1. O lugar geométrico dos pontos $P=(x,y)$ cuja distância ao ponto $Q=(1,2)$ é igual a y é uma:

   a. circunferência de raio igual a $\sqrt{5}$.
   b. parábola com foco no ponto Q.
   c. hipérbole com eixo real igual a $\sqrt{5}$.
   d. parábola com vértice no ponto Q.
   e. Um par de retas paralelas.

2. Seja P produto de todos os números naturais positivos pares menores ou iguais a 2014. Qual a maior potência de 5 que divide P?

   a. 5^{201}
   b. 5^{101}
   c. 5^{21}
   d. 5^{10}
   e. 5^{4}

3. Joãozinho pegou um número natural de três algarismos distintos e o escreveu de trás pra frente. A seguir, subtraiu o menor do maior e obteve como resultado 297. Se o primeiro algarismo era o maior dos três, então a diferença entre o primeiro algarismo e o último algarismo era:

   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 5
   e. 7

4. Escrevendo todos os inteiros positivos múltiplos de 2 ou 3 em sequência e sem espaços entre eles: 2346891012141516 18...., qual o $100^{\underline{0}}$ algarismo da sequência?

   a. 0
   b. 1
   c. 4
   d. 5
   e. 8

5. Sabendo que 997 é um número primo, quantos números maiores que 997 e menores que 997^{2} são relativamente primos com 997? Isto é, quantos números naturais n existem, tais que $997 < n < 997^{2}$ e $\text{mdc}(n, 997) = 1$?

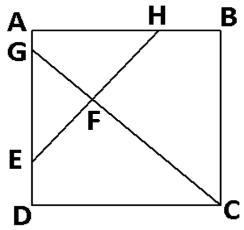
   a. 498.000
   b. 498^2
   c. 499.000
   d. 996.000
   e. 996^2

6. Numa chácara havia gatos e frangos, mais gatos do que frangos, o número total de patas dos frangos e dos gatos era 14, quantos animais, frangos ou gatos, havia na chácara?

   a. 4
   b. 5
   c. 6
   d. 7
   e. 8

XI Olimpíada de Matemática do Grande ABC – Primeira Fase – Nível 3 (1ª e 2ª séries) www.metodista.br/ev/omabc
2ª Olimpíada Pontagrossense de Matemática – Primeira Fase – Nível 3 (1ª e 2ª séries) http://sites.uepg.br/olimpiada/

7. Na figura abaixo, ABCD é um quadrado, o segmento CG é perpendicular ao segmento EH, $AH = \frac{2}{3}AB$, $DE = \frac{1}{4}AD$ e F é o ponto de intersecção dos dois segmentos. Se a área do triângulo EFG é $\frac{529}{145}$ cm², qual é a medida do lado do quadrado?

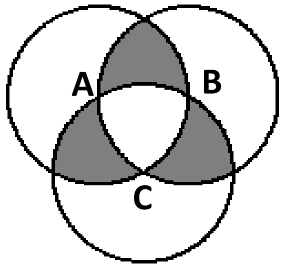


a. 5 cm
b. 6 cm
c. 7 cm
d. 8 cm
e. 9 cm

8. Uma sequência de 2014 números naturais: $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{2014}$, é construída da seguinte forma: $a_1 = 1$, e para $n > 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 3$. Qual é o último termo desta sequência?

a. $2^{2014} + 3$
b. $2^{2014} - 3$
c. 2^{2014}
d. $2^{2015} + 3$
e. $2^{2015} - 3$

9. Na figura a seguir, temos três circunferências de centros A, B e C e todas de raios iguais a 1 cm:



Qual a área da parte pintada?

a. $\frac{\pi}{4}$ cm²
b. $\frac{\pi}{2}$ cm²
c. $\frac{\pi}{6}$ cm²
d. $\frac{4\pi}{3}$ cm²
e. $\frac{5\pi}{12}$ cm²

10. Simplificando a expressão $\frac{\operatorname{sen}(3x) + \cos(3x)}{\cos x - \operatorname{sen} x}$, válida para os valores de x que não anulam o denominador, obtemos:

a. $1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$
b. $\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)$
c. $\operatorname{sen}(2x) - \cos(2x)$
d. $1 + 2\operatorname{sen}(2x)$
e. $\operatorname{sen}(2x)$

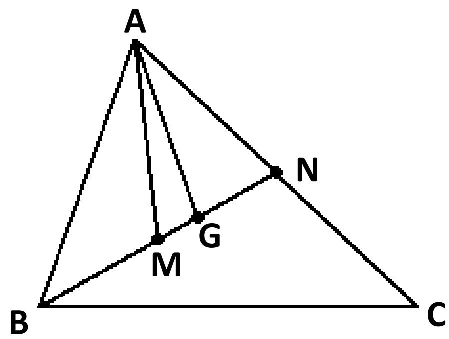
11. No dia das mães, uma comunidade fez uma festinha reunindo apenas as mães e seus filhos. Estiveram presentes todas as mães e seus respectivos filhos. Ao todo, entre mães e filhos, havia 28 pessoas na festa. Sabe-se que havia 9 mães na festa, nenhuma mãe tinha mais do que 3 filhos e 2 mães tinham exatamente 2 filhos cada uma. Quantas mães tinham apenas 1 filho?

a. 0
b. 1
c. 2
d. 3
e. 4

12. Num triângulo ABC de área $12\,\text{cm}^2$, seja N um ponto do lado AC, tal que o segmento BN é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$, e M o ponto médio do lado BC. Se P é a intersecção dos segmentos BN e AM e AC = 3AN, qual é a área do triângulo ANP?

a. $0{,}75\text{cm}^2$
b. 1cm^2
c. $1{,}25\text{cm}^2$
d. $1{,}5\text{cm}^2$
e. $1{,}75\text{cm}^2$

13. No triângulo ABC da figura abaixo, o segmento BN é uma mediana, M é o ponto médio do segmento BN e G é o baricentro.



Se a área do triângulo ABC é 12 cm², então a área do triângulo AGM é:

a. $0{,}75\text{cm}^2$
b. $0{,}8\,\text{cm}^2$
c. $1\,\text{cm}^2$
d. $1{,}2\,\text{cm}^2$
e. $1{,}5\,\text{cm}^2$

14. A função ϕ de Euler é uma função $\phi : N^* \to N$ que associa a cada número natural n positivo, a quantidade de números naturais menores que n e que são primos com n. Por exemplo, para n=12, os números menores que 12 que são primos com 12 são 1, 5, 7 e 11, logo $\phi(12) = 4$. Com base nesta definição $\phi\left(2^{2014}\right)$ é:

a. $2^{2014} - 1$
b. 2014
c. 2^{2013}
d. $2^{2013} + 1$
e. 2013

15. Ao multiplicar 28 por certo número natural, usando uma calculadora, um aluno digitou errado o algarismo das dezenas do multiplicador, digitando 5 no lugar do algarismo correto, que era 4, e digitando 2 no lugar do algarismo correto das centenas, que era 3 . Com isso o resultado obtido foi 7028. Se tivesse digitado corretamente o multiplicador, o resultado seria um número:

a. primo
b. quadrado perfeito
c. cubo perfeito
d. múltiplo de 5
e. múltiplo de 7

16. Dada uma matriz A quadrada de ordem n, podemos representar a linha-i pela n-upla ordenada $L_i(A) = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ e a coluna-j pela n-upla ordenada $C_j(A) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$. Definindo o produto de duas n-uplas ordenadas por:
$(a_1, a_2, .., a_n).(b_1, b_2, .., b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + .. + a_n b_n$,
e se A e B são duas matrizes quadradas de ordem n e B^T é a matriz transposta de B, o elemento d_{ij} da matriz $D = B^T A$ é:

a. $L_i(B).C_j(A)$
b. $C_i(B^T).C_j(A)$
c. $C_i(B).L_j(A)$
d. $C_i(B).C_j(A)$
e. $L_i(B).L_j(A)$

17. Efetuando a soma:

$$\sum_{n=1}^{2014} \left[(-1)^n n^2 \right] = -1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots + 2014^2,$$

obtemos:

a. 1007 x 2015
b. 2015
c. 2015²
d. 1007 x 2014
e. 1007² - 1

18. Para incentivar os times a jogarem no ataque e fazerem gols, as regras de um torneio de futebol foram ligeiramente alteradas, o time vencedor leva três pontos, o perdedor não ganha pontos, se houver empate com gols, cada time ganha um ponto, e se houver empate sem gols, nenhum time ganha ponto. As estatísticas finais do torneio forneceram as seguintes informações:
I - Cada time jogou com cada outro time apenas uma vez.
II - O número total de pontos de todos os times participantes foi 37.
III – Houve um vencedor em mais de 5 jogos.
IV - Houve um número ímpar de empates com gol, e só um empate sem gols.
Quantos times participaram deste torneio?

a. 5
b. 6
c. 7
d. 8
e. 9

19. Dois números naturais ímpares a e b, de dois dígitos cada um, são tais que: a é múltiplo de 7, mas não de 3, b é múltiplo de 25, o mínimo múltiplo comum dos dois é 525 e o máximo divisor comum dos dois é 5, qual é a soma desses dois números?

a. 100

b. 110

c. 115

d. 120

e. 125

20. Considere as funções $f: R \to R$ e $g: R \to R$ definidas por $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x<1 \\ x+2, & x \geq 1 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} 2x-1, & x<1 \\ x+1, & x \geq 1 \end{cases}$. Pode-se afirmar que $f(g(2x))$ é dada por:

a. $f(g(2x)) = \begin{cases} 2x-1, \text{ se } x<1 \\ 2x+3, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$

b. $f(g(2x)) = \begin{cases} 8x-1, \text{ se } x<1 \\ -2x+1, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$

c. $f(g(2x)) = \begin{cases} 8x-1, \text{ se } x<1/2 \\ 2x+3, \text{ se } x \geq 1/2 \end{cases}$

d. $f(g(2x)) = \begin{cases} 4x-1, \text{ se } x<1/2 \\ 2x-3, \text{ se } x \geq 1/2 \end{cases}$

e. $f(g(2x)) = \begin{cases} 4x+1, \text{ se } x<1 \\ x+3, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$