

Ficha de Dados Pessoais e de Instruções

- () Nível Júnior (5º ano – Ensino Fundamental I)
 () Nível 2 (8º ou 9º anos – Ensino Fundamental II)
 () Nível 4 (3ª e 4ª séries – Ensino Médio e Cursinho)

- () Nível 1 (6º ou 7º anos – Ensino Fundamental II)
 () Nível 3 (1ª e 2ª séries – Ensino Médio)

| | |
|---|--|
| Nome completo (sem abreviatura): | |
| Data de nascimento: | |
| Ano/série: | |
| Telefone: | |
| Email: | |
| Colégio / escola: | |
| Nome completo do seu professor(a) de matemática: | |

Leia atentamente as instruções antes do início da prova.

1. Preencha dos dados pessoais acima.
2. A duração da prova é de **3 horas**.
3. O **tempo mínimo** de prova é de 45 minutos.
4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta. É permitido o uso de borracha, régua, esquadros e compasso para resolver as questões da prova.
5. **Não é permitido** o uso de calculadora, celular, relógios com calculadora, ou qualquer outro aparelho eletrônico.
Não é permitido entrar na sala de aplicação de provas com folhas de rascunho, anotações ou livros.
6. Os celulares devem permanecer desligados durante a realização da prova.
7. A solução de cada questão deverá ser escrita na página reservada a ela, de maneira organizada e legível.
8. Na correção serão considerados todos os raciocínios apresentados.
9. **Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.**
10. Cada questão tem valor de 20 pontos. A pontuação total da prova é de 120 pontos.
11. Ao final da prova, entregue esta prova com as resoluções.

Correção: (Não fazer marcas nos retângulos abaixo)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Questão 1 | Questão 2 | Questão 3 | Questão 4 | Questão 5 | Questão 6 | Nota Final |
| <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 30px; margin: 0 auto;"></div> | <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 30px; margin: 0 auto;"></div> | <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 30px; margin: 0 auto;"></div> | <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 30px; margin: 0 auto;"></div> | <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 30px; margin: 0 auto;"></div> | <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 30px; margin: 0 auto;"></div> | <div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 40px; margin: 0 auto;"></div> |

1) Seja n um número natural maior que 1:

a) Prove que $n^2 - 1$ é sempre par. (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

b) Determine o menor valor de n tal que $n^4 - 1$ seja divisível por 2019. (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

2) Resolva:

a) Prove que $\frac{ab+cd}{2} \geq \sqrt{abcd}$ para $a = 3, b = 5, c = 2$ e $d = 7$. (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

b) Para a, b, c e d reais estritamente positivos, prove que $\frac{ab+cd}{2} \geq \sqrt{abcd}$. (Dica: Lembre-se que o quadrado de qualquer número real é positivo ou nulo). (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

- 3) Seja $S_{(n)}$ a soma dos algarismos de um número natural n . Por exemplo, $S_{(597)} = 5 + 9 + 7 = 21$.
- a) Calcule $C = S_{(199)} - S_{(198)} + S_{(197)} - S_{(196)} + \dots + S_{(189)} - S_{(188)}$. (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

b) Sejam $A = S_{(1921)}^2 + S_{(1922)}^2 + S_{(1923)}^2 + S_{(1924)}^2 + \dots + S_{(2018)}^2 + S_{(2019)}^2$

e

$$\frac{1}{2}B = S_{(1921)}S_{(1922)} + S_{(1923)}S_{(1924)} + \dots + S_{(2017)}S_{(2018)}.$$

Calcule $A - B$. (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

- 4) Sejam A e B matrizes tais que $A.B = A + B$.
- a) Encontre A e B, ambas de ordem 2, que contenham apenas números inteiros. (Não se esqueça de explicar como você pensou.)
- b) Sendo I_n a matriz identidade de ordem n, prove que a matriz $C = I_n - A$ tem inversa. (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

5) Seja i o número imaginário definido por $i = \sqrt{-1}$.

a) Prove que $-i = \frac{1}{i}$. (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

b) Prove que $\sqrt{2} = \frac{i+1}{\sqrt{i}}$. (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

c) Prove que $\sqrt{6} = (1 - i)\sqrt{3i}$. (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

- 6) A milhões de anos-luz do nosso planeta Terra há um gigantesco planeta que possui 6730673067306730...6730674 habitantes. Sabe-se que nesse número o 6730 repete-se 2018 vezes. Nesse planeta há um único rei que governa todos os demais habitantes, chamados de súditos. Esse rei possui 2019201920192019...20192019 moedas de ouro. Sabe-se também que esse número contém 2019 vezes o 2019.
- a) O rei ordenou que todos os súditos fizessem a conta $365 \times 10001000100010001001$. Qual é o resultado correto que todos os súditos deviam obter? (Não se esqueça de explicar como você pensou.)
- b) O rei, num momento de imenso altruísmo, resolveu distribuir todas as suas moedas de ouro igualmente entre os súditos. Quantas moedas de ouro cada súdito recebeu? (Não se esqueça de explicar como você pensou.)