2ª OPMat NÍVEL 4

Universidade Estadual de Ponta Grossa

Ficha de Dados Pessoais e de Instruções

( ) Nível 1 (6º ou 7º anos) ( ) Nível 2 (8º ou 9º anos)
( ) Nível 3 (1ª e 2ª séries) ( ) Nível 4 (3ª e 4ª séries e cursinho)

2ª FASE – 11 de outubro de 2014

Nome Completo (sem abreviatura):

Data de Nascimento:

Ano/Série:

Telefone:

Email:

Colégio / escola:

Nome do seu Professor(a) de matemática:

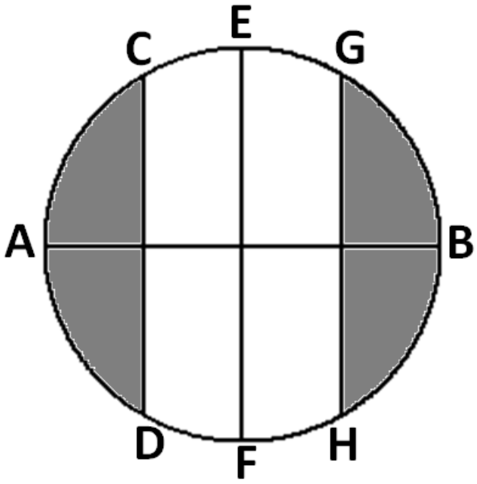
Leia atentamente as instruções antes do início da prova.

1. Preencha dos dados pessoais acima.
2. A duração da prova é de **3 horas**.
3. O **tempo mínimo** de prova é de 45 minutos.
4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta. É permitido o uso de borracha, régua, esquadros e compasso para resolver as questões da prova.
5. **Não é permitido** o uso de calculadora, celular, relógios com calculadora, ou qualquer outro aparelho eletrônico. **Não é permitido** entrar na sala de aplicação de provas com folhas de rascunho, anotações ou livros.
6. Os celulares devem permanecer desligados durante a realização da prova.
7. A solução de cada questão deverá ser escrita na página reservada a ela, de maneira organizada e legível.
8. Na correção serão considerados todos os raciocínios apresentados.
9. **Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção**.
10. Cada questão tem valor de 10 pontos. A pontuação total da prova é de 80 pontos.
11. Ao final da prova, entregue esta prova com as resoluções.

Correção: (Não fazer marcas nos retângulos abaixo)

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Questão 7	Questão8	Nota final

1) Na figura a baixo temos um círculo em que AB é um diâmetro e as cordas CD, EF e GH são perpendiculares ao diâmetro AB e o dividem em quatro partes iguais.



Determine a razão entre a área da parte pintada e a área da parte não pintada do círculo.

2) Prove que 5 divide $2^n + 3^n$ sempre que n é um número ímpar positivo.

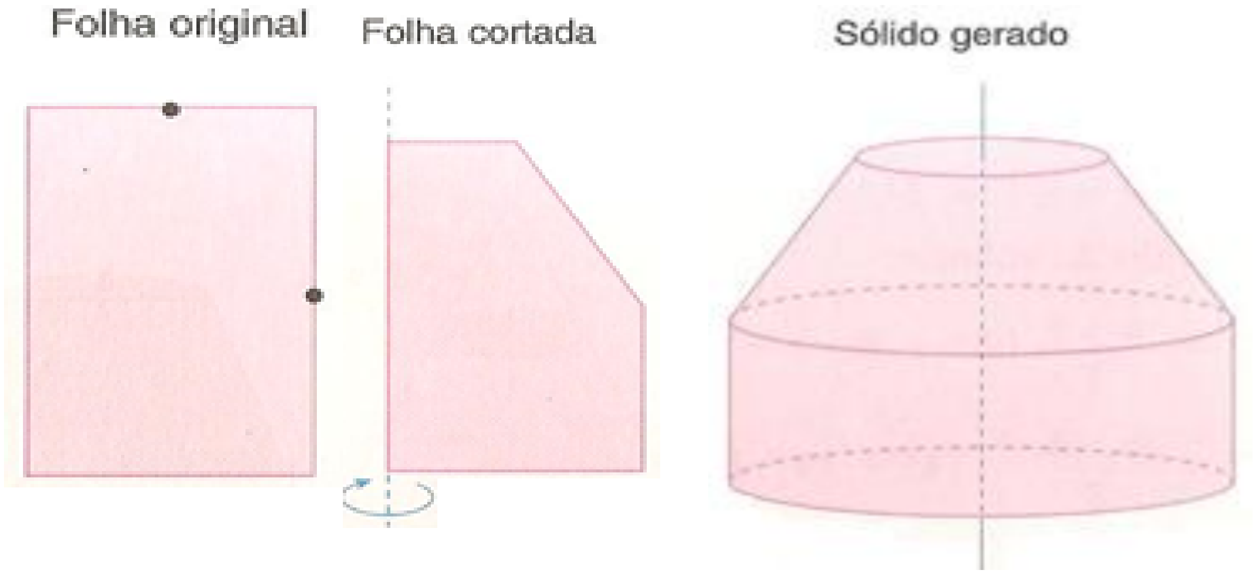
3) Para investigar o número de raízes reais de um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$, com coeficientes reais, existem algumas regras, que podem ser demonstradas. Entre elas, podemos citar: **Regra de Descartes:** O número de raízes reais positivas de P(x) nunca é maior que o número de trocas de sinal na sequência de seus coeficientes não nulos, e caso seja menor, então será sempre por uma diferença par; além disso, como as raízes negativas de P(x) são as raízes positivas de P(-x), então a mesma regra pode ser utilizada para investigar o número de raízes negativas de P(x), **Regra de Huat:** Se para algum índice k, $1 \le k \le n$, ocorrer $a_k^2 \le a_{k-1} a_{k+1}$, então P(x) terá raízes complexas não reais. Considerando estas duas regras, investigue o número de raízes reais positivas, reais negativas e complexas não reais do polinômio: $P(x) = x^4 + px^3 - 6x^2 + 22x - 15,\ p \neq 0$, em função do coeficiente real p.

4) O número complexo z é tal que $5 \cdot \left(\frac{z-1}{2} \right) - i \cdot \left(\frac{z+1}{2} \right) = 3 - i$.

a) Determine o módulo de z.

b) A sequência (z, z^5, z^9, z^{13}....) é uma P.A. ou uma P. G.? Qual a sua razão?

5) Uma folha de papel retangular mede 20 cm por 30 cm. Ligam-se os pontos médios de dois lados consecutivos e corta-se a folha no segmento que liga esses pontos. Em seguida gira-se a parte restante em torno do lado maior. Determine a área total e o volume do sólido.



6) Um ponto se move, no plano cartesiano, de modo que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, do plano, é uma constante. Obtenha a equação desta curva mostrando que é uma circunferência.

7) Mostre que existem apenas seis números naturais de três algarismos: 123, 132, 213, 231, 312 e 321, com a propriedade de que a soma de seus algarismos é igual ao produto de seus algarismos.

8) Cada termo do desenvolvimento do binômio $(x+a)^n$, $n > 6$ é escrito em uma etiqueta (todas as etiquetas iguais). O mesmo se faz com os termos de $(y+b)^n$. As etiquetas são todas colocadas numa urna e retira-se uma ao acaso. Determine a probabilidade de ter sido escolhida uma etiqueta com:

a) o termo $\binom{n}{6} \cdot a^6 \cdot x^{n-6}$.

b) um termo cujo coeficiente binomial é $\binom{n}{6}$.