

1) Um pouco de álgebra.

a) Prove que $2(x + y)^2 - (x - y)^2 + (x - y)(x + y) = 2x(x + 6y)$. (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

b) Se $xy = -1$ e $x^{2018}y^{2019} + x^{2019}y^{2018} + x + y = 10$, calcule $x^2 + y^2$. (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

- 2) A milhões de anos-luz do nosso planeta Terra há um gigantesco planeta que possui 673067306730673067306730674 habitantes. Nesse planeta há um único rei que governa todos os demais habitantes, chamados de súditos. Esse rei possui 201920192019201920192019 moedas de ouro.
- a) O rei ordenou que todos os súditos fizessem a conta $365 \times 1000100010001001$. Qual é o resultado correto que todos os súditos deviam obter? (Não se esqueça de explicar como você pensou.)
- b) O rei, num momento de imenso altruísmo, resolveu distribuir todas as suas moedas de ouro igualmente entre os súditos. Quantas moedas de ouro cada súdito recebeu? (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

3) Seja n um número natural maior que 1:

a) Prove que $n^2 - n$ é sempre par. (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

b) Determine o menor valor de n tal que $n^4 - 1$ seja divisível por 2019. (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

- 4) Uma empresa comercializa kits variados de canetas nas cores preta, azul, verde ou vermelha. Sabendo que cada kit contém doze canetas, sendo pelo menos uma preta, pelo menos duas azuis, pelo menos duas verdes e pelo menos duas vermelhas, quantos kits diferentes a empresa pode disponibilizar? (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

5) Resolva:

a) Prove que $\frac{ab+cd}{2} \geq \sqrt{abcd}$ para $a = 3, b = 5, c = 2$ e $d = 7$. (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

b) Para a, b, c e d reais estritamente positivos, prove que $\frac{ab+cd}{2} \geq \sqrt{abcd}$. (Dica: Lembre-se que o quadrado de qualquer número real é positivo ou nulo). (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

6) Seja $S_{(n)}$ a soma dos algarismos de um número natural n . Por exemplo, $S_{(597)} = 5 + 9 + 7 = 21$.

a) Calcule $C = S_{(199)} - S_{(198)} + S_{(197)} - S_{(196)} + \dots + S_{(189)} - S_{(188)}$

b) Sejam $A = S_{(1921)}^2 + S_{(1922)}^2 + S_{(1923)}^2 + S_{(1924)}^2 + \dots + S_{(2018)}^2 + S_{(2019)}^2$

e

$$\frac{1}{2}B = S_{(1921)}S_{(1922)} + S_{(1923)}S_{(1924)} + \dots + S_{(2017)}S_{(2018)}.$$

Calcule $A - B$.