OPMat

UEPG UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Ficha de Dados Pessoais e de Instruções

( ) **Nível 1 (6º ou 7º anos – Ensino Fundamental II)**
( ) **Nível 2 (8º ou 9º anos – Ensino Fundamental II)**
( ) **Nível 3 (1ª e 2ª séries – Ensino Médio)**
( ) **Nível 4 (3ª e 4ª séries – Ensino Médio e Cursinho)**

Nome completo (sem abreviatura):	
Data de nascimento:	
Ano/série:	
Telefone:	
Email:	
Colégio / escola:	
Nome completo do seu professor(a) de matemática:	

Leia atentamente as instruções antes do início da prova.

1. Preencha dos dados pessoais acima.
2. A duração da prova é de **3 horas**.
3. O **tempo mínimo** de prova é de 45 minutos.
4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta. É permitido o uso de borracha, régua, esquadros e compasso para resolver as questões da prova.
5. **Não é permitido** o uso de calculadora, celular, relógios com calculadora, ou qualquer outro aparelho eletrônico. **Não é permitido** entrar na sala de aplicação de provas com folhas de rascunho, anotações ou livros.
6. Os celulares devem permanecer desligados durante a realização da prova.
7. A solução de cada questão deverá ser escrita na página reservada a ela, de maneira organizada e legível.
8. Na correção serão considerados todos os raciocínios apresentados.
9. **Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção**.
10. Cada questão tem valor de 20 pontos. A pontuação total da prova é de 120 pontos.
11. Ao final da prova, entregue esta prova com as resoluções.

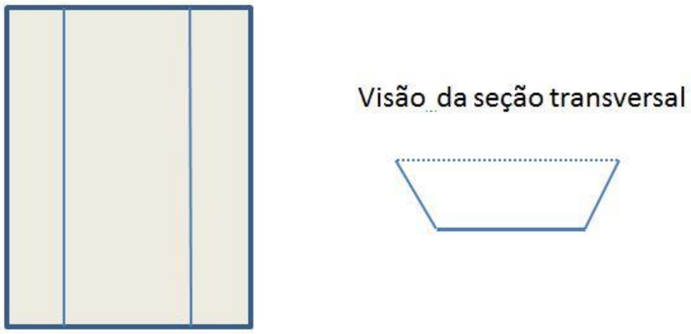
Correção: (Não fazer marcas nos retângulos abaixo)

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Nota Final

1) Sabe-se que todo número complexo $z = a + bi$ pode ser escrito na forma trigonométrica $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, onde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o módulo de z e θ é o seu argumento. É fácil deduzir que $z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$. Essa é a fórmula de De Moivre. Para $r = 1$, encontre um modo de exprimir $\cos n\theta$ como uma função de z.

2) Sejam A= 5^{2016} e B = $3^{2016} + 4^{2016}$. Determine se A < B ou A = B ou A > B.

3) Dispomos de uma chapa retangular com 30 centímetros de largura. Temos que dobra-la em forma de calha. Sua seção transversal deve ter a forma de um trapézio isósceles. Que largura devem ter os lados e que ângulo eles devem formar com o fundo da calha de modo que a seção transversal tenha área máxima e, em consequência, a calha comporte o máximo de água?



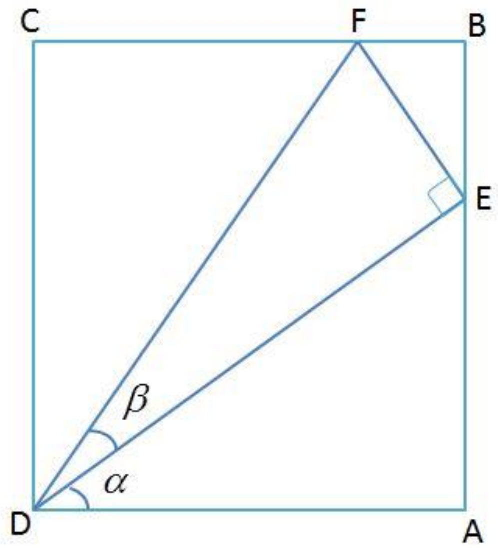
Dica: Se a soma entre quatro números é constante, então o produto entre eles será máximo quando os quatro forem iguais. (Essa afirmação também é válida para três ou dois números.)

4) Os pontos A e B estão situados acima de uma reta r conforme mostra a figura. Encontre o valor da menor distância a ser percorrida para ir de A até B, obrigatoriamente tocando a reta r em um ponto E. (Não se esqueça de explicar o teu raciocínio.)

AC = 5 cm BD = 3 cm CD = 6 cm

5) A equação $x^3-\left(5-4\sqrt{2}+6\sqrt{7}\right)x^2+\left(25-20\sqrt{2}+30\sqrt{7}\right)x-125=0$ tem três soluções distintas que colocadas em ordem crescente formam uma progressão geométrica (PG). Ache a razão dessa PG.

5) Sejam $0° < \alpha < 90°$ e $0° < \beta < 90°$ com $\alpha + \beta < 90°$. Dado um triângulo retângulo DEF, com $\hat{E} = 90°$, $\hat{D} = \beta$ e cateto maior DE = 1, podemos inscrevê-lo num retângulo formando um ângulo α com a base AD desse retângulo. Observe a figura:



Use essa figura para deduzir que $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$.