numa escala 1cm : x km, e a figura 2 representa o mapa do Brasil numa escala 1cm : y km.

Figura 1 Figura 2

Assinale a alternativa que apresenta uma valor possível para a razão $\dfrac{x}{y}$

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{3}{2}$ d) $\dfrac{5}{8}$ e) $\dfrac{6}{7}$

Problema 15. Dois números naturais ímpares a e b, de dois dígitos cada um, são tais que: a é múltiplo de 7, mas não de 3, b é múltiplo de 25, o mínimo múltiplo comum dos dois é 525 e o máximo divisor comum dos dois é 5, qual é a soma desses dois números?

a) 100 b) 110 c) 115 d) 120 e) 125

Problema 16. A tabela abaixo deve ser preenchida utilizando nove números naturais consecutivos, sendo que três deles já estão na tabela.

10		
		13
	7	

Se as somas dos números em cada linha, cada coluna ou cada diagonal devem ser iguais a 33, qual deve ser a soma dos números que ainda não foram colocados na tabela?

a) 45 b) 56 c) 69 d) 70 e) 72

Problema 17. Maria foi a uma sorveteria e mandou preparar uma casquinha com duas bolas de sorvete. Como ela pode escolher duas bolas de mesmo sabor, ou de sabores diferentes, e tem quatro sabores para escolher, de quantas maneiras ela pode preparar seu sorvete?

a) 8 b) 10 c) 11 d) 12 e) 15

Problema 18. Se na cotação de hoje, 1 dólar vale R$ 2,24 e 1 euro vale R$ 3,08, então 1 euro vale aproximadamente:

a) 1,10 dólares

b) 1,25 dólares

c) 1,38 dólares

d) 1,42 dólares

e) 1,50 dólares

Problema 19. Um aluno resolve ajudar algumas crianças pobres distribuindo alguns kits de material escolar, contendo lápis, canetas e borrachas. Se ele dispõe de 100 lápis, 60 canetas e 40 borrachas e deseja que todos os kits sejam iguais, com a mesma quantidade de canetas, de lápis e de borrachas, qual o maior número de kits que ele poderá preparar?

a) 10 b) 15 c) 20 d) 25 e) 30

Problema 20. João gasta metade do seu salário para pagar a escola, um terço do que resta ele poupa para gastos futuros, e ainda lhe sobra R$ 1.500,00. Quanto João poupa de seu salário?

a) R$ 250,00

b) R$ 500,00

c) R$ 900,00

d) R$ 1.000,00

e) R$ 750,00

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
b	c	b	d	d	a	a	d	d	d
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
c	a	e	c	b	c	b	c	c	e

Segunda Fase

Problema 1. Num certo ano bissexto, o dia 15 de janeiro caiu numa sexta-feira. Em que outros meses deste mesmo ano, o dia 15 também caiu numa sexta-feira?

Problema 2. Paulo tinha certa quantia aplicada num banco, quando teve que sacar 1/3 dessa quantia para custear algumas despesas. Um mês depois, quando o banco depositou 10% de juros sobre o saldo restante, Paulo verificou que o saldo atual estava $R\$200,00$ menor do que a quantia que estava aplicada antes do saque. Quanto Paulo tinha aplicado no banco antes do saque?

Problema 3. João, Paulo e Fernando foram presos sobre a acusação de desvio de verba de uma instituição financeira, mas só um deles é culpado. Ao ser interrogado pela polícia, nenhum deles confessou que era culpado, mas acusou um dos outros dois. De antemão a polícia sabia que só João tinha dito a verdade. Passado alguns dias, a polícia voltou a interrogar os três, e eles continuaram negando que fossem culpados, só que agora cada um deles inocentou a pessoa que havia acusado no primeiro depoimento e resolveu acusar a outra pessoa. Diante dos fatos, a polícia verificou que agora só Paulo disse a verdade. A partir disso, quem realmente é o culpado?

Problema 4. A figura abaixo representa uma conta de multiplicação de um número de três algarismos por um número de dois algarismos, resultando num número de 5 algarismos. Preencha os quadradinhos com algarismos adequados, de maneira que a conta esteja correta.

$$\begin{array}{r} \square\;\square\;\boxed{8} \\ \times\;\boxed{4}\;\square \\ \hline \boxed{1}\;\square\;\square\;\boxed{4}\;\boxed{2} \end{array}$$

Problema 5. O perímetro de um terreno retangular é 79,2m. Se o lado maior do terreno excede em 20% o lado menor, qual é a área desse terreno?

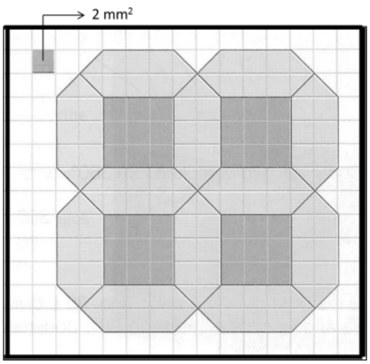
Problema 6. Considere os números $A = 2^{2014} + 3^{2014}$ e $B = 4^{2014}$. Qual das afirmações: $A < B$, $A = B$ ou $A > B$ é verdadeira?

Problema 7. Jorge quer enfeitar com lâmpadas os prédios de uma rua. Sabendo que possui 168 lâmpadas azuis, 280 vermelhas e 350 verdes.

a) Qual o maior número de enfeites iguais que pode fazer utilizando todas as lâmpadas?

b) Quantas lâmpadas de cada cor devem ser colocadas em cada enfeite?

Problema 8. Seja o mosaico abaixo, determine:



a) A área da parte cinza claro do mosaico em cm^2.

b) Quanto por cento representa a área do mosaico em relação a área do retângulo que o contém?

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Lucas Perondi Kist - Escola Elite Tales de Mileto)*

Nos meses que contém 31 dias, se avança 3 dias da semana, pois o resto da divisão de 31 por 7 é 3. Analogamente, os meses de 30 dias, avança-se dois dias e nos meses de 29 dias avança-se 1 dia. A partir disso, podemos montar a tabela abaixo:

Mês	Dia da Semana
Janeiro	Sexta-Feira
Fevereiro	Segunda-Feira
Março	Terça-Feira
Abril	Sexta-Feira
Maio	Domingo
Junho	Quarta-Feira
Julho	Sexta-Feira
Agosto	Segunda-Feira
Setembro	Quarta-Feira
Outubro	Sábado
Novembro	Segunda-Feira
Dezembro	Quinta-Feira

Portanto, os meses onde o dia 15 também caiu numa sexta-feira foram Abril e Julho.

Problema 2. *(Resolução de Cassiano José Kounaris Fuziki - Colégio Pontagrossense Sepam)*

Tomando x como o valor que Paulo tinha aplicado no banco, e y o valor após o saque feito, conseguimos montar as equações:

$$\begin{cases} x - \frac{x}{3} = y \ (I) \\ y + \frac{y}{10} = x - 200 \ (II) \end{cases}$$

Substituindo o valor de da equação (I) na equação (II):

$$\left(x - \frac{x}{3}\right) + \left(\frac{x - \frac{x}{3}}{10}\right) = x - 200$$
$$\left(x - \frac{x}{3}\right) + \left(\frac{x}{10} - \frac{x}{30}\right) = x - 200$$

$(30x - 10x) + (3x - x) = 30x - 6000$
$8x = 6000$
$x = 750$

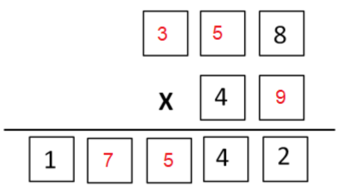
Portando, Paulo tinha 750 reais unidades monetárias aplicado no banco.

Problema 3. *(Resolução de Elaine Cristina Margraf Martins - Colégio Sant'Ana)*

Fernando é culpado, pois no primeiro julgamento todos falaram que não eram culpados, mas apenas João disse a verdade e disse que Fernando era culpado.No segundo julgamento, todos novamente disseram que não eram culpados e apenas Paulo falou a verdade e disse que Fernando era culpado.

Problema 4. *(Resolução de Renata Cury Caruso - Colégio Sant'Ana)*

Primeiro, verifica-se qual algarismo que, multiplicado por 8, resulte em um número terminado em 2, resultando nas opções 4 e 9. Porém, desenvolvendo, descobrimos que o único valor possível para esta casa é 9, e os valores consequentes são descobertos desenvolvendo os cálculos, resultando na conta:



Problema 5. *(Resolução de Cassiano José Kounaris Fuziki - Colégio Pontagrossense Sepam)*

Como o triângulo é retangular, teremos dois lados de tamanho x (maior) e dois lados de tamanho y, portanto, a partir do valor de seu perímetro, temos:

$2x + 2y = 79,2$
$x + y = 39,6$

Além disso, sabemos que $x = \dfrac{6y}{5}$ e, assim, podemos obter o tamanho de seus lados:

$\dfrac{6y}{5} + y = 39,6 \Rightarrow \dfrac{11y}{5} = 39,6 \Rightarrow y = 18\ m$

e

$x + 18 = 39,6 \Rightarrow x = 21,6m$

Portanto, a área do terreno pode ser dada por:

$A = xy$
$A = 18 \times 21,6$
$A = 388,8m^2$

Problema 6. *(Resolução de Lucas Perondi Kist - Escola Elite Tales de Mileto)*

Se, por analogia, tomarmos $A = 2^2 + 3^2 = 13$ e $B = 4^2 = 16$, podemos perceber que $A < B$, portanto, analogamente, se tomarmos $A = 2^{2014} + 3^{2014}$ e $B = 4^{2014}$, teremos que $A < B$.

Problema 7. *(Resolução de Danilo Beltrame - Colégio Pontagrossense Sepam)*

a) A resposta é dada pelo máximo divisor comum entre o número de lâmpadas de cada cor que, calculando, obtemos 14 enfeites iguais.

b) Neste item, basta dividir o número total de lâmpadas de cada cor pelo mdc calculado no item a). Assim, temos que cada enfeite terá 12 lâmpadas azuis, 20 vermelhas e 25 verdes.

Problema 8. *(Resolução de Lívia Maria Mayer - Colégio Integração)*

a) A área em cinza claro é composta por 12 regiões com 8 quadradinhos cada. Então, a figura em cinza claro é composta por 96 quadradinhos e sua área é de 96 × 2 = 192 mm^2. Em cm^2, a área é de $1,92\ cm^2$.

b) O retânngulo possui $14 \times 15 = 210$ quadradinhos, então sua área é de $210 \times 2 = 420\ mm^2$. O mosaico é composto por quadradinhos cinza claro (são 96) e cinza escuro (são 4 quadrados com 9 quadradinhos cinza escuro, então são 36 quadradinhos cinza escuro). Ao todo, são $96 + 36 = 132$ quadradinhos que compõem o mosaico e sua área é de 132 × 2 = 264 mm^2.
A razão entre a área do mosaico e a área do retângulo é de $\frac{264}{420} = 62,857\%$. Portanto, o mosaico representa $62,857\%$ da área do retângulo.

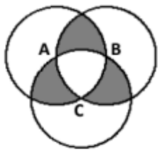
2ª OPMat - Nível 2

Primeira Fase

Problema 1. Somando todos os números naturais pares menores que 2014 obtemos um número cujo algarismo das unidades é:

a) 8 b) 0 c) 6 d) 4 e) 2

Problema 2. Na figura a seguir, temos três circunferências de centros A, B e C e todas de raios iguais a 1 cm:



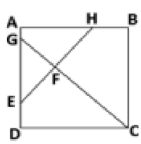
Qual a área da parte pintada?

a) $\frac{\pi}{2}cm^2$ b) $\frac{\pi}{4}cm^2$ c) $\frac{4\pi}{3}cm^2$ d) $\frac{\pi}{6}cm^2$ e) $\frac{5\pi}{12}cm^2$

Problema 3. Escrevendo todos os inteiros positivos múltiplos de 3 em sequência e sem espaços entre eles: 36912151821..., qual é o centésimo algarismo da sequência?

a) 9 b) 7 c) 3 d) 0 e) 1

Problema 4. Na figura abaixo, ABCD é um quadrado, o segmento CG é perpendicular ao segmento EH, $AH = \frac{2}{3}AB$, $DE = \frac{1}{4}AD$ e F é o ponto de intersecção dos dois segmentos. Se a área do triângulo EFG é $\frac{529}{145}cm^2$, qual é a medida do lado do quadrado?



a) 5 cm b) 6 cm c) 7 cm d) 8 cm e) 9 cm

Problema 5. Num triângulo ABC de área $12cm^2$, seja N um ponto do lado AC, tal que o segmento BN é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$, e M o ponto médio do lado BC. Se P é a intersecção dos segmentos BN e AM e $AC = 3AN$, qual é a área do triângulo ANP?

a) 0,75 cm^2 b) 1 cm^2 c) 1,25cm^2 d) 1,5cm^2 e) 1,75cm^2

Problema 6. Ao dividir um número natural x por 7, Joãozinho encontrou um resto igual a 2. Pode-se então afirmar que:

a) x é divisível por 7

b) $x+2$ é divisível por 7

c) $x+5$ é divisível por 7

d) $x+7$ é divisível por 2

e) $x-7$ é divisível por 2

Problema 7. Igual ao problema 9 do Nível 1

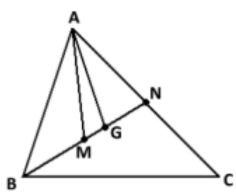
Problema 8. Igual ao problema 5 do Nível 1

Problema 9. Igual ao problema 6 do Nível 1

Problema 10. O resto da divisão de 2014^{2015} por 7 é?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 6

Problema 11. No triângulo ABC da figura abaixo, o segmento BN é uma mediana, M é o ponto médio do segmento BN e G é o baricentro.



Se a área do triângulo ABC é 12 cm^2, então a área do triângulo AGM é:

a) 0,75 cm^2 b) 0,8 cm^2 c) 1 cm^2 d) 1,2 cm^2 e) 1,5 cm^2

Problema 12. Ao multiplicar 28 por certo número natural, usando uma calculadora, um aluno digitou errado o algarismo das dezenas do multiplicador, digitando 5 no lugar do algarismo correto, que era 4. Com isso o resultado obtido foi 1568. Calculando o multiplicador correto que deveria ser digitado, e somando seus algarismos, obtemos:

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

Problema 13. Igual ao problema 12 do Nível 1

Problema 14. Pra fazer uma doação no natal, Joãozinho comprou dez carrinhos, duas bonecas e três bolas gastando R$121,00. No dia seguinte, voltou na mesma loja e comprou mais dois carrinhos, uma boneca e quatro bolas, e desta vez gastou R$54,00. Se os preços unitários do carrinho, da boneca e da bola continuam os mesmos, desde a primeira compra, e a loja não dá descontos, quanto Joãozinho gastaria se tivesse que comprar, na mesma loja, mais quatorze carrinhos, quatro bonecas e 11 bolas?

a) R$ 240,00 b) R$ 236,00 c) R$ 232,00 d) R$ 229,00 e) R$ 175,00

Problema 15. Igual ao problema 15 do Nível 1

Problema 16. Para incentivar os times a jogarem no ataque e fazerem gols, as regras de um torneio de futebol foram ligeiramente alteradas, o time vencedor leva três pontos, o perdedor não ganha pontos, se houver empate com gols, cada time ganha um ponto, e se houver empate sem gols, nenhum time ganha ponto. As estatísticas finais do torneio forneceram as seguintes informações:

I - Cada time jogou com cada outro time apenas uma vez.
II - O número total de pontos de todos os times participantes foi 37.
III - Houve um vencedor em mais de 5 jogos.
IV - Houve um número ímpar de empates com gol, e só um empate sem gols.

Quantos times participaram deste torneio?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Problema 17. Dispõe-se de cinco gravetos de tamanhos diferentes: 2cm, 3cm, 5cm, 7cm e 9 cm, respectivamente. Quantos triângulos podem ser construídos tendo como lados esses gravetos?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 6

Problema 18. Para medir grandes distâncias no espaço, os astrônomos costumam utilizar o ano-luz, que é a distância percorrida pela luz no vácuo, em um ano. Considerando que a velocidade da luz no vácuo seja aproximadamente 300.000km/s e que a distância entre a Terra e a Lua seja 384.000km, podemos dizer que a distância entre a Terra e a Lua é aproximadamente:

a) 1,5 minutos-luz

b) 1,3 segundos-luz

c) 2,0 minutos-luz

d) 2,3 segundos-luz

e) 2,5 minutos-luz

Problema 19. Quantas soluções reais distintas tem a equação $\sqrt{2x^2-10x+9}=x^2-5x+5$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Problema 20. Ordenando em ordem crescente cinco números naturais distintos, verifica-se que a média aritmética dos três maiores é 15 e a média aritmética dos dois menores é 5. Qual a média aritmética dos cinco números?

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

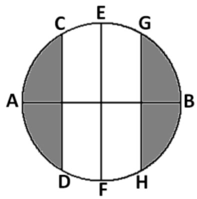
Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
e	a	e	b	b	c	d	d	a	b
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
c	e	a	d	b	b	c	b	c	d

Segunda Fase

Problema 1. Considere os números $A = 2^{2014} + 3^{2014}$ e $B = 4^{2014}$. Qual das afirmações: $A < B$, $A = B$ ou $A > B$ é verdadeira?

Problema 2. Na figura abaixo temos um círculo de raio 2 em que AB é um diâmetro e as cordas CD, EF e GH são perpendiculares ao diâmetro AB e o dividem em quatro partes iguais. Determine a área da região pintada.



Problema 3. Considere três dados convencionais: um azul, um vermelho e um verde, em que cada face contém de 1 a 6 pontos, sendo que cada face contém um número de pontos diferente das demais. Lançando simultaneamente os três dados, quantas possibilidades existem em que a soma dos pontos dos três dados seja igual a 14 e o número de pontos obtidos no dado azul seja diferente do número de pontos obtidos no dado vermelho?

Problema 4. Iniciando cada vez com um número diferente, experimente realizar esta sequência de ações:
1º) Escolha um número inteiro qualquer.
2º) Multiplique-o por 6.
3º) Do resultado subtraia 21.
4º) Divida esse novo resultado por 3.
5º) Desse último resultado subtraia o dobro do número que você escolheu.
Analise os resultados do seu experimento. Mostre, matematicamente, que os resultados obtidos não são apenas uma coincidência.

Problema 5. Os números 1, 1, 2, 2 podem ser dispostos numa tabela quadrada de modo que a soma de cada linha e de cada coluna seja a mesma (vide a figura abaixo).

1	2
2	1

Se colocarmos os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 na tabela quadrada abaixo de modo que a soma dos números em cada linha, cada coluna e cada diagonal seja exatamente a mesma:

a) Encontre qual deve ser o único valor dessa soma.

b) Explique o motivo pelo qual 6, 7, 8 e 9 não podem ocupar a casa central da tabela.

Problema 6. $\sqrt{51}+\sqrt{159}$ é menor, igual ou maior que $\sqrt{53}+\sqrt{153}$? Explique o raciocínio empregado.

Problema 7. O quadrado menor tangencia todos os arcos de circunferência na figura abaixo. Calcule a área da região pintada, sabendo que o lado do quadrado maior mede 4cm.

Problema 8. Mostre que existem apenas seis números naturais de três algarismos: 123, 132, 213, 231, 312 e 321, com a propriedade de que a soma de seus algarismos é igual ao produto de seus algarismos.

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de João Vitor dos Santos - Escola Estadual Medalha Milagrosa)*

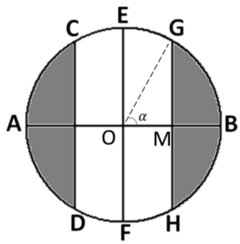
Tomando como exemplo os mesmos números, com expoentes menores:

$2^2 + 3^2$ e $4^2 \rightarrow 4 + 9$ e $16 \rightarrow 13$ e 16
$2^3 + 3^3$ e $4^3 \rightarrow 8 + 27$ e $64 \rightarrow 35$ e 64

Portanto, analogamente, temos que $2^{2014} + 3^{2014} < 4^{2014} \longrightarrow A < B$

Problema 2. *(Resolução da Pauta)*

Considere os pontos O e M sobre o diâmetro AB e o ângulo α= GÔM, como na figura abaixo:



Como a circunferência está dividida em 4 partes iguais, temos que $OM = MB$ e, portanto, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Assim, $sen(\alpha) = \dfrac{MG}{OG}$ mas $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ e $OG = 2$ (raio) então $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{MG}{2} \Rightarrow MG = \sqrt{3}$

Área (setor) $= \dfrac{\alpha \cdot \pi \cdot r^2}{2\pi} = \dfrac{\alpha \cdot r^2}{2} = \dfrac{\frac{\pi}{3} \cdot 2^2}{2} = \dfrac{2}{3}\pi$

Área (triângulo) $= \dfrac{OM \cdot MG}{2} == \dfrac{1 \times \sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Área pintada = A(setor) - A(triângulo) $= \dfrac{2}{3}\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ u.a.$

Área total $= 4 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right) = \dfrac{8\pi - 6\sqrt{3}}{3}$ u.a.

Problema 3. *(Resolução de Ana Luisa Yoshie Ogatta - Colégio Pontagrossense Sepam)*

Realizando as combinações possíveis, encontramos que existem 15 possibilidade de a soma dos três dados ser igual a 14. Porém, em três delas, o número de pontos no dado azul é igual ao número de pontos no dado vermelho, portanto, existem $15 - 3 = 12$ possibilidades da soma ser igual a 14.

Problema 4. *(Resolução de Lucio Enzo Horie - Colégio Neo Master)*

Na segunda ação multiplicamos por 6 nosso número, portanto o número resultante é múltiplo de 6 (e, consequentemente, de 3);
Na terceira ação subtraímos por um número múltiplo de 3 (21), então o número calculado contínua sendo múltiplo de 3. Portanto, na quarta ação, teremos um número inteiro ao se dividir por 3;
No último passo, como você diminui o dobro que havia sobrado ao se dividir por três, restando sempre $\dfrac{-21}{3} = -7$.
Algebricamente, tomando um número inteiro x qualquer, temos:

$$\frac{6x-21}{3} - 2x = \frac{6x-21}{3} - \frac{6x}{3} = \frac{6x-21-6x}{3} = \frac{-21}{3} = -7$$

Problema 5. *(Resolução da Pauta)*

a) O único valor dessa soma é 15 porque $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$ e 45 dividido por $3 = 15$.

b) Temos 4 somas com a casa central da tabela (linha 2, coluna 2 e as duas diagonais) nas quais o resultado deve ser 15 e nas quais apareçam ou o número 6 ou o 7 ou o 8 ou o número 9:
* 1ª possibilidade: com o número 6 na casa central podemos ter apenas 3 somas com resultado 15: $6+1+8 = 15$, $6+2+7 = 15$ e $6+4+5 = 15$
Como precisamos de 4 somas, o número 6 não pode ocupar a casa central da tabela.
* 2ª possibilidade: com o número 7 na casa central podemos ter apenas 2 somas com resultado 15: $7+2+6 = 15$ e $7+3+5 = 15$
Como precisamos de 4 somas, o número 7 não pode ocupar a casa central da

tabela.
* 3ª possibilidade: com o número 8 na casa central podemos ter apenas 3 somas com resultado 15: $8+1+6=15$, $8+2+5=15$ e $8+4+3=15$
Como precisamos de 4 somas, o número 8 não pode ocupar a casa central da tabela.
* 4ª possibilidade: com o número 9 na casa central podemos ter apenas 2 somas com resultado 15: $9+1+5=15$ e $9+2+4=15$
Como precisamos de 4 somas, o número 9 não pode ocupar a casa central da tabela.

Desta forma, concluímos que não é possível colocar na casa central os números 6,7,8 e 9.
Problema 6. *(Resolução de Amy Sakakibara - Escola Desafio)*

Maior, pois mesmo que $\sqrt{53} > \sqrt{51}$, essa diferença será menor que $\sqrt{159}$ e $\sqrt{153}$.

Problema 7. *(Resolução da Pauta)*

Desenhando uma ou as duas diagonais do quadrado maior, calcula-se o valor desta diagonal d aplicando o Teorema de Pitágoras:

$d^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$
$d = 4\sqrt{2}$ cm

O raio do setor circular é igual a metade do lado do quadrado, ou seja, é igual a 2 cm.

O lado l do quadrado menor é obtido subtraindo-se da diagonal do quadrado maior o raio dos dois setores:
$l = 4\sqrt{2} - 2 - 2 = 4\sqrt{2} - 4$

Portanto, a área do quadrado menor é:
$A = (4\sqrt{2} - 4)^2$
$A = 48 - 32\sqrt{2}cm^2$

Problema 8. *(Resolução da Pauta)*

Sejam a, b e c os algarismos do número, $S = a + b + c$, a soma dos algarismos, e $P = abc$, o produto dos algarismos.

Sendo $S \geq 1$, nenhum dos algarismos pode ser igual a zero, pois neste caso teríamos $P = 0$, e portanto $S \neq P$.

Vamos mostrar que os algarismos também devem ser distintos.
Consideremos, por exemplo, $a = b$.
Assim sendo: $S = P \rightarrow 2a + c = a^2c \Rightarrow ca^2 - 2a - c = 0$, que é uma equação do segundo grau em a. Sendo c um número natural não nulo, o discriminante $\Delta = 4 + 4c^2 = 4(c^2 + 1)$ tem que ser um número natural quadrado perfeito, então devemos ter $c^2 + 1 = n^2$ para algum número natural $n > c > 0$.
Mas neste caso teríamos:
$n^2 - c^2 = 1 \Rightarrow (n - c)(n + c) = 1 \Rightarrow n - c = n + c = 1 \Rightarrow c = 0$ e $n = 1$
e essa solução não serve, já que c deve ser diferente de zero. Então os números procurados são formados por três algarismos não nulos e distintos.

Sem perda de generalidade, consideremos $a < b < c$. Então:
$S = P \Rightarrow a + b + c = abc \rightarrow c(ab - 1) = a + b < 2c \Rightarrow ab - 1 < 2 \Rightarrow ab < 3 \Rightarrow a = 1$ e $b = 2$
$3 + c = 2c \Rightarrow c = 3$

Portanto, os únicos números que satisfazem as condições do problema são 123, 132, 213, 231, 312 e 321.

2ª OPMat - Nível 3

Primeira Fase

Problema 1. O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ cuja distância ao ponto $Q = (1, 2)$ é igual a y é uma:

a) circunferência de raio igual a $\sqrt{5}$.

b) parábola com foco no ponto Q.

c) hipérbole com eixo real igual a $\sqrt{5}$.

d) parábola com vértice no ponto Q.

e) um par de retas paralelas.

Problema 2. Seja P produto de todos os números naturais positivos pares menores ou iguais a 2014. Qual a maior potência de 5 que divide P?

a) 5^{201} b) 5^{101} c) 5^{21} d) 5^{10} e) 5^4

Problema 3. Joãozinho pegou um número natural de três algarismos distintos e o escreveu de trás pra frente. A seguir, subtraiu o menor do maior e obteve como resultado 297. Se o primeiro algarismo era o maior dos três, então a diferença entre o primeiro algarismo e o último algarismo era:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 7

Problema 4. Escrevendo todos os inteiros positivos múltiplos de 2 ou 3 em sequência e sem espaços entre eles: 234689101214151618..., qual o 100º algarismo da sequência?

a) 0 b) 1 c) 4 d) 5 e) 8

Problema 5. Sabendo que 997 é um número primo, quantos números maiores que 997 e menores que que 997^2 são relativamente primos com 997? Isto é, quantos números naturais n existem, tais que $997 < n < 997^2$ e mdc$(n, 997)$=1?

a) 498.000 b) 498^2 c) 499.000 d) 996.000 e) 996^2

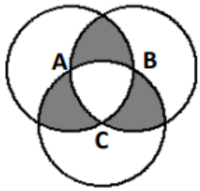
Problema 6. Igual ao problema 6 do Nível 1.

Problema 7. Igual ao problema 4 do Nível 2.

Problema 8 Uma sequência de 2014 números naturais: $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2014}$, é construída da seguinte forma $a_1 = 1$, e para $n > 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 3$. Qual o último termo desta sequência?

a) $2^{2014} + 3$ b) $2^{2014} - 3$ c) 2^{2014} d) $2^{2015} + 3$ e) $2^{2015} - 3$

Problema 9. Na figura a seguir, temos três circunferências de centros A, B e C e todas de raios iguais a 1 cm:



Qual a área da parte pintada?

a) $\frac{\pi}{4} cm^2$ b) $\frac{\pi}{2} cm^2$ c) $\frac{\pi}{6} cm^2$ d) $\frac{4\pi}{3} cm^2$ e) $\frac{5\pi}{12} cm^2$

Problema 10. Simplificando a expressão $\frac{sen(3x) + cos(3x)}{cos\, x - sen\, x?}$, válida para os valores de x que não anulam o denominador, obtemos:

a) $1 + \frac{1}{2} sen x$

b) $sen(2x) + cos(2x)$

c) $sen(2x) - cos(2x)$

d) $1 + 2sen(2x)$

e) $sen(2x)$

Problema 11. Igual ao problema 5 do Nível 1

Problema 12. Igual ao problema 5 do Nível 2

Problema 13. Igual ao problema 11 do Nível 2

Problema 14. A função ϕ de Euler é uma função $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ que associa a cada número natural n positivo, a quantidade de números naturais menores que n e que são primos com n. Por exemplo, para n=12, os números menores que 12 que são primos com 12 são 1, 5, 7 e 11, logo $\phi(12) = 4$. Com base nesta definição $\phi(2^{2014})$ é:

a) $2^{2014} - 1$ b) 2014 c) 2^{2013} d) $2^{2013} + 1$ e) 2013

Problema 15. Ao multiplicar 28 por certo número natural, usando uma calculadora, um aluno digitou errado o algarismo das dezenas do multiplicador, digitando 5 no lugar do alga- rismo correto, que era 4, e digitando 2 no lugar do algarismo correto das centenas, que era 3. Com isso o resultado obtido foi 7028. Se tivesse digitado corretamente o multiplicador, o resultado seria um número:

a) primo

b) quadrado perfeito

c) cubo perfeito

d) múltiplo de 5

e) múltiplo de 7

Problema 16. Dada uma matriz A quadrada de ordem n, podemos representar a linha-i pela n-upla ordenada $L_i(A) = (a_{l1}, a_{l2}, ..., a_{in})$ e a coluna-j pela n-upla ordenada $C_j(A) = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})$. Definindo o produto de duas n-uplas ordenadas por: $(a_1, a_2, ., a_n).(b_1, b_2, ., b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + .. + a_n b_n$, e se A e B são duas matrizes quadradas de ordem n e B^T é a matriz transposta de B, o elemento d_{ij} da matriz $D = B^T A$ é:

a) $L_i(B).C_j(A)$

b) $C_i(B^T).C_j(A)$

c) $C_i(B).L_j(A)$

d) $C_i(B).C_j(A)$

e) $L_i(B).L_j(A)$

Problema 17. Efetuando a soma:

$$\sum_{n=1}^{2014}[(-1)^n n^2] = -1^2+2^2-3^2+\cdots+2014^2$$

obtemos:

a) 1007×2015

b) 2015

c) 2015^2

d) 1007×2014

e) $1007^2 - 1$

Problema 18. Igual ao problema 16 do Nível 2

Problema 19. Igual ao problema 15 do Nível 1

Problema 20. Considere as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x):\begin{cases} 2x+1, \text{se } x<1 \\ x+2, \text{se } x\geq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x):\begin{cases} 2x-1, \text{se } x<1 \\ x+1, \text{se } x\geq 1 \end{cases}.$$

Pode-se afirmar que $f(g(2x))$ é dada por:

a) $f(g(2x)) = \begin{cases} 2x-1, \text{se } x<1 \\ 2x+3, \text{se } x\geq 1 \end{cases}$

b) $f(g(2x)) = \begin{cases} 8x-1, \text{se } x<1 \\ -2x+1, \text{se } x\geq 1 \end{cases}$

c) $f(g(2x)) = \begin{cases} 8x-1, \text{se } x<\dfrac{1}{2} \\ 2x+3, \text{se } x\geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

d) $f(g(2x)) = \begin{cases} 4x-1, \text{se } x < \dfrac{1}{2} \\ 2x-3, \text{se } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

e) $f(g(2x)) = \begin{cases} 4x+1, \text{se } x < 1 \\ x+3, \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

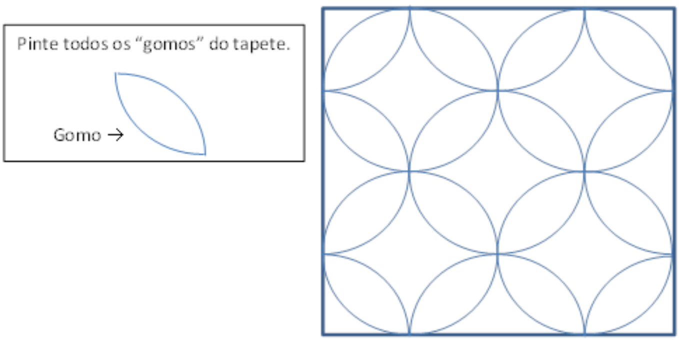
Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
b	d	c	a	e	a	b	e	b	d
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
d	b	c	c	e	d	a	b	b	c

Segunda Fase

Problema 1. Sejam p e q dois números naturais tais que $p > q > 1$. Mostre que se q é um divisor de p, então $q \leq \frac{p}{2}$.

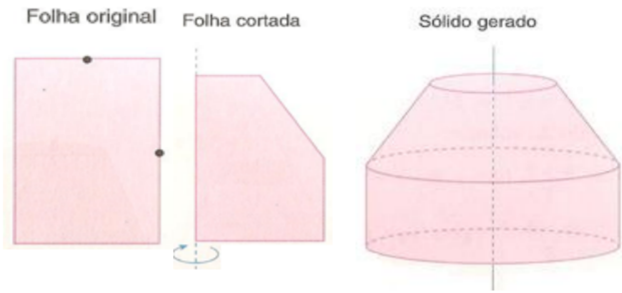
Problema 2. O tapete quadrado abaixo tem 8 metros de lado. Calcule a área da região pintada.



Problema 3. Prove que 5 divide $2^n + 3^n$ sempre que n é um número ímpar positivo.

Problema 4. Duas linhas férreas se cruzam, formando um ângulo reto. Dois trens se aproximam a grande velocidade do cruzamento, tendo um deles partido de uma estação situada a 40km do cruzamento e o outro de uma estação que dista do mesmo local 50km. O primeiro tem uma velocidade de 800m por minuto e o segundo, 600m por minuto. Quantos minutos decorrem desde o momento da partida até que as locomotivas se encontrem à menor distância entre si e qual será essa distância?

Problema 5. Uma folha de papel retangular mede 20 cm por 30 cm. Ligam-se os pontos médios de dois lados consecutivos e corta-se a folha no segmento que liga esses pontos. Em seguida gira-se a parte restante em torno do lado maior. Determine a área total e o volume do sólido.



Problema 6. A sequência (a_1, a_2, a_3) é uma progressão aritmética, e a soma de seus termos vale 96. A sequência (b_1, b_2, b_3) é uma progressão geométrica decrescente. Somando-se os termos correspondentes das duas progressões obtém-se 66, 56 e 58, respectivamente. Encontre os termos dessas progressões.

Problema 7. Um professor de matemática propõe o seguinte: um dos alunos deve pensar um número inteiro entre 9 e 60 e subtrair desse número a soma de seus dois algarismos. Qual a probabilidade do professor acertar, na primeira tentativa, o número obtido pelo aluno após a operação solicitada?

Problema 8. Mostre que existem apenas seis números naturais de três algarismos: 123, 132, 213, 231, 312 e 321, com a propriedade de que a soma de seus algarismos é igual ao produto de seus algarismos.

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Gabriela Baier - Colégio Sagrada Família)*

1ª) Se $q \in \mathbb{N}$ e $q > 1$, então $q \geq 2$

2ª) Se $p > q > 1$ e $q \geq 2$, então $p > q \geq 2$

3ª) Se p é divisível por q, então $\frac{p}{q} \geq 2 \longrightarrow \frac{p}{2} \geq q$

Problema 2. *(Resolução de Alexandre Domingues Caspechaque - Colégio Pontagrossense Sepam)*

Cada círculo está inserido dentro de um quadrado de lado $4m$ e, portanto, possui raio $2m$. Além disso, a parte de dentro de cada círculo que não pertence aos gomos, tem área igual a região dentro do quadrado que não pertence ao círculo. Assim temos:

$A_{quadrado} = 4^2 = 16m^2$
$A_{círculo} = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \cong 12,56m^2$
$A_{fora} = A_{quadrado} - A_{círculo} = 16 - 12,56 = 3,44\ m^2$
$A_{gomos} = 12,56 - 3,44 = 9,12m^2$

Assim, basta multiplicarmos por 4 para encontrarmos a área de todos os gomos:

$A_T = 4 \cdot (9,12) = 36,48m^2$

Problema 3. *(Resolução de João Pedro Herche Cavasotti - Colégio Pontagrossense Sepam)*

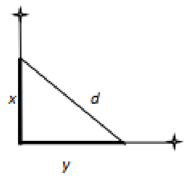
Podemos ver que $2^1 = 2$ e $3^1 = 3$, somando-os temos 5. De outro modo, temos $2^3 = 8$ e $3^3 = 27$, somando-os temos 35.

Em $2^5 = 32$ e $3^5 = 243$, somando-os temos 275. Já em $2^7 = 128$ e $3^7 = 2187$, somando-os temos 2315.

Ou seja, 2 elevado a um número ímpar positivo, sempre terminará em 2 ou 8 e 3 elevado a um número ímpar positivo, sempre terminará em 3 ou 7. Quando o último alagrismo de 2^n é 2, o último algarismo de 3^n é 3; somando-os, teremos um número terminado em 5, que será múltiplo de 5. Quando o último alagrismo de 2^n é 8, o último algarismo de 3^n é 7; somando-os, teremos $8 + 7 = 15$, sendo que o número terminado em 5 sempre será múltiplo de 5. Isso comprova que que 2^n+3^n é divisível por 5, sempre que n é um número ímpar positivo.

Problema 4. *(Resolução da Pauta)*

A partir do enunciado, podemos esboçar o gráfico abaixo, que mostra o trajeto de cada um dos trens:



Sabendo que v(1º trem) = 800 m/min = 0,8 Km/min e v(2º trem) = 600 m/min = 0,6 Km/min, podemos considerar $x = 40-0,8t$ e $y = 50-0,6t$, a posição dos trens em função do tempo. Então, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow d^2 = (40-0,8t)^2 + (50-0,6t)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d^2 = 1600-64t+0,64t^2+2500-60t+0,36t^2 \Rightarrow d^2 = t^2-124t+4100$$

A parábola $t^2-124t+4100=0$ tem concavidade voltada para cima. Desta forma, podemos calcular o tempo mínimo:

$$t_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{124}{2} = 62 \text{ minutos}$$

A distãncia mínima será:

$d^2 = (40-0,8\cdot 62)^2 + (50-0,6\cdot 62)^2$

$d^2 = 92,16+163,84 \Rightarrow d^2 = 256 \Rightarrow d = 16$ km

Problema 5. *(Resolução da Pauta)*

Área total do sólido:
Área da base do cilindro: $S_1 = \pi\cdot 20^2 = 400\pi cm^2$
Área lateral do cilindro: $S_2 = 2\pi\cdot r\cdot h = 2\pi\cdot 20\cdot 15 = 600\pi cm^2$
Geratriz do tronco de cone: $g^2 = 15^2+10^2 = 225+100 = 325 \longrightarrow g = 5\sqrt{13}$ cm
Geratriz do cone completo: $g = 10\sqrt{13}$ cm
Área lateral do cone completo: $S = \pi\cdot r\cdot g = \pi\cdot 20\cdot 10\sqrt{13} = 200\pi\sqrt{13}cm^2$

Área lateral do cone menor: $S = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 10 \cdot 5\sqrt{13} = 50\pi\sqrt{13}cm^2$
Área lateral do tronco de cone: $S_3 = 200\pi\sqrt{13} - 50\pi\sqrt{13} = 150\pi\sqrt{13}cm^2$
Área da base superior do tronco: $S_4 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi cm^2$
Área total do sólido=$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = (1100\pi + 150\pi\sqrt{13}cm^2)$

Volume do sólido:
Volume do cilindro: $V_c = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 20^2 \cdot 15 = 6000\pi cm^3$
Volume do cone maior: $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 400 \cdot 30 = 4000\pi cm^3$
Volume do cone menor: $V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 100 \cdot 15 = 500\pi cm^3$
Volume do tronco de cone: $V_t = V_1 - V_2 = 3500\pi cm^3$
Volume do sólido: $V_c + V_t = 9500\pi cm^3$

Problema 6. *(Resolução de Guilherme Ari Scortegagna - Colégio Neo Master)*

Como os termos indicados por a se referem a uma p.a., o valor central será a média da soma dos termos, portanto: $a_1 = 32 - r$; $a_2 = 32$; $a_3 = 32 + r$, com $r > 0$.

Portanto:
$a_1 + b_1 = 66 \longrightarrow b_1 = 66 - (32 - r) \longrightarrow b_1 = 34 + r$
$a_2 + b_2 = 56 \longrightarrow b_2 = 56 - 32 \longrightarrow b_2 = 24$
$a_3 + b_3 = 58 \longrightarrow b_3 = 58 - (32 + r) \longrightarrow b_3 = 26 - r$

Para que b seja uma PG, $r = 14$, portanto teremos que $a_1 = 18$; $a_2 = 32$; $a_3 = 46$; $b_1 = 48$; $b_2 = 24$; $b_3 = 12$.

Problema 7. *(Resolução de Elias Estevão Pereira dos Santos - Centro Estadual de Educação Profissional)*

Qualquer um desses números quando tem subtraído de si a soma de seus algarismos resulta em um múltiplo de 9.
Logo, como foi o professor que propôs essa brincadeira, ele sabe dessa propriedade. Sendo assim, os resultados possíveis são: 9, 18, 27, 36 e 45. Pois o menor número é 10 (que resulta em 9) e o maior é 59 (que resulta em 45).

São cinco possíveis resultados, logo, a probabilidade do professor acertar na primeira tentativa é de $\dfrac{1}{5} = 20\%$

Problema 8. *(Resolução de Lucas Matheus Sandeski - Instituto Estadual de Edu-*

cação Professor César Pietro Martinez)

1- Os 3 algarismos devem ser iguais (mesmo que invertidos) para que o resultado seja o mesmo ao serem multiplicados, pois devem aparecer apenas esses números ao se fazer seu mínimo múltiplo comum.

2- Este número é de 3 algarismos pequenos, diferentes de zero. O zero não deve aparecer pois qualquer número multiplicado por zero é zero. É pequeno, pois a multiplicação de 3 números gera números grandes e a maior soma possível é igual a 27 $(9+9+9=27)$

3- Não pode aparecer dois ou três números 1, pois $1\cdot1\cdot n=n$, mas $1+1+n=n+2$, e $1\cdot1\cdot1=1$, mas $1+1+1=3$

4- Deve conter os números 1 e 2, pois $3\cdot3\cdot3=27$, que ja extrapola a soma máxima estimada

5- Não pode conter mais de um número 2 ou mais de um número 3, pois em nenhum dos casos a soma do número de três algarismos é igual a multiplicação.

6- Portanto, a única opção que resta é que os números possíveis sejam permutações dos algarismos 1, 2 e 3, resultando em apenas estes seis resultados.

2ª OPMat - Nível 4

Primeira Fase

Problema 1. O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ cuja distância ao ponto $Q = (1,2)$ é igual a y é uma:

a) parábola com foco no ponto Q.

b) circunferência de raio igual a $\sqrt{5}$.

c) hipérbole com eixo real igual a $\sqrt{5}$.

d) parábola com vértice no ponto Q.

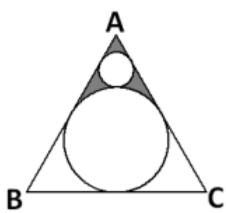
e) um par de retas paralelas.

Problema 2. Igual ao problema 2 do Nível 3

Problema 3. Igual ao problema 4 do Nível 3.

Problema 4. Igual ao problema 8 do Nível 3.

Problema 5. Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero de lado 10 cm, a circunferência maior é tangente aos três lados do triângulo e a circunferência menor é tangente a dois lados e à circunferência maior:



Qual a área da parte pintada?

a) $\dfrac{200\sqrt{3} - 125\pi}{9} cm^2$

b) $\dfrac{225\sqrt{3}-125\pi}{81}cm^2$

c) $\dfrac{225\sqrt{3}-100\pi}{27}cm^2$

d) $\dfrac{250\sqrt{3}-120\pi}{81}cm^2$

e) $\dfrac{75\sqrt{3}-25\pi}{9}cm^2$

Problema 6. Igual ao problema 5 do Nível 3.

Problema 7. Igual ao problema 4 do Nível 2.

Problema 8. Igual ao problema 5 do Nível 2.

Problema 9. Igual ao problema 5 do Nível 1.

Problema 10. Igual ao problema 11 do Nível 2.

Problema 11. Igual ao problema 10 do Nível 3.

Problema 12. Igual ao problema 14 do Nível 3.

Problema 13. Um polinômio $P(x)$ de grau 3 deixa resto 12 quando dividido por $x-4$, resto 48 quando dividido por $x-5$ e resto 120 quando dividido por $x-6$. Se $P(0)=-12$, qual o resto da divisão de $P(x)$ por $x-7$?

a) 150 b) 180 c) 200 d) 240 e) 300

Problema 14. Igual ao problema 17 do Nível 3.

Problema 15. Ao multiplicar 28 por certo número natural, usando uma calculadora, um aluno digitou errado o algarismo das dezenas do multiplicador, digitando 5 no lugar do algarismo correto, que era 4, e digitando 2 no lugar do algarismo correto das centenas, que era 3 . Com isso o resultado obtido foi 7028. Se tivesse digitado corretamente o multiplicador, o resultado seria um número:

a) primo

b) múltiplo de 7

c) mútiplo de 5

d) quadrado perfeito

e) cubo perfeito

Problema 16. Igual ao problema 16 do Nível 3.

Problema 17. Igual ao problema 15 do Nível 1.

Problema 18. Igual ao problema 16 do Nível 2.

Problema 19. Igual a questão 20 do Nível 3.

Problema 20. Todo número complexo $z = x + yi$, onde x e y são números reais, coordenadas do afixo de z no plano xy, e $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, pode ser representado na forma matricial:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

Se representarmos uma figura plana no plano xy, cada ponto da figura representa um número complexo. Multiplicando cada ponto da figura pelo número complexo de módulo igual a 1 e argumento $\theta > 0$, giramos a figura em torno da origem de um ângulo θ no sentido anti-horário, mantendo a forma da figura, e as distâncias de cada ponto à origem. Portanto, para girarmos uma figura no plano xy, de um ângulo de 60° no sentido anti-horário, podemos representar cada ponto na forma matricial e multiplicá-los pela matriz:

a)

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

e)

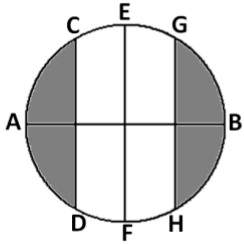
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	d	a	e	c	e	b	b	d	c
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
d	c	d	a	b	d	b	b	c	b

Segunda Fase

Problema 1. Na figura abaixo temos um círculo em que AB é um diâmetro e as cordas CD, EF e GH são perpendiculares ao diâmetro AB e o dividem em quatro partes iguais.



Determine a razão entre a área da parte pintada e a área da parte não pintada do círculo.

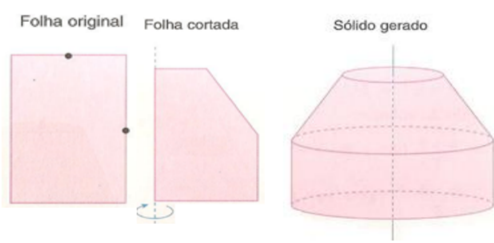
Problema 2. Prove que 5 divide $2^n + 3^n$ sempre que n é um número ímpar positivo.

Problema 3. O número complexo z é tal que $5 \cdot \left(\frac{z-1}{2}\right) - i \cdot \left(\frac{z+1}{2}\right) = 3 - i$

a Determine o módulo de z.

b A sequência $(z, z^5, z^9, z^{13}, \ldots)$ é uma P.A. ou uma P. G.? Qual a sua razão?

Problema 4. Uma folha de papel retangular mede 20 cm por 30 cm. Ligam-se os pontos médios de dois lados consecutivos e corta-se a folha no segmento que liga esses pontos. Em seguida gira-se a parte restante em torno do lado maior. Determine a área total e o volume do sólido.



Problema 5. Mostre que existem apenas seis números naturais de três algarismos: 123, 132, 213, 231, 312 e 321, com a propriedade de que a soma de seus algarismos é igual ao produto de seus algarismos.

Problema 6. Cada termo do desenvolvimento do binômio $(x+a)^n$, $n>6$ é escrito em uma etiqueta (todas as etiquetas iguais). O mesmo se faz com os termos de $(y+b)^n$. As etiquetas são todas colocadas numa urna e retira-se uma ao acaso. Determine a probabilidade de ter sido escolhida uma etiqueta com:

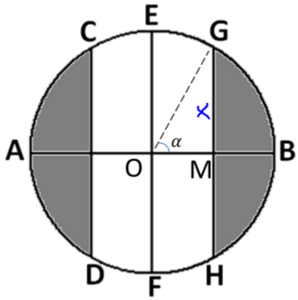
a) O termo $\binom{n}{6} \cdot a^6 \cdot x^{n-6}$.

b) um termo cujo coeficiente binomial é $\binom{n}{6}$.

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Lenon Diniz Seixas - Colégio Sagrada Família)*

Considerando o triângulo GÔM abaixo:



Sabendo que o círculo é dividido em 4 partes iguais, temos que $OM = MB = \dfrac{AB}{4}$ e $OG = \dfrac{AB}{2}$. Então, a fim de calcularmos o ângulo α, temos que:

$$cos(\alpha) = \frac{OM}{OG} = \frac{\frac{AB}{4}}{\frac{AB}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Sendo $MG = x$, temos que

$$sen(\frac{\pi}{3}) = \frac{x}{\frac{AB}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{AB}{2} = x \Rightarrow x = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$$

E sua área será:

$$A_1 = \frac{\frac{1}{4}AB \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{(AB)^2\sqrt{3}}{32}$$

Portanto, a área total dos quatro triângulos formados iguais a este é:

$$A_{\triangle} = 4 \cdot \frac{(AB)^2\sqrt{3}}{32} = \frac{(AB)^2\sqrt{3}}{8}$$

Sabendo que a área total do círculo é $A_t = \frac{(AB)^2}{4}\pi$, temos que a área da parte branca é de:

$$A_B = \frac{(AB)^2}{4}\pi \cdot \frac{2}{6} + \frac{(AB)^2\sqrt{3}}{8}$$
$$A_B = \frac{2(AB)^2\pi + 3(AB^2)\sqrt{3}}{24}$$

E a área pintada será de:

$$A_P = A_t - A_B$$

$$A_P = \frac{(AB)^2}{4}\pi - \frac{2(AB)^2\pi + 3(AB^2)\sqrt{3}}{24}$$

$$A_P = \frac{4(AB)^2\pi - 3(AB^2)\sqrt{3}}{24}$$

Finalmente, temos que:

$$\frac{A_P}{A_B} = \frac{\frac{4(AB)^2\pi - 3(AB^2)\sqrt{3}}{24}}{\frac{2(AB)^2\pi + 3(AB^2)\sqrt{3}}{24}} = \frac{(AB)^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{(AB)^2(2\pi + 3\sqrt{3})} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}$$

$$\frac{A_P}{A_B} = \frac{8\pi^2 - 12\sqrt{3}\pi + 27}{4\pi^2 - 27}$$

Problema 2. *(Resolução de Mateus Antonio Chinelatto - Colégio Marista Pio XII)*

Testando os valores de n ímpares:

$2^1 + 3^1 = 2 + 3 = 5$
$2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$
$2^5 + 3^5 = 32 + 243 = 275$
$2^7 + 3^7 = 128 + 2187 = 2315$

Para todo n ímpar positivo a potência de 2 irá alternar o último algarismo entre 2 e 8 enquanto a potência de 3 irá alternar entre 3 e 7. Sendo assim, na soma, a unidade sempre será 5, tornando o número divisível por 5.

Problema 3. *(Resolução de Mariana Lourenço Sturzeneker - Colégio Marista Pio XII)*

a) $5\left(\dfrac{z-1}{2}\right)-i\left(\dfrac{z+1}{2}\right)=3-i$
$\dfrac{5z-5}{2}-\dfrac{zi-i}{2}=3-i$
$5z-zi-5-i=6-2i$
$z(5-i)-5-i=6-2i$
$z(5-i)=11-i$
$z=\dfrac{11-i}{5-i}$
$z=\dfrac{(11-i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}$
$z=\frac{28+3i}{13}$

Portanto:

$|z|=\sqrt{(\frac{28}{13})^2+(\frac{3}{13})^2}$
$|z|=\dfrac{\sqrt{793}}{13}$

b) $z\cdot z^4=z^5$
$z^5\cdot z^4=z^9$

A sequência é uma PG de razão $q=z^4$

$q=\left(\dfrac{28+3i}{13}\right)^4$
$q=\left(\dfrac{775+168i}{169}\right)^2$
$q=\dfrac{572401+260400i}{28561}$

Problema 4. *(Resolução de Matheus Henrique do Amaral Prates - Colégio Pontagrossense Sepam)*

Geratriz: $G = \sqrt{10^2 + 15^2}$
$G = 5\sqrt{13}$ cm

Área total $\rightarrow A_T$
Área do círculo menor $\rightarrow A_{B1}$
Área do círculo maior $\rightarrow A_{B2}$
Área lateral do cilindro $\rightarrow A_{L1}$
Área lateral do tronco de cone $\rightarrow A_{L2}$

Portanto:

$A_T = A_{B1} + A_{B2} + A_{L1} + A_{L2}$
$A_T = \pi \cdot 10^2 + \pi \cdot 20^2 + 2\pi \cdot 20 \cdot 15 + (\pi \cdot 20 \cdot 10\sqrt{13} - \pi \cdot 10 \cdot 5\sqrt{13})$
$A_T = \pi(1100 + 150\sqrt{13})cm^2$

Volume total $\rightarrow V_T$
Volume do cilindro $\rightarrow V_{ci}$
Volume do cone $\rightarrow V_{co}$

Portanto:

$V_T = V_{ci} + V_{co}$
$V_T = \pi \cdot 20^2 \cdot 15 + \left(\frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 30}{3} - \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 15}{3}\right)$
$V_T = 9500\pi cm^3$

Problema 5. *(Resolução da Pauta)*

Sejam a, b e c os algarismos do número, $S = a + b + c$, a soma dos algarismos, e $P = avc$, o produto dos algarismos.

Sendo $S \geq 1$, nenhum dos algarismos pode ser igual a zero, pois neste caso teríamos $P = 0$, e portanto, $S \neq P$.

Vamos mostrar que os algarismos também devem ser distintos.
Consideremos, por exemplo, $a = b$. Assim sendo: $S = P \to 2a + c = a^2c \to ca^2 - 2a - c = 0$, que é uma equação do segundo grau em a. Sendo c um número natural não nulo, para que a também seja um número natural não nulo, o discriminante $\delta = 4 + 4c^2 = 4(c^2 + 1)$ tem que ser um número natural quadrado perfeito, então devemos ter $c^2 + 1 = n^2$ para algum número natural $n > c > 0$. Mas neste caso teríamos:
$n^2 - c^2 = 1 \to (n - c)(n + c) = 1 \to n - c = n + c = 1 \to c = 0$ e $n = 1$
e essa solução não serve, já que c deve ser diferente de zero. Então os números procurados são formados por três algarismos não nulos e distintos.

Sem perda de generalidade, consideremos $a < b < c$. Então:
$S = P \to a + b + c = abc \to c(ab - 1) = a + b < 2c \to ab - 1 < 2 \to ab < 3 \to a = 1$ e $b = 2$
$3 + c = 2c \to c = 3$
Portanto, os únicos números que satisfazem as condições do problema são 123, 132, 213, 231, 312 e 321.

Problema 6. *(Resolução de Flávia Luisa pires Enembreck - Colégio Neo Master)*

a) Se há o termo $\binom{n}{6} \cdot a^6 \cdot x^{n-6}$, que é equivalente a T_7, então a probabilidade de tirar T_7 é 1 possibilidade entre $2(n+1)$, ou seja,

$$p = \frac{1}{2n+2}$$

b) Para que o coeficiente seja $\binom{n}{6}$, corresponde-se ao termo 7. Diante de dois binômios desenvolvidos, este termo T_7 poderá ser escolhido de duas formas diferentes.

Portanto, $p = \dfrac{2}{2n+2} = \dfrac{1}{n+1}$

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

3ª OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

"Promovendo a inclusão social e ajudando a mudar o cenário da educação."

Premiados

A Cerimônia de Premiação da *3ª Olimpíada Pontagrossense de Matemática* ocorreu no dia 05 de dezembro de 2015, no Cine Teatro PAX, às 14h00, para os alunos dos Níveis **1** (6º e 7º anos do Ensino Fundamental II), **2** (8º e 9º anos do Ensino Fundamental II), **3** (1ª e 2ª séries do Ensino Médio) e **4** (3ª e 4ª séries do Ensino Médio e aqueles estudantes que tenham concluído Ensino Médio há menos de um ano e não tenham ingressado em nenhum curso superior, quando da realização da primeira fase da OPMat).

A Cerimônia de Premiação contou com a presença das seguintes autoridades:

- Prof. Carlos Luciano Sant'Ana Vargas - Reitor da Universidade Estadual de Ponta Grossa
- Profa. Marilisa do Rocio Oliveira - Pró-Reitora de Extensão e Assuntos Culturais da UEPG
- Sr. Amaury dos Martyres - Pró-Reitor de Assuntos Administrativos da UEPG
- Prof. Ariangelo Hauer Dias - Pró-Reitor de Planejamento da UEPG
- Profa. Maria Izabel Vieira - Chefe do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa
- Prof. Luiz Fabiano dos Anjos - Coordenador da Educação Básica do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa
- Profa. Sandra Mara Dias Pedroso - Coordenadora de Matemática do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa
- Prof. Luiz Alexandre Gonçalves Cunha - Diretor do Setor de Ciências Exatas e Naturais da UEPG
- Profa. Luciane Grossi - Chefe do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG
- Profa. Marli Terezinha Van Kan - Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPG
- Profa. Elisangela dos Santos Meza - Coordenadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Na ocasião foram premiados 233 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 67,14% dos alunos que participaram da segunda fase da 3ª OPMat): 20 com medalhas de ouro; 40 com medalhas de prata; 60 com medalhas de bronze e 113 com medalhas de menção honrosa.

Foram entregues troféus para as escolas e para os professores dos dois alunos que obtiveram a maior pontuação em cada nível (1, 2, 3 e 4) da 3ª OPMat, sendo um de escola particular e um de escola pública. Além disso, todos os professores cujos alunos foram premiados receberam certificados de congratulações, assim como todas as escolas participantes da 3ª OPMat.

Nível 1

Troféu

- Danilo Beltrame (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Varnava Sanarov Rusakoff (Colégio Estadual Francisco Pires Machado)

Ouro

- Danilo Beltrame (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lucas Perondi Kist (Escola Tales de Mileto)
- Giovana Madureira (Colégio Marista Pio XII)
- Heric Bruno Fontana (Colégio Marista Pio XII)
- Moreno Yves Martins dos Santos (Colégio São Francisco)

Prata

- Varnava Sanarov Rusakoff (Colégio Estadual Francisco Pires Machado)
- Thiago Martins Figueiredo (Colégio Neo Master)
- Pedro Henrique da Silva Costa (Colégio Sant'Ana)
- Renata Nadal Baier (Colégio Marista Pio XII)
- Gustavo Henrique Padilha Bonfim (Colégio Sagrada Família)

- Barbara de Rezende Attab (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Eduarda Banach Nunes (Escola Desafio)
- Fernanda Aparecida Marcondes (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Renato Mandalozzo Tebcherani (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Andre Gustavo Kichileski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)

Bronze

- Daniella Turek (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Lívia Maria Mayer (Colégio Integração)
- Thaissa Fernanda Soares de Souza (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Adriel de Matos Ribeiro (Colégio Estadual Santa Maria)
- Anna Luisa Thiem (Colégio Marista Pio XII)
- Hemilly Wenglarek (Escola Bom Pastor)
- Isabele Bassani Cambui de Melo (Colégio Estadual Santa Maria)
- Barbara Zappe Rupel (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gustavo Henrique Teixeira Wiechaz (Colégio Integração)
- Gabrielle Tozetto Pereira (Colégio Sant'Ana)
- Kalinka Brick dos Santos (Colégio Marista Pio XII)
- Pedro Ramos Pereira (Escola Tales de Mileto)
- Gabriel de Oliveira (Colégio Neo Master)
- Gabrielly Aparecida Chaves (Colégio Integração)
- Lígia Fernanda Inglês dos Santos (Colégio Sant'Ana)

Menção Honrosa

- Ana Luiza Stockler (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Bernardo Teixeira Freitas Moleta (Escola Tales de Mileto)
- Fernanda Beatriz Marques (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Gabriel Augusto do Nascimento (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Iume Kame Fernnades Land (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Julia Kapp Lepinski (Escola Tales de Mileto)
- Mateus Luiz Bach (Escola Bom Pastor)
- Thiago Felipe de Freitas da Luz (Colégio Sant'Ana)
- Eduarda Aparecida Coloda (Colégio Estadual Santa Maria)
- Nathaly Caroline Antonio (Colégio Estadual Santa Maria)
- Pietra Bernardelli Fadel (Colégio Neo Master)
- Giovana Kuan (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Gustavo Konofal da Silva (Colégio Sagrada Família)
- Marco Aurélio da Rocha (Colégio São Francisco)
- Matheus Felipe Lazarotto (Colégio Sant'Ana)
- Quiara Camargo dos Santos (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Tais Sousa Maestri (Colégio Marista Pio XII)
- Gabriela Brasil Silva (Colégio Marista Pio XII)
- Isabela Alberti Fischer (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Maria Eduarda Noumann (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Brendha Maria Oliveira dos Santos (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Lívia Cristina Fipke (Colégio Sant'Ana)
- Thiago Portella (Escola Estadual Medalha Milagrosa)

- Victor Augusto Schneider (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Barbara Feducenko Moreira (Colégio Sant' Ana)
- Eduardo Machado Dechandt (Colégio Neo Master)
- Gustavo Burgath (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Natasha Tumps Cabral (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Gabriel Denkiewicz (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Eduardo Kuller Macedo (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Gabriella Fernandes da Silva (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Henrick Scheifer Wernek Machado (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Karolina Oleniski Basso (Colégio Estadual Santa Maria)
- Livia Patrice Lopes de Souza Borba (Colégio Neo Master)
- Rita Flora Silva Bellicanta (Colégio Sagrada Família)
- Vinicius Dzulinski da Silva (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Eduardo Vouk Ribeiro (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Flavia Luciana dos Anjos (Colégio Estadual Francisco Pires Machado)
- Natalia Sanches (Colégio Sagrada Família)
- Beatriz Vieira Harmatiuk (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Daiana Gomes de Oliveira (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Emelly de Oliveira Hellmann (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Gabriel Gravronski (Escola Tales de Mileto)
- João Victor Waldeck de Oliveira (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Karyn Maria Wenglarek (Colégio Sagrada Família)
- Kauany Gabrielly Lascoski (Colégio Sagrada Família)

- Luísa de Andrade de Camargo (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Luiz Gabriel de Andrade (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Matheus Alves Galvão (Colégio Sagrada Família)
- Danilo Gonçalves Santos (Colégio Integração)
- Anna Julia Pedroso (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Kevin Kurpias Rodrigues (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Leonardo Kauã de Lara (Colégio Estadual 31 de Março)
- Luciana Gabriela Stockler (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Mateus Enrick Pitura (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Rafael José Padilha Ferraz (Colégio Estadual Santa Maria)
- Vinicius Coelho (Colégio Sant’ Ana)
- Ana Helena Machado (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Anna Laura Rodrigues (Colégio Sagrada Família)
- Giulliana Pinheiro (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Otavio Silveira (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Camille de Almeida Ribas (Colégio São Francisco)
- Cesar Jeremias dos Santos Junior (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Marcelo Ricardo Junior (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Pedro Lucca Hurko (Colégio Sagrada Família)
- Vinicius da Rosa Cruz (Colégio Estadual 31 de Março)

Nível 2

Troféu

- Lucio Enzo Horie (Colégio Neo Master)
- Elizane Veronica Pereira dos Santos (Escola Estadual Jesus Divino Operário)

Ouro

- Lucio Enzo Horie (Colégio Neo Master)
- Rodrigo de Oliveira (Colégio Marista Pio XII)
- João Pedro Wardani de Castro (Colégio Sagrada Família)
- Isis Fernandes do Carmo (Colégio Sant' Ana)
- Davi Moreira dos Santos Junior (Colégio São Francisco)

Prata

- Elizane Veronica Pereira dos Santos (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Otávio Winnik Carvalho Gouvêia (Colégio Sagrada Família)
- Gabriel Henrique Kwiatkovski Godinho (Colégio Neo Master)
- Gabriel Dalzoto Salles (Colégio Sagrada Família)
- Renata Cury Caruso (Colégio Sant' Ana)
- Alice Santos Carmo Cabral (Escola Tales de Mileto)
- Amy Sakakibara (Escola Desafio)
- João Pedro Cavalli Neto (Colégio Sagrada Família)
- Eduarda Grobe Alberti (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Cassiano José Kounaris Fuziki (Colégio Pontagrossense Sepam)

Bronze

- Elaine Cristina Margraf Martins (Colégio Sant' Ana)
- Ketlen Cristina Teixeira (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Rafael Antonio Chinelatto (Colégio Marista Pio XII)
- Hellen Lima Ferreira (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Matheus Filip de Oliveira (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Amanda Franczak da Silva (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Gianluca Teixeira de Freitas Moleta (Escola Tales de Mileto)
- Gustavo Ionak Cabral (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Hailyn Ribas de Lima (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Jordi Pujol Ricarte (Colégio Marista Pio XII)
- Luan Rodrigo Jensen (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Yasmim Brick Santos (Colégio Marista Pio XII)
- Gabriel Angelo Santos (Colégio Sant' Ana)
- Kiara Paes de Castro (Colégio Integração)
- Gustavo Kossar Van Thienen da Silva (Colégio Estadual Becker e Silva)

Menção Honrosa

- Matheus Cunha Muka (Colégio Sant' Ana)
- Miki Helder Durvalino Botelho Ribeiro (Colégio Neo Master)
- Sabrina Machado (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Aléxia Liz Narok Stevan (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Ana Luisa Yoshie Ogatta Yadomi (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gabriel Leme Campos (Escola Tales de Mileto)

- Isabele Lopatko Correia (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Lucas Antonio dos Santos (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Thiago Takaji Tsutsui (Colégio Sagrada Família)
- Érika Blonski (Colégio Estadual Becker e Silva)
- Allana Nayara Woiciechowski (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- João Victor Scheifer Bordinhon (Colégio Sagrada Família)
- Luana Ferreira (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Gabriele Maroqui (Colégio Estadual Becker e Silva)
- Nathália Maria Migdalski (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Pedro Victor Pereira (Colégio Integração)
- Augusto Luis Mayer (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Adrick Laranjeira da Silva (Escola Tales de Mileto)
- Alessandra Fredo (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Bruno Vieira Harmatiuk (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Gabriela Schunemann Kowalski (Colégio Marista Pio XII)
- João Vitor Pisnisk Barbosa (Colégio Neo Master)
- Marcela Schumacker de Almeida (Colégio Estadual Becker e Silva)
- Natalia Ruppel Mourão (Colégio Sagrada Família)
- Bruna Vlastuin (Colégio Sant' Ana)
- Lemuel Cordeiro (Colégio Sant' Ana)
- Alessandra de Oliveira Pacheco (Colégio Neo Master)
- Andre Luis de Matos Santos (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Anna Luiza Prado (Centro Social Marista Santa Mônica)

- Bruna Balzer Maciel (Colégio Neo Master)
- Eduardo Smiderle (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Ryan Guilherme Tozetto (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Tayná Prestes Jacinto (Colégio Sagrada Família)
- Weslei Gonçalves da Rosa (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Rafael Spak Cortina (Colégio Estadual 31 de Março)
- Alex Daniel Dolgan (Colégio Estadual Nossa Senhora Da Glória)
- Igor Chornobain de Oliveira (Colégio Sagrada Família)
- Luis Gustavo Schnaider da Silva (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Raiely Ribeiro (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Rhuan Kleber Gonçalves (Colégio Integração)
- Mateus Gonçalves Prado Balado (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)

Nível 3

Troféu

- Tiago Daniel Gueiber (Colégio Marista Pio XII)
- Luna Rhaine Nascimento Oliveira (Instituto de Educação Estadual Professor César Prieto Martinez)

Ouro

- Tiago Daniel Gueiber (Colégio Marista Pio XII)
- Natalia Paes de Oliveira (Colégio Sagrada Família)
- Guilherme Ari Scortegagna (Colégio Neo Master)
- Vitor Hugo Moro Pironatto (Colégio São Francisco)

- Francielle Nocera Viechineski (Colégio Pontagrossense Sepam)

Prata

- Luna Rhaine Nascimento Oliveira (Instituto de Educação Estadual Professor César Prieto Martinez)
- Leonardo Cornélio Kiupers (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Larissa Almeida Busnello (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Valeria de Almeida (Colégio Sagrada Família)
- Davi Fernandes de Paula (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Ariane Gabrielli Massalaka Rulbesperger (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Lucas Martinelli (Colégio Sagrada Família)
- Daniel José Schulmeister (Instituto de Educação Estadual Professor César Prieto Martinez)
- Gabrielle Jagas Neves (Colégio Sagrada Família)
- Isabella Hofman (Colégio Sesi - Ponta Grossa)

Bronze

- Bruno Gabriel Telles (Colégio Sagrada Família)
- Emilin Regina Gomes Dobrovolski (Colégio Neo Master)
- Laura Bazzi Longo (Colégio Neo Master)
- Vitoria Scheffel Dias (Colégio Sant' Ana)
- Elyevan José de Melo (Colégio Neo Master)
- Gabriel Benelli (Colégio Neo Master)
- Gustavo Marenda de Lima (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Leticia Venske Camargo (Colégio Neo Master)

- Rhulyanne Lee de Meira (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Vitoria Moura Willemann (Colégio Neo Master)
- Giovanna Maior Corrêa da Silva (Colégio Sant' Ana)
- Guilherme José de Lima Manique Barreto (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Guilherme Vassão Wagnitz (Colégio Neo Master)
- Natalia Gruczka (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Aline Pissaia (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)

Menção Honrosa

- João Pedro Herche Cavasotti (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Jeniffer Lauber (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- João Vitor dos Santos (Colégio Neo Master)
- Rafaela Penteado Gomes (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Rodrigo Junior Jaronski (Colégio Integração)
- Thomas de Andrade Carraro (Colégio Marista Pio XII)

Nível 4

Troféu

- Débora Hiromi Yoshizawa (Colégio Sagrada Família)
- Elias Estevão Pereira dos Santos (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)

Ouro

- Débora Hiromi Yoshizawa (Colégio Sagrada Família)
- Elias Estevão Pereira dos Santos (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)

- Gabriela Baier (Colégio Sagrada Família)
- Ana Júlia Kounaris Fuziki (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lucas Liebel Camargo Ribas (Colégio Sagrada Família)

Prata

- Alexandre Antunes (Colégio Sagrada Família)
- Sofia Pujol Ricarte (Colégio Marista Pio XII)
- Giulihano Luis Feltz Zeni (Instituto de Educação Estadual Professor César Prieto Martinez)
- Victor Piotrovski Begha (Colégio Sagrada Família)
- Lucas Matheus Sandeski (Instituto de Educação Estadual Professor César Prieto Martinez)
- Alexandre Domingues Caspechaque (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Maria Clara Rodrigues Istschuk (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Crisangela Cristin Consul (Colégio Sagrada Família)
- Tamyris Martins Branco (Colégio Dynâmico)
- Victor Lucas Rodrigues da Silva (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)

Bronze

- Maria Catarina Huk Distéfano Grácia (Colégio Sagrada Família)
- Yuri Furtado Paes (Colégio Marista Pio XII)
- Matheus Willian Malinoscky (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Matheus Bach (Colégio Marista Pio XII)
- Cecilia Wolochn Schell (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Eduardo Henrique Maucoski (Colégio Sant' Ana)

- Cauynê Freitas Vieira (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Lucas Schechtel (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Bruna Mayara da Veiga (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Matheus Goulart de Freitas (Colégio Sant' Ana)
- Sara Scepanik (Colégio Sagrada Família)
- Geovane Ferreira Jula (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Raul Willian Soares Cardoso (Colégio Estadual Santa Maria)
- Mauricio Mocelim (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Renata Quirino dos Santos (Colégio Estadual Ana Divanir Boratto)

Professores Premiados

Abaixo consta a relação de todos os professores que receberam troféus nos respectivos níveis:

Nível 1 - Troféu:

- Professora Fernanda Fetzer (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Professora Sheila Regina Bagatelli Bozz (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Professora Andressa Niele Garcia (Colégio Estadual Francisco Pires Machado)

Nível 2 - Troféu:

- Professor Fabrício Gonçalves dos Santos (Colégio Neo Master)
- Professora Débora de Lima Moscardi dos Santos (Escola Estadual Jesus Divino Operário)

Nível 3 - Troféu:

- Professor Jeferson Müller (Colégio Marista Pio XII)
- Professor Marcelo José Ricci Jacob (Instituto de Educação Estadual Professor César Prieto Martinez)

Nível 4 - Troféu:

- Professor Fábio Augusto Souto Rosa (Colégio Sagrada Família)
- Professor Marcos Sant'Anna Modrow (Centro Estadual Educacional Profissional de Ponta Grossa)

A seguir consta a relação de todos os professores que tiveram alunos participantes da 3ª OPMat no ano de 2015:

- Arlene Cristiane Martins de Lima (Colégio Estadual 31 de Março)
- Marissol do Rocio Vieira da Rosa (Colégio Estadual 31 de Março)
- Shirley Aparecida de Moraes (Colégio Estadual 31 de Março)

- Igor Alberto Dantas Abrami (Colégio Estadual Ana Divanir Boratto)
- Amélia Eponina da Luiz Ruivo (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Terezinha Nicolaio (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Alzenir Virginia Ferreira Soistak (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Ingrid da Silva Milléo (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Indiamara Merces Bueno (Colégio Estadual Becker e Silva)
- Neli Garcia Catossi (Colégio Estadual Becker e Silva)
- Vania Grande Martins Volpi (Colégio Estadual Becker e Silva)
- Erson Jandrey (Escola Bom Pastor)
- Marcos Sant'Anna Modrow (Centro Estadual Educacional Profissional de Ponta Grossa)
- Paulo Henrique Carvalho (Escola Desafio)
- Lucas Gicorski (Colégio Dynâmico)
- Carlos Adolfo Weckerlin (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Andressa Niele Garcia (Colégio Estadual Francisco Pires Machado)
- Sheila Sayuri Yono Ohi (Colégio Estadual Francisco Pires Machado)
- Sheila Regina Bagatelli Bozz (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Talita Favoretto (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Valquíria Glinski (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Marcelo José Ricci Jacob (Instituto de Educação Estadual Professor César Prieto Martinez)
- Carlos Schebelinski (Instituto de Educação Estadual Professor César Prieto Martinez)
- Bianca Aparecida Holm de Oliveira (Colégio Integração)

- Juliana de Fátima Holm Brim (Colégio Integração)
- Lucas Gicorski (Colégio Integração)
- Nicholas Raphael de Almeida Beruski (Colégio Integração)
- Danieli Walichinski (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Débora de Lima Moscardi dos Santos (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Luciano Gomes Ferreira (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Joziane Deschk (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Prisciane Letícia Silveira Teixeira (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Marselha Aparecida Wiecheteck (Centro Social Marista Santa Mônica)
- Elizabete Feld (Escola Medalha Milagrosa)
- Gisele Aparecida Carvalho e Silva (Escola Medalha Milagrosa)
- Helen Mara Silvério (Escola Medalha Milagrosa)
- Jeanine Alves dos Santos (Escola Medalha Milagrosa)
- Karla Adriane Boamorte (Escola Medalha Milagrosa)
- Rosni Troyner (Escola Medalha Milagrosa)
- Simone de Fátima Soltes (Escola Medalha Milagrosa)
- Diefrei Alves (Colégio Neo Master)
- Fabrício Gonçalves dos Santos (Colégio Neo Master)
- Nicholas Raphael de Almeida Beruski (Colégio Neo Master)
- Simone Daiane Pisnisk (Colégio Neo Master)
- Adriano Tamuio Onuki (Colégio Nossa Senhora da Glória)
- Emilene Conceição Marins da Silva Bochnek (Colégio Nossa Senhora da Glória)
- Eva Aparecida Carvalho e Silva (Colégio Nossa Senhora da Glória)

- Jaime Willian Okuse (Colégio Nossa Senhora da Glória)
- Juliane Helena Rosa (Colégio Nossa Senhora da Glória)
- Líbia Andréia Silva (Colégio Nossa Senhora da Glória)
- Maristel do Nascimento (Colégio Nossa Senhora da Glória)
- Milena Cristina da Silva (Colégio Nossa Senhora da Glória)
- Geane Dias de Moura Jorge (Colégio Marista Pio XII)
- Jeferson Müller (Colégio Marista Pio XII)
- Lucia Yukie Shimasaki (Colégio Marista Pio XII)
- Fernanda Fetzer (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Sheila Regina Bagatelli Bozz (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Maurício Gurgel Kuchininski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Rubens Edgard Furstenberger Filho (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Daniel Carlos Beusso (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Luciano Gomes Ferreira (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Luciana Blum Rauch (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Márcia Luzia Biale Holm (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Maristel do Nascimento (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Alessandra Cardozo (Colégio Sagrada Família)
- Bruna Elisabete Adamowicz (Colégio Sagrada Família)
- Fábio Augusto Souto Rosa (Colégio Sagrada Família)
- Maria Regina Urban (Colégio Sagrada Família)
- Marina Marra (Colégio Sagrada Família)
- Rita Nerli de Carvalho (Colégio Sagrada Família)

- Rosilda Aparecida Chociai Scremin (Colégio Sagrada Família)
- Suzane Machado Daer Costa (Colégio Sagrada Família)
- Roberto Mauro Ramos Mainardes (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Vera do Rocio Vanat Prestes (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Willian Thomas Rocha (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Claudia Danielle de França Otoni (Colégio Sant'Ana)
- Daniel Carlos Beusso (Colégio Sant'Ana)
- Gilvan Aparecido Tratch (Colégio Sant'Ana)
- Paulo Fernando Zaratini de Oliveira e Silva (Colégio Sant'Ana)
- Kelen Cristina dos Santos Abrami (Colégio Estadual Santa Maria)
- Eliane Tulio Xavier (Colégio Estadual Santa Maria)
- Renato Pereira e Silva (Colégio Estadual Santa Maria)
- Tiago Vieira (Colégio São Francisco)
- Izabelle Cristiane Matkovski (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Joel Lopes da Silva Júnior (Colégio Sesi - Ponta Grossa)
- Alisson Lima Emiliano (Escola Tales de Mileto)

Escolas Participantes

Abaixo consta a relação de todas as escolas participantes da 3^a OPMat no ano de 2015:

Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa
Centro Social Marista Santa Mônica
Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas
Colégio Dynâmico
Colégio Estadual 31 de Março
Colégio Estadual Ana Divanir Boratto
Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas
Colégio Estadual Francisco Pires Machado
Colégio Estadual General Antônio Sampaio
Colégio Estadual José Gomes do Amaral
Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória
Colégio Estadual Polivalente
Colégio Estadual Professor Becker e Silva
Colégio Estadual Regente Feijó
Colégio Estadual Santa Maria
Colégio Integração
Colégio Marista Pio XII
Colégio Neo Master
Colégio Pontagrossense Sepam
Colégio Sagrada Família
Colégio Sagrado Coração de Jesus
Colégio Sant'Ana
Colégio São Francisco
Colégio Sesi - Ponta Grossa
Escola Bom Pastor
Escola Desafio
Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba
Escola Estadual Jesus Divino Operário
Escola Estadual Medalha Milagrosa
Escola Tales de Mileto
Instituto de Educação Estadual Professor César Prieto Martinez

3ª OPMat - Nível 1

Primeira Fase

Problema 1. Quantos números naturais de 2 algarismos não nulos existem, tais que quando lidos de trás para frente, formam um número que excede seu triplo em 6 unidades?

a) 1 b) 2 c) 0 d) 3 e) 4

Problema 2. João, Paulo e Maria possuem alguns hábitos peculiares. Sabe-se que um deles sempre mente, mas os outros dois sempre dizem a verdade. Na tentativa de descobrir quem é o mentiroso perguntou-se a cada um deles, na ausência dos outros dois, qual dos três sempre diz a verdade. Paulo respondeu: - Maria sempre diz a verdade. João respondeu: - Eu sempre digo a verdade, e Maria também respondeu: - Eu sempre digo a verdade. Com base nas respostas pode-se afirmar que:

a) João é o mentiroso e Maria sempre diz a verdade.

b) Maria é a mentirosa e Paulo sempre diz a verdade.

c) Paulo é mentiroso e João sempre diz a verdade.

d) Maria sempre diz a verdade e Paulo é mentiroso.

e) João e Maria sempre dizem a verdade.

Problema 3. Joãozinho vai fazer um passeio nas montanhas, mas ele é muito supersticioso. Quando soube que seria no dia 13 de junho, olhou imediatamente no calendário do celular e Ufa! ele ficou aliviado, por pouco o passeio não cai numa sexta-feira 13, o dia 13 de junho é um sábado. A propósito, quando cairá a próxima sexta-feira 13?

a) Em janeiro de 2016.

b) Em setembro de 2015.

c) Em abril de 2016.

d) Em fevereiro de 2016.

e) Em novembro de 2015.

Problema 4. Paulinho possui só moedas de $R\$ 0,10$ e de $R\$ 0,25$ no seu cofrinho. Ele percebeu que se gastar 3 moedas de $R\$ 0,10$ ficará com 39 moedas e um total de $R\$ 8,40$ no cofrinho. Quantas moedas de $R\$ 0,25$ ele tem no cofrinho?

a) 12 moedas b) 30 moedas c) 20 moedas d) 15 moedas e) 35 moedas

Problema 5. João escreveu na lousa todos os números naturais ímpares de três algarismos distintos. Quantas vezes ele escreveu o algarismo 2?

a) 60 b) 75 c) 70 d) 65 e) 80

Problema 6. Brincando com uma calculadora, Paulo fez algumas continhas com potências de 2 para descobrir qual o resto da divisão dessas potências por 9 . Por exemplo, pegou $2^4 = 16$, dividiu por 9 e obteve resto 7. Depois pegou $2^7 = 128$, dividiu por 9, e obteve resto 2, e assim por diante. Se ele conseguisse fazer corretamente a divisão de 2^{2015} por 9, qual seria o resto obtido?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 4

Problema 7. Num certo retângulo foi feito um corte paralelo ao lado menor, obtendo dois retângulos iguais. Se ao fizermos um corte paralelo ao lado menor de um dos dois retângulos, o dividirmos em dois quadrados iguais de área igual a 4 m^2 cada um, então o perímetro do retângulo inicial é:

a) 24 m b) 20 m c) 22 m d) 18 m e) 16 m

Problema 8. Joãozinho é muito comilão. Todo dia come dois pãezinhos no café da manhã antes de ir para a escola. Seguindo um conselho médico, passou a fazer uma "dieta" no café da manhã: no dia primeiro de cada mês ele come só um pãozinho, a partir do segundo, nos dias pares ele come dois pãezinhos e nos dias ímpares só um. Quantos pãezinhos nos cafés da manhã ele comeu no mês de abril?

a) 30 b) 45 c) 60 d) 75 e) 90

Problema 9. O quadrado de um número natural N é um número de 4 algarismos e termina em 5. Se o primeiro algarismo do quadrado de N é o dobro do segundo e o segundo é igual ao terceiro, então a soma dos algarismos do quadrado de N é igual a:

a) 7 b) 9 c) 13 d) 11 e) 15

Problema 10. Pedrinho vai a pé para a escola sempre no mesmo ritmo e chega na escola sempre na mesma hora. Num certo dia, Pedrinho saiu de casa 10 minutos atrasado e, para compensar, andou a primeira metade do caminho mais rápido, e o restante do caminho no ritmo normal, chegando à escola no horário habitual. Se nesse dia Pedrinho gastou 15 minutos para percorrer a primeira metade do caminho, quanto tempo ele gasta normalmente para ir da sua casa até a escola?

a) 50 minutos

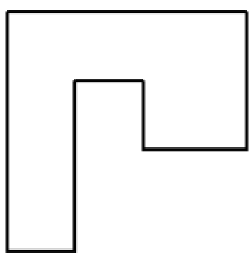
b) 35 minutos

c) 40 minutos

d) 30 minutos

e) 60 minutos

Problema 11. A figura abaixo é composta de oito segmentos de reta, sendo quatro horizontais e quatro verticais. Os segmentos verticais, da esquerda para a direita, medem: 7 cm, 5 cm, 2 cm e 4 cm, respectivamente. Os segmentos horizontais, de cima para baixo, medem: 7 cm, 2 cm, 3 cm e 2 cm, respectivamente. Qual a área da figura?



a) $24\ cm^2$ b) $30\ cm^2$ c) $32\ cm^2$ d) $40\ cm^2$ e) $44\ cm^2$

Problema 12. Paulinho tinha uma certa quantia no bolso. Gastou $1/3$ do que tinha no parque de diversões e $1/4$ do que sobrou, com a namorada na lanchonete. Se ainda lhe restou $R\$\,40,00$, quanto Paulinho tinha no bolso?

a) $R\$\,120,00$ b) $R\$\,100,00$ c) $R\$\,90,00$ d) $R\$\,60,00$ e) $R\$\,80,00$

Problema 13. Nos Estados Unidos é mais comum medir as temperaturas em graus Fahrenheit do que em graus Celsius, como fazemos aqui no Brasil. Sabe-se que uma diferença de um grau na escala Celsius corresponde a uma diferença de 1,8 grau na escala Fahrenheit. Portanto, se zero graus Celsius (0 °C) corresponde a 32 graus Fahrenheit (32 °F), então 10 °C corresponde a:

a) 18 °F b) 36 °F c) 40 °F d) 54 °F e) 50 °F

Problema 14. Resolvendo a expressão $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}$ obtemos:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{6}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) 1

Problema 15. Paulinho escreveu na lousa todos os números naturais de três algarismos distintos, e depois calculou a soma dos dois maiores. Quanto obteve?

a) 1993 b) 1973 c) 1996 d) 1997 e) 2015

Problema 16. João dividiu um número natural N por 11 e obteve como resto 7. Se ele dividisse N-4 por 11 obteria como resto:

a) 0 b) 2 c) 9 d) 8 e) 3

Problema 17. O produto de dois números naturais é 156. Se adicionarmos duas unidades ao menor e multiplicarmos o resultado pelo maior, o produto será 182. Qual a soma dos dois números?

a) 18 b) 19 c) 25 d) 23 e) 20

Problema 18. Maria foi à feira com $R\$\,20,00$ e comprou duas dúzias de bananas e quatro dúzias de laranjas, e sobrou $R\$\,4,00$. Se tivesse comprado uma dúzia de bananas a menos, teria sobrado $R\$\ 7,00$. Quanto gastaria se comprasse apenas uma dúzia de laranjas e uma dúzia de bananas?

a) $R\$\,5,50$ b) $R\$\,4,50$ c) $R\$\,6,00$ d) $R\$\,6,50$ e) $R\$\,7,00$

Problema 19. Numa festinha de aniversário, Maria deseja fazer uns kits de doces contendo balas, pirulitos e chocolates. Para fazer os kits ela dispõe de 80 balas, 60 pirulitos e 50 chocolates. Qual o maior número de kits, contendo a mesma quantidade de balas, a mesma quantidade de pirulitos e a mesma quantidade de chocolates, Maria pode fazer, usando todos os doces disponíveis?

a) 20 b) 15 c) 10 d) 25 e) 30

Problema 20. Por coincidência, as idades de Paulo e Maria são números primos entre 10 e 30. Sabendo que Paulo é 4 anos mais velho do que Maria e que a soma das idades de Paulo e Maria é um múltiplo de 5, a quantos anos atrás Paulo tinha o dobro da idade de Maria?

a) 2 b) 4 c) 7 d) 8 e) 9

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	a	e	b	b	d	b	b	c	a
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
b	e	e	e	b	e	c	a	c	e

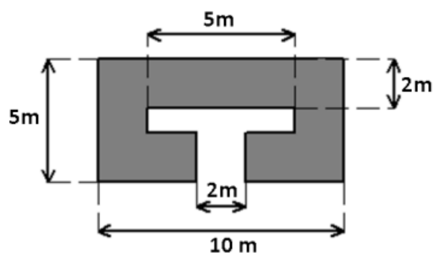
Segunda Fase

Problema 1. A professora de matemática de Joãozinho afirmou que na adição de números inteiros a ordem em que as parcelas são adicionadas não altera o valor da soma. Então, quando a professora pediu na prova de matemática que ele resolvesse a expressão $12+(-4)+8$, ele prontamente escreveu $12+(-4)+8 = 12-4+8 = 8+4-12 = 0$. Está certa a conta de Joãozinho? Se não está, qual o erro que ele cometeu?

Problema 2. Para numerar as páginas de um livro, um editor resolveu utilizar apenas os números naturais pares, começando com o número 2; isto é, as páginas foram numeradas com os números naturais na sequência: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, etc. Se o número total de páginas do livro é 400, quantas vezes foi escrito o algarismo 0 na numeração das páginas?

Problema 3. Num torneio de futebol com 5 times, cada um deles enfrentou os outros 4, exatamente uma vez. A regra para pontuação foi a tradicional, se houver empate cada um ganha um ponto, e se houver um vencedor, este leva 3 pontos e o perdedor não ganha pontos. No final do torneio, verificou-se que somando todos os pontos obtidos por cada time, o resultado foi 23 pontos. É possível que um dos times tenha perdido todas as partidas? Justifique.

Problema 4. O contorno da figura pintada a seguir é composto apenas de segmentos de reta horizontais e verticais:



Determine o perímetro da figura

Problema 5. Paulo é um menino muito curioso, quer saber tudo sobre todo mundo. Quando foi passear na casa dos tios João e Maria, foi logo perguntando suas idades.

Maria, meio a contragosto, respondeu: Minha idade é o dobro da sua, menino, e João respondeu: Eu tenho o dobro da idade de Maria. Paulo coçou a cabeça, fez umas continhas, e disse: Ah! Então daqui a 20 anos o tio João terá o dobro da idade que eu tiver. Quais as idades atuais de Paulo, Maria e João?

Problema 6. Para multiplicar um número de dois algarismos por 32, Maria resolveu usar uma calculadora. Ela digitou certo o número, mas na hora de digitar 32, acabou digitando 23 e o resultado foi 644. Se tivesse digitado 32, qual seria o resultado?

Problema 7. Escreva seis frações distintas, cujos numeradores e denominadores são números naturais, e cuja soma seja igual a $\frac{3}{2}$.

Problema 8. Se duas pizzas inteiras custam $R\$\ 7,50$ mais meia pizza, quanto custa uma pizza inteira?

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Giovana Madureira - Colégio Marista Pio XII)*

A conta está incorreta, pois
$12 + (-4) + 8 = 12 - 4 + 8$, até esse ponto estava correto, mas ele acabou trocando os sinais dos números -4 e $+12$, o que ocasionou em um resultado diferente: $8 + 4 - 12 = 0$
A conta e o resultado certo seriam:
$12 + (-4) + 8 = 12 - 4 + 8 = 16$, pois $12 - 4 = 8$ e $8 + 8 = 16$.
O que a professora quis dizer foi que Joãozinho deveria trocar os números com seus respectivos sinais.

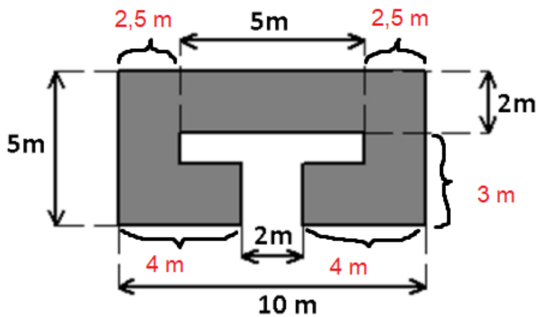
Problema 2. *(Resolução de Danilo Beltrame - Colégio Pontagrossense Sepam)*

Para cada 5 páginas temos um algarismo da unidade igual a zero, então $\frac{400}{5} = 80$, serão 80 zeros na casa das unidades. E ainda, o zero na casa das dezenas ocorrerá cinco vezes para cada centena, sendo assim: $100, 204, 306, 408, 500, 602, 702, \ldots$ Mas apenas até a centena 7, então $7 \times 5 = 35$.
Com isso, até agora temos 80 zeros na casa das unidades, mais 35 zeros na casa das dezenas até a centena 7 e mais um zero na casa das dezenas para a última página do livro: 800. Totalizando $80 + 35 + 1 = 116$.
Assim, foram escritos 116 zeros na numeração das páginas.

Problema 3. *(Resolução de Moreno Yves Martins Dos Santos - Colégio São Francisco)*

Não, pois se um time perder todas as partidas, todos os outros times teriam uma vitória, causando assim $3 \times 4 = 12$. Mas como o total foi 23, sobraria 11 pontos.
Se todos os times empatarem, teria o menor número de pontos, cada time ganharia 1 ponto e cada partida teria 2 pontos. E mais uma vitória daria 3 pontos.
Assim, $3 \times 4 = 12, 12 + 12 = 24 > 23$.

Problema 4. *(Resolução de Lucas Perondi Kist - Escola Elite Tales de Mileto)*



Somando todos os lados da figura, temos:

$$10+2+3+4+2+1,5+1+5+1+1,5+2+4+5=42\ m$$

O perímetro será de 42m.

Problema 5. *(Resolução de Renata Nadal Baier- Colégio Marista Pio XII)*
Organizando as informações:

Maria tem o dobro da idade de Paulo
João tem o dobro da idade de Maria
Paulo tem a metade da idade de Maria
Por tentaiva e erro:
M: 30; J: $60+20=80$; P: $15+20=35$ (35 não é metade de 80)
M: 40; J: $80+20=100$; P:$20+20=40$ (40 não é metade de 100)
M: 26; J: $52+20=72$; P:$13+20=33$ (33 não é metade de 72)
M: 50; J: $100+20=120$; P:$25+20=45$ (45 não é metade de 120)
M: 20; J: $40+20=60$; P:$10+20=30$ (30 é metade de 60)
Então Maria tem 20 anos, João tem 40 anos e Paulo tem 10 anos.

Problema 6. *(Resolução de Daniella Turek - Colégio Marista Santa Mônica)*
O resultado seria 896.
Pois $28\times 23=644$. Trocando 23 para 32, seria $28\times 32=896$.

Problema 7. *(Resolução de Giovana Madureira - Colégio Marista Pio XII)*
Em uma soma de frações, devemos igualar os denominadores.

$$\frac{1}{14}+\frac{2}{14}+\frac{3}{14}+\frac{4}{14}+\frac{5}{14}+\frac{6}{14}=\frac{21}{14}=\frac{3}{2}$$

Problema 8. *(Resolução de Danilo Beltrame - Colégio Pontagrossense Sepam)*
Para saber o valor de uma pizza, resolvi uma equação do 1º grau.

$2x = 7,50 + \frac{1}{2}x$

$2x - \frac{1}{2}x = 7,50$

$\frac{3x}{2} = 7,50$

$\frac{3x}{2} \cdot 2 = 7,50 \cdot 2$

$3x = 15,00$

$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$

$x = 5,00$

Descobri assim, que duas pizzas inteiras custam 10,00 reais e que meia pizza custa 2,50 reais. Assim, uma pizza inteira custa 5,00 reais.

3ª OPMat - Nível 2

Primeira Fase

Problema 1. Igual ao Problema 1 do Nível 1.

Problema 2. Igual ao Problema 2 do Nível 1.

Problema 3. Joãozinho vai fazer um passeio nas montanhas, mas ele é muito supersticioso. Quando soube que seria no dia 13 de junho, olhou imediatamente no calendário do celular e Ufa! ele ficou aliviado, por pouco o passeio não cai numa sexta-feira 13, o dia 13 de junho é um sábado. A propósito, quando cairá a próxima sexta-feira 13?

a) Em setembro de 2015.

b) Em abril de 2016.

c) Em janeiro de 2016.

d) Em fevereiro de 2016.

e) Em novembro de 2015.

Problema 4. Num triângulo retângulo ABC, reto em Â, seja M o ponto médio da hipotenusa BC e N um ponto do lado AC tal que BN é a bissetriz do ângulo $\hat{B}$. Se P o ponto de intersecção da mediana AM com a bissetriz BN, AB = 3 m e AC = 4 m, então a área do triângulo BPM é

a) $3\ m^2$ b) $3,5\ m^2$ c) $\frac{15}{11}\ m^2$ d) $\frac{8}{7}\ m^2$ e) $\frac{9}{7}\ m^2$

Problema 5. Paulinho possui só moedas de R$ 0,10 e de R$ 0,25 no seu cofrinho. Ele percebeu que se gastar 3 moedas de R$ 0,10 ficará com 39 moedas e um total de R$ 8,40 no cofrinho. Quantas moedas de R$ 0,25 ele tem no cofrinho?

a) 12 moedas b) 15 moedas c) 30 moedas d) 20 moedas e) 35 moedas

Problema 6. João escreveu na lousa todos os números naturais ímpares de três algarismos distintos. Quantas vezes ele escreveu os algarismos 2 ou 3?

a) 124 b) 148 c) 199 d) 176 e) 156

Problema 7. Num triângulo ABC de área igual a 10 m^2, seja M o ponto médio do lado BC. Se P é um ponto do segmento AM tal que a área do triângulo CPM é 2 m^2, então a área do triângulo ABP é igual a

a) $2,5\ m^2$ b) $2,75\ m^2$ c) $3,5\ m^2$ d) $3,25\ m^2$ e) $3\ m^2$

Problema 8. Brincando com uma calculadora, Paulo fez algumas continhas com potências de 2. Por exemplo, pegou $2^4 = 16$, somou os algarismos do resultado, obtendo 7. Depois pegou $2^7 = 128$, somou os algarismos, obtendo 11, a seguir somou de novo os algarismos, obtendo 2. Ou seja, repetia a operação de somar os algarismos do resultado até que restasse apenas um algarismo. Se ele conseguisse fazer corretamente as mesmas operações com o número 2^{2015}, e com certeza não teria a ajuda da calculadora por muito tempo, obteria o algarismo:

a) 1 b) 5 c) 3 d) 4 e) 2

Problema 9. Joãozinho construiu uma sequência de números naturais utilizando apenas os algarismos 0 e 1, da seguinte forma: 10, 101100, 101100111000, 10110011100011110000, etc. Ou seja, começou escrevendo o número 10, a seguir, começou com o número 10 acrescentando dois alga- rismos iguais a 1 e dois algarismos iguais a 0, depois começou com o número 101100, acrescentando três algarismos iguais a 1 e três algarismos iguais a 0, e assim por diante. O 2015º número desta sequência possui quantos algarismos iguais a 1?

a) 2015^2

b) 2015×2016

c) 2015×1008

d) 2016^2

e) 1008×1009

Problema 10. O resto da divisão do número $(3^{2015} + 4^{2015})^{2015} + 2015^{2015}$ por 7 é igual a

a) 6 b) 2 c) 3 d) 5 e) 0

Problema 11. Num certo retângulo foi feito um corte paralelo ao lado menor, obtendo dois retângulos iguais. Se ao fizermos um corte paralelo ao lado menor de um dos dois retângulos, o dividirmos em dois quadrados iguais de área igual a 4 m^2 cada um, então o perímetro do retângulo inicial é:

a) 20 m b) 12 m c) 16 m d) 10 m e) 24 m

Problema 12. Paulinho estava distraído na aula de matemática. A professora pediu para ele somar dois números naturais de dois algarismos não nulos cada um. Na primeira tentativa ele escreveu certo o segundo número, mas inverteu os algarismos do primeiro número, e a soma deu 120. Como a professora disse que o resultado estava errado, ele começou tudo de novo; desta vez ele escreveu certo o primeiro número, mas inverteu os algarismos do segundo número, e agora a soma deu 111. De novo a professora disse que a soma estava errada, e ele começou de novo, mas agora acabou invertendo os algarismos dos dois números e a soma deu 147. Supondo que as somas que Paulinho efetuou estavam certas, qual deveria ser a soma se ele tivesse escrito corretamente os dois números?

a) 78 b) 96 c) 84 d) 231 e) 258

Problema 13. Igual ao Problema 9 do Nível 1.

Problema 14. Num concurso são feitas 10 perguntas a cada candidato, uma de cada vez. As regras de pontuação são as seguintes: se o candidato acertar a n-ésima pergunta, ganha 2n pontos, e se errar, perde 3n pontos. Se certo candidato acertou exatamente 5 questões e totalizou um saldo negativo de 35 pontos; isto é, terminou com -35 pontos, a soma dos pontos ganhos com as questões certas é:

a) 14 b) 52 c) 26 d) 22 e) 87

Problema 15. Dada uma palavra qualquer, um anagrama da palavra dada é qualquer palavra, que faça sentido ou não, que se obtém a partir dela apenas permutando (trocando de lugar entre si) suas letras. Por exemplo, as palavras PADRE e PERDA são anagramas da palavra PEDRA. Quantos anagramas podem ser formados a partir da palavra LOGUS, nas quais duas, e apenas duas, consoantes aparecem juntas?

a) 108 b) 96 c) 72 d) 110 e) 115

Problema 16. Ao dividir um número natural N por 5, Joãozinho obteve resto 2. Então dividiu o quociente também por 5 e agora obteve resto 3. Se tivesse dividido N por 25, o resto obtido seria

a) 17 b) 3 c) 5 d) 12 e) 1

Problema 17. Pedrinho vai a pé para a escola sempre no mesmo ritmo e chega na escola sempre na mesma hora. Num certo dia, Pedrinho saiu de casa 10 minutos atrasado; e para compensar, andou a primeira metade do caminho mais rápido, e o restante do caminho no ritmo normal, chegando à escola no horário habitual.

Se nesse dia Pedrinho gastou 15 minutos para percorrer a primeira metade do caminho, quanto tempo ele gasta normalmente para ir da sua casa até a escola?

a) 30 minutos

b) 35 minutos

c) 50 minutos

d) 40 minutos

e) 60 minutos

Problema 18. Num torneio de futebol com 12 times, cada time deverá enfrentar cada um dos outros times exatamente uma vez, e em cada jogo haverá um vencedor, desempatando em cobrança de pênaltis se necessário. Se A é o time que terminou o torneio isolado na liderança, com o maior número de vitórias, pode-se afirmar que ele

a) venceu pelo menos 7 partidas.

b) perdeu no máximo 3 partidas.

c) ganhou exatamente 7 partidas.

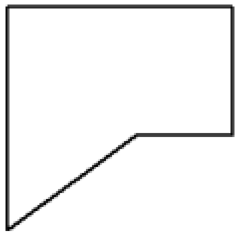
d) pode ter ganhado exatamente 6 partidas.

e) ganhou as 11 partidas que jogou.

Problema 19. Numa feira uma dúzia de laranjas custa R$ 3,00 e uma dúzia de bananas custa R$ 2,50. Maria deseja comprar x dúzias de laranjas e y dúzias de bananas e gastar exatamente R$ 80,00. Se x e y devem ser números naturais positivos, de quantas maneiras ela pode efetuar sua compra?

a) 5 b) 2 c) 3 d) 4 e) 1

Problema 20. A figura abaixo é composta de cinco segmentos de reta, sendo dois horizontais, dois verticais e um inclinado. Os dois maiores medem 7 cm cada um, o menor horizontal mede 3 cm e o menor vertical mede 4 cm. Logo a área da figura é



a) $28\,cm^2$ b) $34\,cm^2$ c) $30\,cm^2$ d) $40\,cm^2$ e) $42; cm^2$

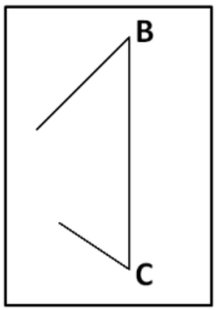
Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	a	e	c	c	c	e	b	c	a
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	c	c	b	c	a	c	a	a	b

Segunda Fase

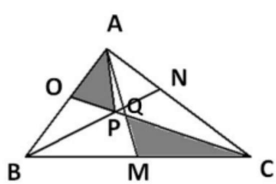
Problema 1. Para numerar as páginas de um livro, um editor resolveu utilizar apenas os números naturais pares, começando com o número 2; isto é, as páginas foram numeradas com os números naturais na sequência: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, etc. Se o número total de páginas do livro é 400, quantas vezes foi escrito o algarismo 0 na numeração das páginas?

Problema 2. A figura abaixo mostra uma página de uma prova de matemática contendo parte de um triângulo acutângulo ABC, em que o vértice A cai fora da página, do lado esquerdo.



Descreva um procedimento que permita, usando apenas um compasso e uma régua sem escala, determinar o ponto D do lado BC, tal que o segmento AD seja a altura do triângulo ABC, relativa ao lado BC.

Problema 3. Seja ABC um triângulo retângulo, reto em A, onde: $AB = 3\ m$, $AC = 4\ m$, $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado BC, $\overline{BN}$ e $\overline{CO}$ são as bissetrizes dos ângulos internos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente, o ponto P é a intersecção das bissetrizes $\overline{BN}$ e $\overline{CO}$ e o ponto Q é a intersecção da bissetriz $\overline{CO}$ com a mediana $\overline{AM}$.



Determine a área da região pintada formada pelos triângulos AOP e CMQ.

Problema 4. Num torneio de futebol com 5 times, cada um deles enfrentou os outros 4, exatamente uma vez. A regra para pontuação foi a tradicional, se houver empate cada um ganha um ponto, e se houver um vencedor, este leva 3 pontos e o perdedor não ganha pontos. No final do torneio, verificou-se que somando todos os pontos obtidos por cada time, o resultado foi 23 pontos. É possível que um dos times tenha perdido todas as partidas? Justifique.

Problema 5. Sabendo que existem primos maiores que 10^6 que deixam restos diferentes quando divididos por 6, sejam a e b dois primos maiores que 10^6 e que deixam restos diferentes quando divididos por 6. Qual é o resto da divisão do produto ab por 6?

Problema 6. Mostre que:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo número natural $n \geq 1$.

b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots 2015^2 = 336 \times 2015 \times 2017$.

Problema 7. Listando todos os números inteiros de 1 a 2015, quantos deles têm a soma dos dígitos menor que 5? Justifique.

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Rodrigo de Oliveira - Colégio Marista Pio XII)*

Como os números vão até o 800, pois são 400 páginas, mas só utilizando números pares, temos:

De 1 a 100 = 11 zeros
De 102 a 110 = 5 zeros
De 120 a 200 = 10 zeros
De 202 a 210 = 5 zeros
De 220 a 300 = 10 zeros
De 302 a 310 = 5 zeros
De 320 a 400 = 10 zeros
De 402 a 410 = 5 zeros
De 420 a 500 = 10 zeros
De 502 a 510 = 5 zeros
De 520 a 600 = 10 zeros
De 602 a 610 = 5 zeros
De 620 a 700 = 10 zeros
De 702 a 710 = 5 zeros
De 720 a 800 = 10 zeros

Somando todos, foram escritos 116 números zeros.

Problema 2. *(Resolução da Pauta)*

A ideia básica é determinar primeiro o ortocentro H do triângulo ABC, e a seguir obter o ponto D como a intersecção da reta perpendicular ao lado BC, que passa por H, e o lado BC. Um método pra fazer isso poderia ser: A ideia é encontrar o ortocentro H (encontro das 3 alturas) o que é possível uma vez que 2 vértices são conhecidos: B e C.
1ª) usando o compasso, traça-se uma perpendicular s no vértice B relativa ao lado AB.
2ª) traça-se um paralela r à reta s passando pelo vértice C.
3ª) traça-se uma perpendicular t passando pelo vértice C relativa ao lado AC.
4ª) conduz-se uma reta u paralela à reta t passando pelo vértice B.
5ª) a interseção da reta r com a reta u é o ortocentro H.
6ª) traça-se uma perpendicular h passando pelo ponto H em relação ao lado BC.

7ª) a interseção de h com BC é o ponto D procurado.

Problema 3. *(Resolução da Pauta)*

Pelo Teorema da Bissetriz Interna:

$$\frac{AO}{AC} = \frac{AB - AO}{BC} \Longrightarrow \frac{AO}{4} = \frac{3 - AO}{5} \Longrightarrow AO = \frac{4}{3}m$$

Como P é a intersecção de duas bissetrizes, então P é o incentro do triângulo ABC e a altura do triângulo AOP relativa ao lado AO é igual ao raio da circunferência inscrita no triângulo ABC. Logo, se r é o raio da circunferência inscrita no triângulo ABC:

$$\frac{AB + AC + BC}{2} r = [ABC] \Longrightarrow 6r = 6 \Longrightarrow r = 1m, e[AOP] = \frac{AO.r}{2} \Longrightarrow [AOP] = \frac{2}{3}m^2$$

Além disso, como Q pertence à bissetriz CO, as alturas relativas ao lado AC do triângulo AQC e relativa ao lado MC do triângulo CMQ são iguais. Se a chamarmos de H e considerando que o segmento AM é uma mediana do triângulo ABC:

$$[AQC] + [CMQ] = \frac{AC.H}{2} + \frac{MC.H}{2} = [AMC] = \frac{[ABC]}{2}$$

$$(AC + MC) \cdot H = [ABC] \Longrightarrow 6,5H = 6 \Longrightarrow H = \frac{12}{13}m$$

$$[CMQ] = \frac{MC.H}{2} = \frac{2,5.\frac{12}{13}}{2} \Longrightarrow [CMQ] = \frac{15}{13}m^2$$

Portanto, a área da região pintada é:

$$[AOP] + [CMQ] = \frac{2}{3} + \frac{15}{13} = \frac{71}{39}m^2.$$

Problema 4. *(Resolução de Rodrigo de Oliveira - Colégio Marista Pio XII)*

Não, pois no caso de um time perder as quatro partidas, os outros times irão ganhar ao menos uma. E se os outros quatro times empatarem as outras três partidas, assim, não é possível que a soma total dos pontos de todos os times seja 23.

Problema 5. *(Resolução da Pauta)*

Primeiro verifiquemos que se a e b são números primos maiores que 10^6, então eles só podem ser da forma $6K+1$ ou $6K+5$, já que se K é um número natural, $K>1$, os números da forma: $6K$, $6K+2$, $6K+3$, ou $6K+4$ são todos compostos. O primeiro é múltiplo de 2 e 3, o segundo e o quarto são pares maiores que 2 e o terceiro é múltiplo de 3, maior que 3.

Como o enunciado afirma que existem dois primos maiores que 10^6 que deixam restos diferentes quando divididos por 6, então um deles é da forma $6K+1$ e o outro é da forma $6K+5$. Sem perda de generalidade, vamos supor $a=6K+1$ e $b=6L+5$, então: $ab=36KL+6(5K+L)+5$. Portanto o resto da divisão de ab por 6 é igual a 5.

Problema 6. *(Resolução da Pauta)*

a) Partindo da relação:

$(k+1)^3-k^3=(k+1)^2+(k+1)k+k^2=3k^2+3k+1$

Temos, para k = 1, 2, 3,..., n:

$2^3-1^3=3.1^2+3.1+1;\ 3^3-2^3=3.2^2+3.2+1,\dots,(n+1)^3-n^3=3.n^2+3.n+1$

Somando membro a membro:

$3(1^2+2^2+\dots+n^2)=(n+1)^3-1-\frac{3(n+1)n}{2}-n$

$6(1^2+2^2+\dots+n^2)=2(n+1)^3-3(n+1)n-2(n+1)$

$6(1^2+2^2+\dots+n^2)=(n+1)(2n^2+4n+2-3n-2)=(n+1)(2n^2+n)$

$1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b)

$1^2+3^2+5^2+7^2+\dots+2015^2=1^2+2^2+3^2+\dots+2014^2+2015^2-(2^2+4^2+6^2+\dots+2014^2)$

$1^2+3^2+5^2+7^2+\dots+2015^2=\frac{2015.2016.4031}{6}-\frac{2^2.1007.1008.2015}{6}$

$1^2+3^2+5^2+7^2+\dots+2015^2=\frac{2015.2016.4031}{6}-\frac{2014.2016.2015}{6}$

$1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+2015^2 = \frac{2015.2016.(4031-2014)}{6} = \frac{2015.2016.2017}{6}$

$1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+2015^2 = 336\times 2015\times 2017$

Problema 7. *(Resolução da Pauta)*

Os números que queremos encontrar tem 1, 2, 3 e 4 algarismos. Vamos analisar cada caso:

a) Números de 1 dígito: números da forma x, $x<5$: 4 números (1, 2, 3 e 4)

São, no total, 4 números de 1 dígito.

b) Números de 2 dígitos: números da forma xy, $0<x<5$ e $x+y<5$

se $x=1$, $y<4$ e temos 4 números
se $x=2$, $y<3$ e temos 3 números
se $x=3$, $y<2$ e temos 2 números
se $x=4$, $y<1$ e temos 1 número

São, no total, 10 números.

c) Números de 3 dígitos: números da forma xyz , $0<x<5$ e $x+y+z<5$

se $x=1$, $y+z<4$ e temos $1+2+3+4=10$ números (para $z=3$, 2,1 ou 0)
se $x=2$, $y+z<3$ e temos $1+2+3=6$ números (para $z=2$,1 ou 0)
se $x=3$, $y+z<2$ e temos $1+2=3$ números (para $z=1$ ou 0)
se $x=4$, $y+z<1$ e temos 1 número (para $z=0$)

São, no total, 20 números.

d) Números de 4 dígitos: números da forma $xyzw$, $0<x<5$ e $x+y+z+w<5$

se $x=1$, $y+z+w<4$ e temos $1+3+6+10=20$ números (para w=3, 2,1 ou 0)
se $x=2$, $y=0$, $z=0$, $w<3$ e temos 3 números
se $x=2$, $y=0$, $z=1$, $w<2$ e temos 2 números

São, no total, 25 números de quatro dígitos.

Considerando os quatro casos temos $4+10+20+25=59$ números inteiros de 1 a 2015 cuja soma dos dígitos é menor que 5

3ª OPMat - Nível 3

Primeira Fase

Problema 1. Igual ao Problema 1 do Nível 1

Problema 2. Igual ao Problema 12 do Nível 2

Problema 3. Joãozinho vai fazer um passeio nas montanhas, mas ele é muito supersticioso. Quando soube que seria no dia 13 de junho, olhou imediatamente no calendário do celular e Ufa! ele ficou aliviado, por pouco o passeio não cai numa sexta-feira 13, o dia 13 de junho é um sábado. A propósito, quando cairá a próxima sexta-feira 13?

a) Em setembro de 2015.

b) Em janeiro de 2016.

c) Em abril de 2016.

d) Em fevereiro de 2016.

e) Em novembro de 2015.

Problema 4. Num triângulo retângulo ABC, reto em Â, seja M o ponto médio da hipotenusa BC e N um ponto do lado AC tal que BN é a bissetriz do ângulo $\hat{B}$. Se P o ponto de intersecção da mediana AM com a bissetriz BN, $AB = 3$ m e $AC = 4$ m, então a área do triângulo BPM é

a) $3\ m^2$ b) $3,5\ m^2$ c) $\frac{8}{7}\ m^2$ d) $\frac{9}{7}\ m^2$ e) $\frac{15}{11}\ m^2$

Problema 5. Partindo de um retângulo de lados com medidas x e y, $x > 2y$, foi feito um corte paralelo ao lado menor, obtendo dois retângulos congruentes de lados com medidas $\frac{x}{2}$ e y. Se ao fizermos um corte paralelo ao lado menor de um dos retângulos, o dividirmos exatamente em dois quadrados congruentes, então a medida do perímetro do retângulo de partida é:

a) $6\ y$ b) $8\ y$ c) $3\ x$ d) $3,5\ x$ e) $2,5\ x$

Problema 6. Dada uma palavra qualquer, um anagrama da palavra dada é qualquer palavra, que faça sentido ou não, que se obtém a partir dela apenas permutando (trocando de lugar entre si) suas letras. Por exemplo, as palavras PADRE e PERDA são anagramas da palavra PEDRA. Quantos anagramas podem ser formados a partir da palavra LOGUS, nas quais duas, e apenas duas, consoantes aparecem juntas?

a) 72 b) 96 c) 108 d) 110 e) 115

Problema 7. Uma porta contém exatamente duas fechaduras e as duas estão fechadas. Cada fechadura contém uma plaquinha numerada com um número de 1 a 9. Uma delas contém um número par e a outra contém um número primo. João está com um molho de chaves numeradas contendo nove chaves, cada uma contendo exatamente um número de 1 a 9, entre elas a chave correspondente a cada fechadura. João não sabe quais são os números contidos nas chaves e escolhe aleatoriamente duas chaves do molho. Qual a probabilidade de que ele tenha escolhido um par de chaves com as quais consiga abrir as fechaduras?

a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{23}{36}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{15}{18}$

Problema 8. Brincando com uma calculadora, Paulo fez algumas continhas com potências de 2. Por exemplo, pegou $2^4 = 16$, somou os algarismos do resultado, obtendo 7. Depois pegou $2^7 = 128$, somou os algarismos, obtendo 11, a seguir somou de novo os algarismos, obtendo 2. Ou seja, repetia a operação de somar os algarismos do resultado até que restasse apenas um algarismo. Se ele conseguisse fazer corretamente as mesmas operações com o número 2^{2015}, e com certeza não teria a ajuda da calculadora por muito tempo, obteria o algarismo:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 4

Problema 9. Igual ao Problema 7 do Nível 2

Problema 10. Igual ao Problema 9 do Nível 2

Problema 11. Considere duas matrizes quadradas A e B de ordem 30, cujos elementos são definidos pelas relações:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & se\ i \leq j \\ 1, & se\ i > j \end{cases} \qquad \text{e} \qquad b_{ij} = \begin{cases} 0, & se\ i \leq j \\ 1, & se\ i > j \end{cases}$$

Se C = AB é o produto das matrizes A e B, então o elemento C_{89} da matriz C é igual a:

a) -21 b) -9 c) 22 d) -17 e) 1

Problema 12. Igual ao Problema 9 do Nível 1

Problema 13. Igual ao Problema 14 do Nível 2

Problema 14. Igual ao Problema 10 do Nível 2

Problema 15. João escreveu na lousa todos os números naturais ímpares de três algarismos distintos, quantas vezes ele escreveu os algarismos 0, 2 ou 3?

a) 220 b) 288 c) 239 d) 372 e) 400

Problema 16. Num torneio de futebol com 12 times, cada time deverá enfrentar cada um dos outros times exatamente uma vez, e em cada jogo haverá um vencedor, desempatando em cobrança de pênaltis se necessário. Se A é o time que terminou o torneio isolado na liderança, com o maior número de vitórias, pode-se afirmar que ele

a) perdeu no máximo 3 partidas.

b) ganhou exatamente 7 partidas

c) pode ter ganhado exatamente 6 partidas

d) venceu pelo menos 7 partidas.

e) ganhou as 11 partidas que jogou.

Problema 17. Numa feira uma dúzia de laranjas custa $R\$ \ 3,00$ e uma dúzia de bananas custa $R\$ \ 2,50$. Maria deseja comprar x dúzias de laranjas e y dúzias de bananas e gastar exatamente $R\$ \ 80,00$. Se x e y devem ser números naturais positivos, de quantas maneiras ela pode efetuar sua compra?

a) 2 b) 4 c) 3 d) 5 e) 1

Problema 18. Simplificando a expressão: $\dfrac{sen\,20^\circ + sen\,80^\circ}{\sqrt{3}\,cos\,40^\circ}$, obtemos:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) 1 d) $sen\,50^\circ$ e) $tg\,50^\circ$

Problema 19. Se $\log_3 2 = a$, então $\log_8 144$ é igual a

a) $\dfrac{4a+2}{3a}$ b) $\dfrac{2a+1}{2}$ c) $\dfrac{2a+1}{2a}$ d) $\dfrac{4a-1}{2^a}$ e) $\dfrac{4a-1}{2}$

Problema 20. Considere a sequência $\left\{a, b, \dfrac{a+b}{2}, \ldots\right\}$ onde cada termo, a partir do terceiro termo, é a média aritmética dos anteriores. Qual a soma dos 2015 primeiros termos desta sequência?

a) $2015\,(a + 2\,b)$

b) $\dfrac{2015\,(a + b)}{2}$

c) $2015\,(a + b)$

d) $\dfrac{2014\,a + 2015\,b}{2}$

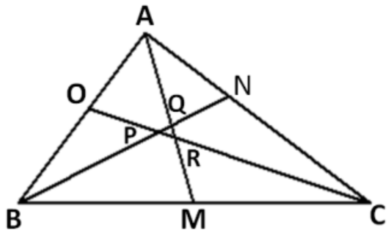
e) $\dfrac{2015\,(a+b)}{3}$

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	c	e	e	e	a	c	d	e	c
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	c	b	a	c	d	d	c	a	b

Segunda Fase

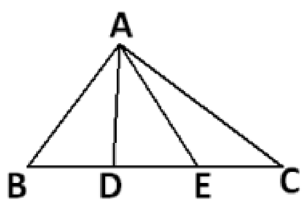
Problema 1. Seja ABC um triângulo retângulo, reto em A, onde $AB = 3\ m$, $AC = 4\ m$, $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado BC, $\overline{BN}$ e $\overline{CO}$ são as bissetrizes dos ângulos internos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente, o ponto P é a intersecção das bissetrizes $\overline{BN}$ e $\overline{CO}$, e o ponto Q e R são, respectivamente, as intersecções da mediana $\overline{AM}$ com as bissetrizes $\overline{BN}$ e $\overline{CO}$.



Determine a área do quadrilátero $BPRM$.

Problema 2. Determine as raízes do polinômio $x^3-(4+\sqrt{3})x^2+(2+4\sqrt{3})x-2\sqrt{3}=0$.

Problema 3. Num triângulo retângulo ABC, reto em A, a hipotenusa foi dividida em três partes iguais: BD, DE e EC, conforme a figura abaixo: .



Fazendo: $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, determine em função de a, b e c, o raio da circunferência inscrita no triângulo ADE.

Problema 4. Mostre que existem pelo menos dois primos maiores que 10^6 que deixam restos diferentes quando divididos por 6. Se a e b são dois desses números; isto é, primos maiores que 10^6 que deixam restos diferentes quando divididos por 6, qual é o resto da divisão do produto ab por 6?

Problema 5. Considere a soma $S = 1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+......+2015\cdot2016\cdot 2017\cdot2018+2015$, composta de 2016 parcelas, em que as primeiras 2015 parcelas são do tipo $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$, para $n = 1,2,...,2015$, e a última parcela é igual a 2015. Mostre que a soma S pode escrita na forma: $S = 405\cdot2015^4 + 7\cdot2015^3 + 10\cdot 2015^2 + 11687$
Dica: Podem ser úteis as relações

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

Problema 6. Listando todos os números inteiros de 1 a 2015, quantos deles têm a soma dos dígitos menor que 5? Justifique.

Problema 7. Determine o domínio da função:$f(x) = \log_{|x-5|x-6}(x^2-|5x-6|)$

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução da Pauta)*

Como P é a intersecção de duas bissetrizes, então P é o incentro do triângulo ABC e a altura do triângulo BCP relativa ao lado BC é igual ao raio da circunferência inscrita no triângulo ABC. Logo, se r é o raio da circunferência inscrita no triângulo ABC:

$$\frac{AB+AC+BC}{2}r=[ABC]\Longrightarrow 6r=6\Longrightarrow r=1m$$
$$[BCP]=\frac{BC\cdot r}{2}=\frac{5}{2}m^2$$

Por outro lado, como R pertence à bissetriz CO, as alturas do triângulo ACR relativa ao lado AC e do triângulo CRM relativa ao lado CM são iguais. Chamando essa altura de H e considerando que o segmento AM é uma mediana do triângulo ABC:

$$[ARC]+[CRM]=\frac{AC\cdot H}{2}+\frac{CM\cdot H}{2}=\frac{[ABC]}{2}\longrightarrow 6,5H=6\Longrightarrow \frac{12}{13}m$$
$$[CRM]=\frac{CM\cdot H}{2}=\frac{2,5\cdot\frac{12}{13}}{2}=\frac{15}{13}m^2$$

Portanto:

$$[BPRM]=[BCP]-[CRM]=\frac{5}{2}-\frac{15}{13}\Longrightarrow [BPRM]=\frac{35}{26}m^2$$

Além disso, como Q pertence à bissetriz BN, as alturas do triângulo ABQ relativa ao lado AB e do triângulo BQM relativa ao lado BM são iguais. Chamando essa altura de H1 e considerando que o segmento AM é uma mediana do triângulo ABC:

$$[ABQ]+[BQM]=\frac{AB\cdot H_1}{2}+\frac{BM\cdot H_1}{2}=\frac{[ABC]}{2}\Longrightarrow 5,5H_1=6\Longrightarrow H_1=\frac{12}{11}m$$
$$[BQM]=\frac{BM\cdot H_1}{2}=\frac{2,5\cdot\frac{12}{11}}{2}=\frac{15}{11}m^2$$

Portanto:

$$[PQR]=[BQM]-[BPRM]=\frac{15}{11}-\frac{35}{26}\Longrightarrow [PQR]=\frac{5}{286}m^2$$

Problema 2. *(Resolução da Pauta)*

$x^3-(4+\sqrt{3})x^2+(2+4\sqrt{3})x-2\sqrt{3}=0$
$(x^3-4x^2+2x)-\sqrt{3}(x^2-4x+2)=0$
$(x-\sqrt{3})(x^2-4x+2)=0$

As raízes desse polinômio serão: $\sqrt{3}$, $2-\sqrt{2}$ e $2+\sqrt{2}$

Problema 3. *(Resolução da Pauta)*

$$[ADE]=\frac{[ABC]}{3}=\frac{bc}{6}=\frac{AD+AE+DE}{2}.r\Rightarrow r=\frac{bc}{3(AD+AE+DE)}$$

Onde r é o raio da circunferência inscrita no triângulo ADE.

No triângulo ADE,

$$DE=\frac{a}{3}$$
$$AD^2=c^2+\frac{a^2}{9}-2c.\frac{a}{3}cos\,\hat{\mathrm{B}}=\frac{a^2+3c^2}{9}\Rightarrow AD=\frac{\sqrt{a^2+3c^2}}{3}$$

$$AE^2=c^2+\frac{4a^2}{9}-2c.\frac{2a}{3}cos\,\hat{\mathrm{B}}=\frac{4a^2-3c^2}{9}\Rightarrow AD=\frac{\sqrt{4a^2-3c^2}}{3}$$

Logo,

$$r=\frac{bc}{a+\sqrt{a^2+3c^2}+\sqrt{4a^2-3c^2}}$$

Problema 4. *(Resolução da Pauta)*

Primeiro verifiquemos que se a e b são números primos maiores que 10^6, então eles só podem ser da forma $6K+1$ ou $6K+5$, já que se K é um número natural, $K>1$, os números da forma: $6K$, $6K+2$, $6K+3$, ou $6K+4$ são todos compostos. O primeiro é múltiplo de 2 e 3, o segundo e o quarto são pares maiores que 2 e o terceiro é múltiplo de 3, maior que 3. Se provarmos que existem infinitos primos da forma 6K+1 e da forma $6K+5$, concluímos a partir disso que existem dois números primos maiores que 10^6, que satisfazem as condições do problema.

Vamos supor que existe apenas um número finito de números primos da forma

6K+5. Digamos que esses números são $P_1, P_2, \ldots, P_N$. Considere o número $P = 6P_1P_2\cdots P_N + 5$. Como P é maior que cada um dos primos $P_1, P_2, \ldots, P_N$, então P tem que ser composto. Além disso, como tem que existir um número natural primo Q que divida P e nenhum dos primos $P_1, P_2, \ldots, P_N$ divide P, Q tem que ser da forma $6K+1$. Mas se todo divisor primo de P fosse da forma $6K+1$, então P também seria da forma 6K+1. Logo tem que existir um primo da forma $6K+5$, diferente dos primos $P_1, P_2, \ldots, P_N$, que divide P, o que prova que existem infinitos primos da forma $6K+5$. De forma análoga provamos que existem infinitos primos da forma $6K+1$.

Sem perda de generalidade, vamos supor $a = 6K+1$ e $b = 6L+5$, então: $ab = 36KL + 6(5K+L)+5$. Portanto o resto da divisão de ab por 6 é igual a 5.

Problema 5. *(Resolução da Pauta)*

$S = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + 3.4.5.6 + \cdots + 2015.2016.2017.2018 + 2015$

$S = \sum_{k=1}^{2015}[k(k+1)(k+2)(k+3)+1]$

$S = \sum_{k=1}^{2015}[k(k+3)(k^2+3k+2)+1] = \sum_{k=1}^{2015}[k(k+3)+1]^2 = \sum_{k=1}^{2015}(k^2+3k+1)^2$

$S = \sum_{k=1}^{n}(k^4+6k^3+11k^2+6k+1)$

$$S = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} + \frac{3n^2(n+1)^2}{2} + \frac{11n(n+1)(2n+1)}{6} + 3n(n+1) + n$$

$30S = 6n^5 + 60n^4 + 210n^3 + 300n^2 + 174n$

Fazendo $n = 2015$;

$$S = \frac{1}{5}2015^5 + 2.2015^4 + 7.2015^3 + 10.2015^2 + 11687$$

$S = 405 \cdot 2015^4 + 7 \cdot 2015^3 + 10 \cdot 2015^2 + 11687$

Problema 6. *(Resolução de Leonardo Cornélio Kiupers - Colégio Pontagrossense Sepam)*

Listando os números: 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31, 40, 100, 101, 102, 103, 110, 111, 112, 120, 121, 130, 200, 201, 202, 210, 211, 220, 300, 301, 310, 400, 1000, 1001, 1002, 1003, 1010, 1011, 1012, 1020, 1021, 1030, 1100, 1101, 1102, 1110, 1111, 1120, 1200, 1201, 1210, 1300, 2000, 2001, 2002, 2010, 2011.

Podemos observar, ao escrever todos os números possíveis que 59 números de 1 a 2015 possui a soma de seus dígitos menor que 5.

Problema 7. *(Resolução da Pauta)*

O domínio de $f(x)$ corresponde aos valores reais de x para os quais:

$$\begin{cases} x^2 - |5x-6| > 0 \\ |x-5|x-6>0 \\ |x-5|x-6 \neq 1 \end{cases}$$

Separando os casos:
a) $x^2 - |5x-6| > 0$

$$\begin{cases} x \leq \frac{6}{5} \\ x^2+5x-6>0 \end{cases} \Longrightarrow S_{11} =]-\infty, -6[\cup]1, \tfrac{6}{5}]$$

$$\begin{cases} x > \frac{6}{5} \\ x^2-5x+6>0 \end{cases} \Longrightarrow S_{12} =]\tfrac{6}{5}, 2[\cup]3, \infty[$$

$S_1 = S_{11} \cup S_{12} =]-\infty, -6[\cup]1, 2[\cup]3, \infty[$

b)$|x-5|x-6>0$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ -x^2+5x-6>0 \end{cases} \Longrightarrow S_{21} =]2, 3[$$

$$\begin{cases} x > 5 \\ x^2-5x-6>0 \end{cases} \Longrightarrow S_{22} =]6, \infty[$$

$S_2 = S_{21} \cup S_{22} =]2, 3[\cup]6, \infty[$

c)$|x-5|x-7 \neq 0$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ -x^2+5x-7 \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow S_{31} =]-\infty, -5[$$

$$\begin{cases} x > 5 \\ x^2-5x-7 \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow S_{32} =]5, \infty[- \left\{ \frac{5+\sqrt{53}}{2} \right\}$$

$$S_3 = S_{31} \cup S_{32} = R - \left\{ \frac{5+\sqrt{53}}{2} \right\}$$

Logo, o domínio da $f(x)$ é dada por: $D = S_1 \cap S_2 \cap S_3 =]6, \infty[- \left\{ \frac{5+\sqrt{53}}{2} \right\}$.

3ª OPMat - Nível 4

Primeira Fase

Problema 1. Quantos números naturais de 3 algarismos não nulos existem, tais que quando lidos de trás para frente, formam um número que excede seu triplo em 6 unidades?

a) 1 b) 0 c) 2 d) 3 e) 4

Problema 2. Igual ao Problema 2 do Nível 1

Problema 3. Joãozinho vai fazer um passeio nas montanhas, mas ele é muito supersticioso. Quando soube que seria no dia 13 de junho, olhou imediatamente no calendário do celular e Ufa! Ele ficou aliviado, por pouco o passeio não cai numa sexta-feira 13, o dia 13 de junho é um sábado. A propósito, quando cairá a próxima sexta-feira 13?

a) Em setembro de 2015.

b) Em abril de 2016.

c) Em janeiro de 2016.

d) Em fevereiro de 2016.

e) Em novembro de 2015.

Problema 4. Num triângulo retângulo ABC, reto em Â, seja M o ponto médio da hipotenusa BC e N um ponto do lado AC tal que BN é a bissetriz do ângulo B̂. Se P o ponto de intersecção da mediana AM com a bissetriz BN, AB = 3 m e AC = 4 m, então a área do triângulo BPM é:

a) $\dfrac{15}{11}\,m^2$ b) $\dfrac{8}{7}\,m^2$ c) $3\,m^2$ d) $3,5\,m^2$ e) $\dfrac{9}{7}\,m^2$

Problema 5. Considere dois polinômios com coeficientes reais:

$$P_1(x) = x^2 + ax + b$$
$$P_2(x) = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b + 2)x^2 + (2ab + 2a)x + b^2 + 2b + 3$$

Se $P_1(4) = 0$, então $P_2(4)$ é igual a:

a) 0 b) 3 c) $a + b$ d) $a^2 + b$ e) 2

Problema 6. Igual ao Problema 11 do Nível 3

Problema 7. Igual ao Problema 7 do Nível 3

Problema 8. Igual ao Problema 15 do Nível 3

Problema 9. Igual ao Problema 10 do Nível 2

Problema 10. Igual ao Problema 8 do Nível 3

Problema 11. Joãozinho construiu uma sequência de números naturais utilizando apenas os algarismos 0 e 1, da seguinte forma: 10, 101100, 101100111000, 10110011100011110000, etc. Ou seja, começou escrevendo o número 10, a seguir, começou com o número 10 acrescentando dois algarismos iguais a 1 e dois algarismos iguais a 0, depois começou com o número 101100, acrescentando três algarismos iguais a 1 e três algarismos iguais a 0, e assim por diante. Se Joãozinho escrevesse todos os números da sequência até o 2015º, quantos algarismos 0 e 1 ele escreveria?

a) $\binom{2015}{2}$ b) $\frac{1}{2}\binom{2015}{3}$ c) $2\binom{2016}{2}$ d) $2\binom{2017}{3}$ e) $2\binom{2016}{2}$

Problema 12. Igual ao Problema 5 do Nível 3

Problema 13. Igual ao Problema 7 do Nível 2

Problema 14. Igual ao Problema 9 do Nível 1

Problema 15. Igual ao Problema 14 do Nível 2

Problema 16. Igual ao Problema 15 do Nível 2

Problema 17. Igual ao Problema 16 do Nível 3

Problema 18. Igual ao Problema 19 do Nível 2

Problema 19. Igual ao Problema 18 do Nível 3

Problema 20. Se $\log_3 2 = a$, então $\log_8 144$ é igual a:

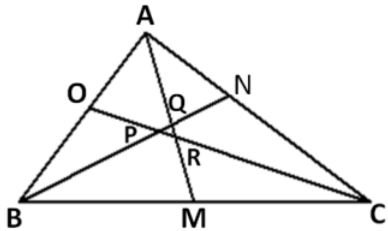
a) $\dfrac{2a+1}{2}$ b) $\dfrac{4a+2}{3a}$ c) $\dfrac{2a+1}{2a}$ d) $\dfrac{4a-1}{2a}$ e) $\dfrac{4a-1}{2}$

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	a	e	a	b	a	c	c	a	d
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
d	e	e	c	b	c	d	a	c	b

Segunda Fase

Problema 1. Seja ABC um triângulo retângulo, reto em A, onde $AB = 3\ m$, $AC = 4\ m$, $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado BC, $\overline{BN}$ e $\overline{CO}$ são as bissetrizes dos ângulos internos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente, o ponto P é a intersecção das bissetrizes $\overline{BN}$ e $\overline{CO}$, e o ponto Q e R são, respectivamente, as intersecções da mediana $\overline{AM}$ com as bissetrizes $\overline{BN}$ e $\overline{CO}$.



Determine a área do triângulo PQR.

Problema 2. Mostre que $\dfrac{2\pi}{9}$ é raiz da equação:
$-96\cos^7 x + 16\cos^6 x + 152\cos^5 - 24\cos^4 x - 66\cos^3 x + 10\cos^2 x + 6\cos x - 1 = 0$

Problema 3. Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem 50 definidas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & se\ i < j \\ 0, & se\ i = j \\ 1, & se\ i > j \end{cases}, \quad b_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i < j \\ 0, & se\ i \geq j \end{cases}, \qquad 1 \leq i, j \leq 50$$

Se C é a matriz definida por $C = (AB)^T$,

a) Determine o elemento c_{89}.

b) Determine a matriz $B = A^2$, mostrando como seus elementos são obtidos.

Problema 4. Mostre que existem pelo menos dois primos maiores que 10^6 que deixam restos diferentes quando divididos por 6. Se a e b são dois desses números; isto é, primos maiores que 10^6 que deixam restos diferentes quando divididos por 6, qual é o resto da divisão do produto ab por 6?

Problema 5. Considere a soma $S = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 + 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 + ... + 2015\cdot 2016\cdot 2017\cdot 2018 + 2015$, composta de 2016 parcelas, em que as primeiras 2015 parcelas são do tipo $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$, para $n = 1, 2, ..., 2015$, e a última parcela é igual a 2015. Mostre que a soma S pode escrita na forma: $S = 405\cdot 2015^4 + 7\cdot 2015^3 + 10\cdot 2015^2 + 11687$
Dica: Podem ser úteis as relações

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

Problema 6. Determine as raízes do polinômio $x^3-(4+\sqrt{3})x^2+(2+4\sqrt{3})x-2\sqrt{3}=0$.

Problema 7. Listando todos os números inteiros de 1 a 2015, quantos deles têm a soma dos dígitos menor que 5? Justifique.

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução da Pauta)*

Como P é a intersecção de duas bissetrizes, então P é o incentro do triângulo ABC e a altura do triângulo BCP relativa ao lado BC é igual ao raio da circunferência inscrita no triângulo ABC. Logo, se r é o raio da circunferência inscrita no triângulo ABC:

$$\frac{AB+AC+BC}{2}r=[ABC]\Longrightarrow 6r=6\Longrightarrow r=1m$$
$$[BCP]=\frac{BC\cdot r}{2}=\frac{5}{2}m^2$$

Por outro lado, como R pertence à bissetriz CO, as alturas do triângulo ACR relativa ao lado AC e do triângulo CRM relativa ao lado CM são iguais. Chamando essa altura de H e considerando que o segmento AM é uma mediana do triângulo ABC:

$$[ARC]+[CRM]=\frac{AC\cdot H}{2}+\frac{CM\cdot H}{2}=\frac{[ABC]}{2}\longrightarrow 6,5H=6\Longrightarrow \frac{12}{13}m$$
$$[CRM]=\frac{CM\cdot H}{2}=\frac{2,5\cdot\frac{12}{13}}{2}=\frac{15}{13}m^2$$

Portanto:

$$[BPRM]=[BCP]-[CRM]=\frac{5}{2}-\frac{15}{13}\Longrightarrow [BPRM]=\frac{35}{26}m^2$$

Além disso, como Q pertence à bissetriz BN, as alturas do triângulo ABQ relativa ao lado AB e do triângulo BQM relativa ao lado BM são iguais. Chamando essa altura de H1 e considerando que o segmento AM é uma mediana do triângulo ABC:

$$[ABQ]+[BQM]=\frac{AB\cdot H_1}{2}+\frac{BM\cdot H_1}{2}=\frac{[ABC]}{2}\Longrightarrow 5,5H_1=6\Longrightarrow H_1=\frac{12}{11}m$$
$$[BQM]=\frac{BM\cdot H_1}{2}=\frac{2,5\cdot\frac{12}{11}}{2}=\frac{15}{11}m^2$$

Portanto:
$$[PQR]=[BQM]-[BPRM]=\frac{15}{11}-\frac{35}{26}\Longrightarrow [PQR]=\frac{5}{286}m^2$$

Problema 2. *(Resolução da Pauta)*

Fazendo:

$f(x) = -96\cdot cos^7 x + 16\cdot cos^6 x + 152\cdot cos^5 x - 24\cdot cos^4 x - 66\cdot cos^3 x + 10\cdot cos^2 x + 6\cdot cos\, x - 1$

Escrevendo $cos \dfrac{2\pi}{9} = cos\, 40°$ e partindo das relações:

$cos\, 80° = 2 \cdot cos^2\, 40° - 1$
$cos\, 160° = 2 \cdot cos^2 80° - 1 = 8 \cdot cos^4 40° - 8 \cdot cos^2 40° + 1$

Temos:

$cos\, 40° \cdot cos\, 80° = 2 \cdot cos^3\, 40° - cos\, 40°$
$cos\, 40° cos\, 160° = 8 \cdot cos^5\, 40° - 8 \cdot cos^3\, 40° + cos\, 40°$
$cos\, 80° cos\, 160° = 16 \cdot cos^6 40° - 24 \cdot cos^4\, 40° + 10 \cdot cos^2\, 40° - 1$
$6 \cdot cos\, 40° \cdot cos\, 80° \cdot cos\, 160° = 96 \cdot cos^7\, 40° - 144 \cdot cos^5\, 40° + 60 \cdot cos^3\, 40° - 6 \cdot cos\, 40°$

Associando convenientemente os termos para $f\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)$:

$f\left(\dfrac{2\pi}{9}\right) = -6\cdot cos\, 40° \cdot cos\, 80° \cdot cos\, 160° + cos\, 40° \cdot cos\, 80° + cos\, 40° \cdot cos\, 160° + cos\, 80° \cdot cos\, 160°$

Associando as parcelas:

$P1 = cos\, 40° \cdot cos\, 160° + cos\, 80° \cdot cos\, 160° = cos\, 160°(cos\, 40° + cos\, 80°) = 2 \cdot cos\, 60° \cdot cos\, 20° \cdot cos\, 160° = cos\, 20° \cdot cos\, 160° = \dfrac{cos\, 180° + cos\, 140°}{2} = -\left(\dfrac{1 + cos\, 40°}{2}\right)$

$P2 = -6\cdot cos\, 40° \cdot cos\, 80° \cdot cos\, 160° + cos\, 40° \cdot cos\, 80° = cos\, 40° \cdot cos\, 80°\,(1 - 6 \cdot cos\, 160°) =$
$= \left(\dfrac{cos\, 120° + cos\, 40°}{2}\right)(1 - 6 \cdot cos\, 160°) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2} \cdot cos\, 160° + \dfrac{1}{2} cos\, 40°$
$-3 \cdot cos\, 40° \cdot cos\, 160° = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2} cos\, 160° + \dfrac{1}{2} cos\, 40° - 3\left(\dfrac{cos\, 200° + cos\, 120°}{2}\right) =$
$= \dfrac{1 + cos\, 40°}{2} + \dfrac{3}{2}(cos\, 160° - cos\, 200°) = \dfrac{1 + cos\, 40°}{2}$

Logo: $f\left(\dfrac{2\pi}{9}\right) = P1 + P2 = 0$; isto é $\dfrac{2\pi}{9}$ é raiz da equação dada.

Problema 3. *(Resolução da Pauta)*

a) Fazendo $D = AB$, temos:

$c_{89} = d_{98} = (a_{91}, a_{92}, a_{93}, \dots, a_{9.50})(b_{18}, b_{28}, b_{38}, ..., b_{50.8})$
$c_{89} = (1, 1, \dots, 1, 0, -1, -1, \dots, -1)(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0) = 7$

b) $b_{ij} = \sum_{k=1}^{50} (a_{ik} \cdot a_{kj})$
Separando em casos:
Para i<j:b_{ij}=(i-1).(-1)+(j-i-1).1+(50-j).(-1)$\Longrightarrow b_{ij}$=2j-2l-50
Para i=j:b_{ij}=(i-1).(-1)+(50-i).(-1) $\Longrightarrow b_{ij}$=-49
Para i>j:b_{ij}=(j-1)(-1)+(i-j-1).1+(50-i)(-1) $\Longrightarrow b_{ij}$=2i-2j-50
Resumindo:

$$b_{ij} = \begin{cases} 2j - 2i - 50, & \text{se i<j} \\ -49, & \text{se i=j} \\ 2i - 2j - 50, & \text{se i>j} \end{cases}$$

Problema 4. *(Resolução da Pauta)*

Primeiro verifiquemos que se a e b são números primos maiores que 10^6, então eles só podem ser da forma $6K+1$ ou $6K+5$, já que se K é um número natural, $K > 1$, os números da forma: $6K$, $6K+2$, $6K+3$, ou $6K+4$ são todos compostos. O primeiro é múltiplo de 2 e 3, o segundo e o quarto são pares maiores que 2 e o terceiro é múltiplo de 3, maior que 3. Se provarmos que existem infinitos primos da forma 6K+1 e da forma $6K+5$, concluímos a partir disso que existem dois números primos maiores que 10^6, que satisfazem as condições do problema.

Vamos supor que existe apenas um número finito de números primos da forma 6K+5. Digamos que esses números são $P_1, P_2, \dots, P_N$. Considere o número $P = 6P_1P_2\cdots P_N + 5$. Como P é maior que cada um dos primos $P_1, P_2, \dots, P_N$, então P tem que ser composto. Além disso, como tem que existir um número natural primo Q que divida P e nenhum dos primos $P_1, P_2, \dots, P_N$ divide P, Q tem que ser da forma $6K+1$. Mas se todo divisor primo de P fosse da forma $6K+1$, então P também seria da forma 6K+1. Logo tem que existir um primo da forma $6K+5$, diferente dos primos $P_1, P_2, \dots, P_N$, que divide P, o que prova que existem infinitos primos da forma $6K+5$. De forma análoga provamos que existem infinitos primos da forma $6K+1$.

Sem perda de generalidade, vamos supor $a=6K+1$ e $b=6L+5$, então: $ab=36KL+6(5K+L)+5$. Portanto o resto da divisão de ab por 6 é igual a 5.

Problema 5. *(Resolução da Pauta)*

$$S = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 + 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 + \cdots + 2015\cdot 2016\cdot 2017\cdot 2018 + 2015$$
$$S = \sum_{k=1}^{2015} [k(k+1)(k+2)(k+3)+1]$$
$$S = \sum_{k=1}^{2015} [k(k+3)(k^2+3k+2)+1] = \sum_{k=1}^{2015} [k(k+3)+1]^2 = \sum_{k=1}^{2015} (k^2+3k+1)^2$$
$$S = \sum_{k=1}^{n} (k^4+6k^3+11k^2+6k+1)$$
$$S = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} + \frac{3n^2(n+1)^2}{2} + \frac{11n(n+1)(2n+1)}{6} + 3n(n+1) + n$$
$$30S = 6n^5 + 60n^4 + 210n^3 + 300n^2 + 174n$$

Fazendo $n = 2015$;

$$S = \frac{1}{5}2015^5 + 2\cdot 2015^4 + 7\cdot 2015^3 + 10\cdot 2015^2 + 11687$$
$$S = 405\cdot 2015^4 + 7\cdot 2015^3 + 10\cdot 2015^2 + 11687$$

Problema 6. *(Resolução da Pauta)*

Como,

$$x^3 - (4+\sqrt{3})x^2 + (2+4\sqrt{3})x - 2\sqrt{3} = 0 \Longrightarrow (x-\sqrt{3})(x^2-4x+2) = 0$$

As raízes de $x^2-4x+2=0$ são $2-\sqrt{2}$ e $2+\sqrt{2}$.
Temos que as raízes desse polinômio serão: $\sqrt{3}$, $2-\sqrt{2}$ e $2+\sqrt{2}$

Problema 7. *(Resolução Elias Estevão Pereira dos Santos - Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)*

Os números que possuem a soma dos dígitos menor que 5 são das seguintes formas, por permutação:

Números que possuem apenas os algarismos 0, 1 ou 2:

1 algarismo um e 3 zeros: $\frac{4!}{3!} = 4$ números

2 algarismos um e 2 zeros: $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ números

3 algarismos um e 1 zero: $\frac{4!}{3!} = 4$ números

4 algarismos um: $\frac{4!}{4!} = 1$ número

Até agora são $4 + 6 + 4 + 1 = 15$ números

Números que possuem apenas os algarismos 0 ou 2:

1 algarismo dois e 3 zeros: $\frac{4!}{3!} = 4$ números

2 algarismos dois e 2 zeros: 22, 202, 220 e 2002. São 4 números.

1 algarismo dois, 1 algarismo um e 2 zeros: $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$ números menos o número 2100, então são 11 números.

1 algarismo dois, 2 algarismo um e 1 zero: $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$ números menos 2101 e 2110, então são 10 números.

Até agora são $15 + 4 + 4 + 11 + 10 = 44$ números

1 algarismo três e 3 zeros: $\frac{4!}{3!} = 4$, menos o 3000, logo são 3 números

1 algarismo três, 1 algarismo um e 2 zeros: $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$ números menos o 3001, 3010 e 3100, logo, são 9 números.

Até agora são $44 + 3 + 9 = 56$ números.

E, por fim, os números com algarismo quatro e zero: 4, 40 e 400. Logo, são $56 + 3 = 59$ os números de 1 a 2015 cuja soma dos algarismos é menor que 5.

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Curiosidades

Cálculo do volume de uma pizza

Uma pizza que tem raio "z" e altura "a" tem volume que pode ser calculado assim: $\pi \times z \times z \times a$.

Número de possibilidades com cartas do baralho

Um baralho de cartas pode ser classificado em cerca de 8×10^{67} maneiras diferentes. Isso é um 8 com 67 zeros atrás dele. Para colocar isso em contexto, mesmo que alguém pudesse virar um baralho de cartas a cada segundo de toda a existência do universo, o cosmos morreria antes que eles pudessem localizar sequer um bilionésimo de uma repetição.

Frações decimais de 7

As frações decimais de sete são os mesmos seis dígitos recorrentes, na mesma ordem, mas começando com um número diferente:

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857\ldots$$
$$\frac{2}{7} = 0,285714285714\ldots$$
$$\frac{3}{7} = 0,428571428571\ldots$$

Zero e os algarismos romanos

O único número que não podemos escrever em algarismos romanos é zero: os algarismos romanos não têm zeros. Embora os atenienses estivessem cientes da noção de zero, eles não viam zero como um numeral.
Assim, acredita-se que o termo latino "nulla" teria sido usado para expressar a noção de zero em vez de um numeral romano.

Para saber mais sobre estas e outras curiosidades, visite:
`https://segredosdomundo.r7.com/curiosidades-sobre-matematica/`

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Soluções dos Problemas Propostos

Soluções dos Problemas Propostos

Problema 1. Encontre todos os números naturais m de 5 algarismos, m divisível por 11, cuja soma de seus algarismos seja 43.

Solução de Isabella Yukari Fujita - Colégio Pontagrossense Sepam:

Se queremos um número de 5 algarismos, tal que esse seja múltiplo de 11 e a soma de seus algarismos seja 43, podemos analisar a questão em duas partes:

1) A soma deve ser 43;

   Assim, se dispostos em algarismos de 0 a 9, é tido que se escolhermos o maior algarismo possível (nesse caso, o 9) 5 vezes, obteremos 99999 cuja soma é 45 $(9+9+9+9+9)$. Se escolhermos o próximo maior algarismo (nesse caso, 8) teremos 88888 cuja soma é 40, que não alcança o 43. Com o próximo, o 7, no entanto, se dá pelo 77777 cuja soma é 35 e que também não alcança o 43. Ao analisar isso, temos que o algarismo 9 deve ser escolhido no mínimo 3 vezes, pois, dessa forma, obteremos uma possível soma 43 tal que 999ab(onde a e b podem assumir qualquer ordem) $\longrightarrow a+b=16$, e $a+b$ só pode ser $8+8$, $9+7$ (utilizando algarismos de 0 a 9).
   Sabendo isso, temos duas possibilidades para dispor os algarismos: (88999), (79999)

2) Como o enunciado pede que o número de 5 algarismos seja também múltiplo de 11, montamos as possibilidades para verificar quais números são divisíveis. Fazendo as possibilidades e dividindo essas por 11:

   88999 - não é divisivel
   89899 - não é divisivel
   89989 - não é divisivel
   89998 - não é divisivel
   98899 - não é divisivel
   98989 - **sim, é divisivel**
   98998 - não é divisivel
   99898 - não é divisivel
   99889 - não é divisivel
   99988 - não é divisivel

79999 - não é divisivel
97999 - **sim, é divisivel**
99799 - não é divisivel
99979 - **sim, é divisivel**
99997 - não é divisivel

Assim, os números naturais m de 5 algarismos, m divisível por 11, cuja soma de seus algarismos seja 43 são 98989, 97999 e 99979

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Problemas Propostos

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos. As melhores soluções serão publicadas na próxima edição e os autores receberão certificação de congratulação e um exemplar da mesma (Veja "Informações Gerais").

1. Determine todos os pares de valores inteiros não negativos (a,b), que satisfazem a equação

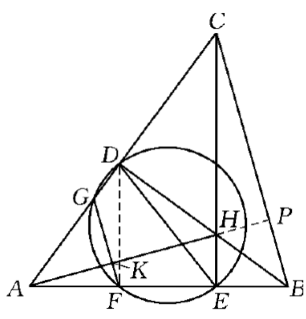
$$b^2 = 2^{2a+1} + 2^a + 1$$

2. Prove que para todos os inteiros x, a fração

$$\frac{35x+3}{14x+1}$$

não pode mais ser reduzida.

3. Em um triângulo acutângulo ABC, H é o ponto de interseção das alturas CE e BD como mostra a figura abaixo:



Um círculo com diâmetro DE intersecta AB e AC nos pontos F e G, respectivamente. Os segmentos FG e AH concorrem no ponto K. Se $BC = 25$, $BD = 20$ e $BE = 7$, qual o comprimento de AK?

4. Considere uma função $f(x)$ definida em $\mathbb{R}$ satisfazendo $f(1) = 1$ e $f(x+5) \geqslant f(x) + 5$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $g(x) = f(x) + 1 - x$, qual o valor de $g(2021)$?

5. Dada uma sequência (a_n) de números reais satisfazendo $a_0 = 1$ e

$$a_{n+1} = \frac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que

a) a_n é um inteiro positivo para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) $a_n a_{n+1} - 1$ é um quadrado perfeito para todo $n \in \mathbb{N}$.

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Informações Gerais

Envio de Artigos e Soluções

Os **Artigos** podem ser submetidos nas próximas edições da Revista da OPMat. Os documentos devem ser, preferencialmente, redigidos em Latex. As **Soluções** para os desafios encontrados na seção "Problemas Propostos" devem ser claras e submetidas juntamente com o nome do participante e o número da respectiva questão.

As submissões de artigos e soluções podem ser feitas pelo e-mail:

revistaopmat@gmail.com

Como Adquirir a Revista

Todos os alunos premiados com medalhas na 9^a OPMat receberão uma cópia física da Revista. A versão eletrônica está disponível no link:

https://www2.uepg.br/opmat/revista-da-opmat/

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, apresentar sugestões ou fazer correções através dos contatos:

Comitê Editorial
revistaopmat@gmail.com

Olímpiada Pontagrossense de Matemática
opmat@uepg.br - (42) 3220-3048
www2.uepg.br/opmat/
facebook.com/opmat.uepg
Instagram: @opmat_uepg

Departamento de Matemática e Estatística da
Universidade Estadual de Ponta Grossa
Campus Uvaranas - Bloco L - Uvaranas
Avenida General Carlos Cavalcanti, 4748
Ponta Grossa - Paraná - CEP 84030-000
demat@uepg.br - (42) 3220-3050
www2.uepg.br/demat/

Realização:

Universidade Estadual de Ponta Grossa

PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO E ASSUNTOS CULTURAIS

Departamento de Matemática e Estatística

Apoio:

Olimpíada Brasileira de Matemática

impa

Informações:

www2.uepg.br/opmat E-mail: opmat@uepg.br

www.facebook.com/olimpiada.pontagrossensedematematica

Fones: 99831-1222 / 3220-3048