Ficha de Dados Pessoais e de Instruções

( ) Nível Júnior (5º ano – Ensino Fundamental I)
( ) Nível 1 (6º ou 7º anos – Ensino Fundamental II)
( ) Nível 2 (8º ou 9º anos – Ensino Fundamental II)
( ) Nível 3 (1ª e 2ª séries – Ensino Médio)
( ) Nível 4 (3ª e 4ª séries – Ensino Médio e Cursinho)

Nome completo (sem abreviatura):	
Data de nascimento:	
Ano/série:	
Telefone:	
Email:	
Colégio / escola:	
Nome completo do seu professor(a) de matemática:	

Leia atentamente as instruções antes do início da prova.

1. Preencha dos dados pessoais acima.
2. A duração da prova é de **3 horas**.
3. O **tempo mínimo** de prova é de 30 minutos.
4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta. É permitido o uso de borracha, régua, esquadros e compasso para resolver as questões da prova.
5. **Não é permitido** o uso de calculadora, celular, relógios com calculadora, ou qualquer outro aparelho eletrônico. **Não é permitido** entrar na sala de aplicação de provas com folhas de rascunho, anotações ou livros.
6. Os celulares devem permanecer desligados durante a realização da prova.
7. A solução de cada questão deverá ser escrita na página reservada a ela, de maneira organizada e legível.
8. Na correção serão considerados todos os raciocínios apresentados.
9. **Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção**.
10. Cada questão tem valor de 20 pontos. A pontuação total da prova é de 120 pontos.
11. Ao final da prova, entregue esta prova com as resoluções.

Correção: (Não fazer marcas nos retângulos abaixo)

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Nota Final

1) Num jogo, cada competidor adquire um cartão contendo 4 números inteiros distintos entre 1 e 32, dispostos em duas linhas e duas colunas. Os números são sucessivamente sorteados de um globo contendo 32 bolinhas numeradas com inteiros de 1 até 32. Tanto a aquisição do cartão, quanto o sorteio dos números ocorre de forma absolutamente aleatória. Vence o competidor que tiver dois números sorteados presentes em uma linha ou em uma coluna do seu cartão.

23	**08**
11	**29**

e

29	**11**
08	**23**

Os cartões acima são equivalentes, pois se você vence num dos cartões, também ganha, obrigatoriamente, no outro.

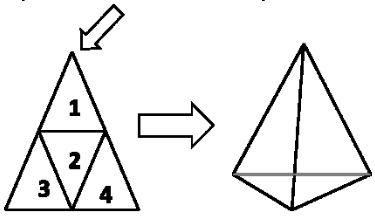
a) Encontre todos os cartões equivalentes ao cartão

09	**08**
21	**12**

b) Calcule a probabilidade de, após serem tiradas as duas primeiras bolas do globo, você ganhar tendo o cartão

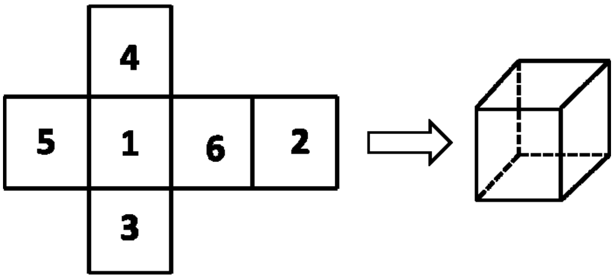
09	**08**
21	**12**

2) A figura abaixo mostra uma planificação de um tetraedro com faces numeradas. Chamamos de poder de um vértice a soma dos números que estão nas faces que contém esse vértice.

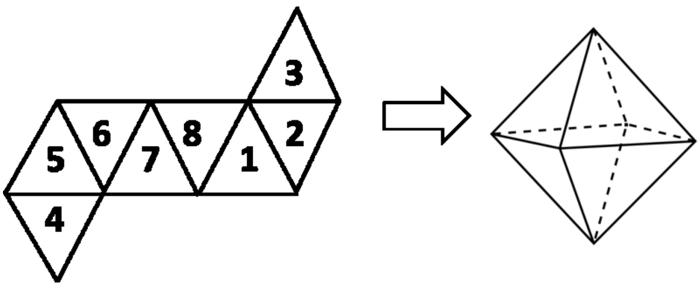


Por exemplo, o vértice indicado pela seta tem poder 1+3+4 = 8.

a) Determine qual é o menor poder que um vértice do cubo planificado abaixo tem.



b) Mostre como calcular o maior poder que um vértice do octaedro planificado abaixo possui, sem calcular o poder de todos os vértices.



3) Uma organização internacional promoveu um encontro entre casais unidos pelo matrimônio há mais de 50 anos. Uma das regras do encontro era de que cada casal cumprimentasse todos os outros casais. Os homens cumprimentavam, tanto homens quanto mulheres, com um aperto de mãos. Já as mulheres cumprimentavam os homens com um aperto de mãos e as outras mulheres com um encosto de rostos (sem aperto de mãos).

a) Se por razões desconhecidas, 3 casais não apertaram a mão de homens e outros 2 casais não apertaram a mão de mulheres, complete a tabela abaixo:

Número de casais que compareceram	Número de apertos de mão dados por homens	Número de apertos de mão dados por mulheres	Número total de apertos de mão
4			
5			
6			
7			

b) Se compareceram 41 casais e, por razões desconhecidas, 3 casais não apertaram a mão de homens e outros 2 casais não apertaram a mão de mulheres. Quantos apertos de mão ocorreram?

4) Números binomiais são definidos por $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+2)(n-p+1)}{1.2.3\dots\dots(p-1).p}$ $com\ \ 0 \leq p \leq n.$

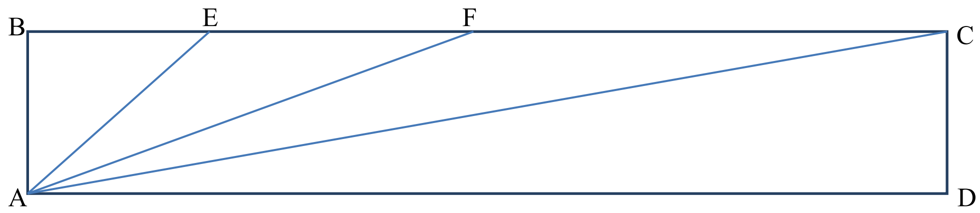
Usando o Binômio de Newton, podemos provar que
$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$. Use essas informações para:

a) Calcular o resultado de $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$.

b) Provar que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ $para\ 1 \leq k \leq n.$

c) Provar que $\frac{\binom{2018}{1}+2\binom{2018}{2}+3\binom{2018}{3}+\cdots+2017\binom{2018}{2017}+2018\binom{2018}{2018}}{2018} = 2^{2017}$.

5) Considere o retângulo abaixo:



Sabendo que: $\widehat{ACD} = 82°30'$, $AB = 1\ cm$, $AE = EF$, $AF = FC$.

a) Calcule as medidas dos ângulos $\widehat{ACB}, \widehat{AFB}\ e\ \widehat{AEB}$.

b) Calcule as medidas dos segmentos AE, BE e AF.

c) Calcule $tg(82°30')$.

(Não esqueça de explicar o teu raciocínio.)

6) Seja $S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{2015} + 2^{2016} + 2^{2017} + 2^{2018} = 2(2^{2018} - 1)$.

a) Suponha que você descobriu que:
$2 = 2^2 - 2,\ 2^2 = 2^3 - 2^2,\ 2^3 = 2^4 - 2^3,\ 2^4 = 2^5 - 2^4, \dots,\ 2^{2015} = 2^{2016} - 2^{2015},$
$2^{2016} = 2^{2017} - 2^{2016},\ 2^{2017} = 2^{2018} - 2^{2017},\ 2^{2018} = 2^{2019} - 2^{2018}$

Substituindo a tua descoberta na soma S, mostre como podemos concluir que $\mathbf{S} = 2(2^{2018} - 1)$.

b) Se $S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{2015} + 3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018}$. Mostre como você faria para chegar à conclusão que $S = \frac{3(3^{2018}-1)}{2}$. (Não esqueça de explicar o teu raciocínio.)