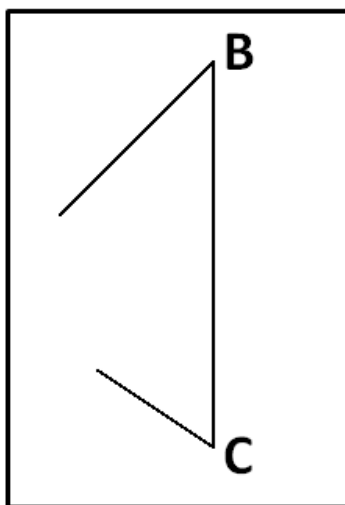




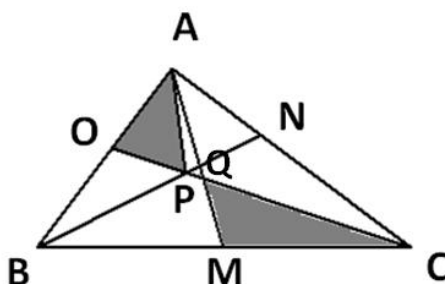
- 1) Para numerar as páginas de um livro, um editor resolveu utilizar apenas os números naturais pares, começando com o número 2; isto é, as páginas foram numeradas com os números naturais na sequência: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, etc. Se o número total de páginas do livro é 400, quantas vezes foi escrito o algarismo 0 na numeração das páginas?

- 2) A figura abaixo mostra uma página de uma prova de matemática contendo parte de um triângulo acutângulo ABC, em que o vértice A cai fora da página, do lado esquerdo.



Descreva um procedimento que permita, usando apenas um compasso e uma régua sem escala, determinar o ponto D do lado BC, tal que o segmento AD seja a altura do triângulo ABC, relativa ao lado BC.

- 3) Seja  $ABC$  um triângulo retângulo, reto em  $A$ , onde:  $AB = 3m$ ,  $AC = 4m$ ,  $\overline{AM}$  é a mediana relativa ao lado  $BC$ ,  $\overline{BN}$  e  $\overline{CO}$  são as bissetrizes dos ângulos internos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , respectivamente, o ponto  $P$  é a intersecção das bissetrizes  $\overline{BN}$  e  $\overline{CO}$  e o ponto  $Q$  é a intersecção da bissetriz  $\overline{CO}$  com a mediana  $\overline{AM}$ .



Determine a área da região pintada formada pelos triângulos  $AOP$  e  $CMQ$ .

- 4) Num torneio de futebol com 5 times, cada um deles enfrentou os outros 4, exatamente uma vez. A regra para pontuação foi a tradicional, se houver empate cada um ganha um ponto, e se houver um vencedor, este leva 3 pontos e o perdedor não ganha pontos. No final do torneio, verificou-se que somando todos os pontos obtidos por cada time, o resultado foi 23 pontos. É possível que um dos times tenha perdido todas as partidas? Justifique.

- 5) Sabendo que existem primos maiores que  $10^6$  que deixam restos diferentes quando divididos por 6, sejam  $a$  e  $b$  dois primos maiores que  $10^6$  e que deixam restos diferentes quando divididos por 6. Qual é o resto da divisão do produto  $ab$  por 36?

- 6) João, Paulo, Maria e Ana são jovens de 20, 21, 22 e 23 anos, não necessariamente nesta ordem, que adoram matemática. Cada um deles tem como ídolo um grande matemático diferente (Fermat, Euler, Lagrange ou Gauss) e tem predileção por uma área diferente da matemática, não necessariamente a mesma de destaque do seu ídolo. Além disso, dedicam quantidades diferentes, uma, duas, três ou quatro, de horas de estudo por semana a essa área. A partir das informações abaixo, descubra a idade, o ídolo, a área predileta da matemática, e o número de horas semanais dedicadas a esta área, de cada um dos jovens.
- a) A pessoa que adora geometria tem mais de 21 anos.
  - b) A pessoa que adora álgebra não tem 20 anos e seu ídolo não é Fermat nem Euler.
  - c) A pessoa cujo ídolo é Fermat dedica 1 hora de estudo a mais do que a pessoa que tem 22 anos, e uma hora a menos do que Paulo, cujo ídolo não é Euler nem Lagrange.
  - d) Maria, cujo ídolo não é Lagrange, é dois anos mais jovem que a pessoa que adora análise combinatória.
  - e) A pessoa que tem 20 anos dedica duas horas semanais a mais do que a pessoa de 21 anos.
  - f) O ídolo de Ana não é Lagrange.
  - g) A pessoa que adora análise combinatória não é Ana e dedica 4 horas semanais.

7) Mostre que:

a)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , para todo número natural  $n \geq 1$ .

b)  $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + 2015^2 = 336 \times 2015 \times 2017$ .



- 8) Listando todos os números inteiros de 1 a 2015, quantos deles têm a soma dos dígitos menor que 5? Justifique.