1
2019

Revista OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática

"Promovendo a inclusão social e ajudando a mudar o cenário da educação."

Universidade Estadual de Ponta Grossa,
Setor de Ciências Exatas e Naturais
Departamento de Matemática e Estatística

Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

v.1 (2019)

Olimpíada Pontagrossense de Matemática

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Reitor: Miguel Sanches Neto
Vice-Reitora: Everson Augusto Krum

PRÓ-REITORIA DE ASSUNTOS ADMINISTRATIVOS - PROAD

Pró-Reitor: Ivo Mottin Demiate

PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO - PROEX

Pró-Reitor: Cloris Regina Blanski Grden

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO - PROGRAD

Pró-Reitor: Lígia Paula Couto

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Chefe: Margarete Aparecida dos Santos
Chefe Adjunto: Deyse Márcia Pacheco Gebert

Apoio:

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA - IMPA

CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática/ Universidade Estadual de Ponta Grossa. Departamento de Matemática e Estatística. v.1 (2019). Ponta Grossa: UEPG/ DEMAT, 2019.

Anual

1. Matemática – competições. 2. Matemática – questões problemas. 3. Matemática – exercícios. I. Universidade Estadual de Ponta Grossa. II. Departamento de Matemática e Estatística. III. T.

CDD: 510

Ficha Catalográfica elaborada por Maria Luzia Fernandes Bertholino dos Santos – CRB9/986

Comissão da Olimpíada Pontagrossense de Matemática: Alessandra Cardozo, Elisangela dos Santos Meza, José Trobia, Josnei Francisco Peruzzo, Marcos Teixeira Alves e Scheila Valechenski Biehl

Coordenadora da OPMat: Elisangela dos Santos Meza

Coordenador da Revista da OPMat: Marcos Teixeira Alves

Supervisores da edição da Revista da OPMat: Marcos Teixeira Alves e Scheila Valechenski Biehl

Comitê Editorial da Revista:
Elen da Rosa Silva
Elisangela dos Santos Meza
Gabriel da Silva Lima
Laila Andrade Sturmer
Lourdes A. Luz
Marcos Teixeira Alves
Scheila Valechenski Biehl

Editoração Eletrônica:
Elen da Rosa Silva
Elisangela dos Santos Meza
Gabriel da Silva Lima
Laila Andrade Sturmer
Lourdes A. Luz
Marcos Teixeira Alves
Scheila Valechenski Biehl

Tiragem:
300 exemplares

Arte da Capa:
CCOM - Coordenadoria de Comunicação

Postagem:
Segundo semestre de 2019

Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática v.1 (2019)

Sumário

Apresentação

Caro Leitor,

A *Revista da Olímpiada Pontagrossense de Matemática* é resultado do projeto de extensão: *Olímpiadas de Matemática: Promovendo a Inclusão Social e ajudando a mudar o cenário da Educação*, desenvolvido pelo Departamento de Matemática e Estatística da UEPG. Tem periodicidade anual, sendo este o seu 1° volume.

O principal objetivo da Revista é compor um material robusto em conteúdos matemáticos com vista a ser utilizado como recurso pedagógico ao letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e como fonte de estudo e treinamento para olimpíadas de matemática.

Encorajamos todos os leitores a nos enviar soluções para os desafios encontrados na seção "Problemas Propostos", bem como submeter artigos, que serão publicados na próxima edição, desde que sejam aprovados pelo Comitê Editorial da Revista.

Para ficar por dentro das notícias da Olimpíada Pontagrossense de Matemática; próximas edições, fotos e resultados, acompanhe-nos pela nossa rede social:

facebook.com/olimpiada.pontagrossensedematematica

Ponta Grossa, 01 de setembro de 2019.

Comitê Editorial

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática

6ª OPMat 2018

Premiados

A Cerimônia de Premiação da *6ª Olimpíada Pontagrossense de Matemática* ocorreu no dia 01 de dezembro de 2018, no Cine Teatro Pax, em dois horários distintos: às 09h30 para os alunos do Nível **Júnior** (5º ano do Ensino Fundamental I) e às 14h30 para os alunos dos Níveis **1** (6º e 7º anos do Ensino Fundamental II), **2** (8º e 9º anos do Ensino Fundamental II), **3** (1ª e 2ª séries do Ensino Médio) e **4** (3ª e 4ª séries do Ensino Médio e aqueles estudantes que tenham concluído Ensino Médio há menos de um ano e não tenham ingressado em nenhum curso superior, quando da realização da primeira fase da OPMat).

No período da manhã, a Cerimônia de Premiação contou com a presença das seguintes autoridades:

- Profº Everson Augusto Krum - Vice Reitor da Universidade Estadual de Ponta Grossa
- Profª Cloris Regina Blanski Grden - Pró-Reitora de Extensão e Assuntos Culturais da UEPG
- Profª Lígia Paula Couto - Pró-Reitora de Graduação da UEPG
- Profª Sandra Mara Dias Pedroso - representando o Núcleo Regional da Educação de Ponta Grossa
- Profª Annaly Schewtschik - Assessora Pedagógica da Secretaria Municipal de Educação e Coordenadora de Matemática da Rede Municipal de Educação de Ponta Grossa
- Profº Luiz Alexandre Gonçalves Cunha - Diretor do Setor de Ciências Exatas e Naturais da UEPG
- Profª Margarete Aparecida dos Santos - Chefe do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG
- Profª Marli Terezinha Van Kan - Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPG
- Profº Airton Kist - Coordenador do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da UEPG

- Profª Elisangela dos Santos Meza - Coordenadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Nessa Cerimônia foram premiados 142 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 15,2% dos alunos que participaram do Nível Júnior da 6ª OPMat): 2 alunos com troféus; 5 com medalhas de ouro; 11 com medalhas de prata; 52 com medalhas de bronze e 79 com medalhas de menção honrosa.

Também foram entregues troféus para as escolas e para os professores dos alunos que obtiveram a maior pontuação na 6ª OPMat da rede particular e da rede pública. Todos os professores cujos alunos foram premiados receberam certificados de congratulações, assim como todas as escolas participantes da 6ª OPMat.

No período da tarde, a Cerimônia de Premiação contou com a presença das seguintes autoridades:

- Profº Miguel Sanches Neto - Reitor da Universidade Estadual de Ponta Grossa
- Profª Sandra Mara Dias Pedroso - representando o Núcleo Regional da Educação de Ponta Grossa
- Profº Luiz Alexandre Gonçalves Cunha - Diretor do Setor de Ciências Exatas e Naturais da UEPG
- Profª Deyse Marcia Pacheco Gebert - Chefe Adjunto do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG
- Profª Scheila Valechenski Biehl - Vice-Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPG
- Profº Airton Kist - Coordenador do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da UEPG
- Profª Elisangela dos Santos Meza - Coordenadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática
- Profº Josnei Francisco Peruzzo - Membro da Comissão Organizadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Na ocasião foram premiados 245 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 27,5% dos alunos que participaram da primeira fase da 6ª OPMat): 8 estudantes com troféus; 20 com medalhas de ouro; 37 com medalhas de prata; 98 com medalhas de bronze e 90 com medalhas de menção honrosa.

Foram entregues troféus para as escolas e para os professores dos dois alunos que obtiveram a maior pontuação em cada nível (1, 2, 3 e 4) da 6ª OPMat, sendo um de escola particular e um de escola pública. Além disso, todos os professores cujos alunos foram premiados receberam certificados de congratulações, assim como todas as escolas participantes da 6ª OPMat.

Nível Júnior

Troféu

- Antônio José Heberle Sebastiane (Colégio Positivo Master)
- Francisco Grokovski (Escola Municipal João Maria Cruz)

Ouro

- Antônio José Heberle Sebastiane (Colégio Positivo Master)
- Aquiles Santos Carmo (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Elton Walesko de Souza (Escola Santo Ângelo)
- Julia Konofal Blank (Colégio Marista Pio XII)
- Luis Eduardo Cosseti Correia (Colégio Sagrado Coração de Jesus)

Prata

- Camila Pinheiro Nogueira (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Fernando Deloski Kachinski (Colégio Sagrada Família)
- Francisco Grokovski (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Júlia Vieira dos Santos (Colégio Positivo Master)
- Leonardo Luiz Chaves Domingues (Colégio Pontagrossense Sepam)

- Luca Christoforo Tavarnaro (Colégio Marista Pio XII)
- Mariana Janiaki da Silva (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Mariele Breda (Colégio Sagrada Família)
- Pedro Gabriel Sansana (Colégio Marista Pio XII)
- Uriel Benetti Prado Goetz (Escola Municipal Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Vanessa Ribeiro dos Santos (Escola Municipal João Maria Cruz)

Bronze

- Alex Gutknecht Baba (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Ana Clara Fogaça Souza (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- André Felipe Soistak (Colégio Sagrada Família)
- Anelise Margueritte de Oliveira (Escola Municipal Prefeito José Hoffmann)
- Arthur Henrique Krüger Geronimo (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Braian Colman (Escola Municipal Prefeito Jose Bonifacio Guimaraes Vilela)
- Bruna Bahls de Almeida Farhat (Colégio Positivo Master)
- Bruno Eldberg (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Caio Augusto Fernandes (Colégio Sagrada Família)
- Caio Malucelli Straiotto (Colégio Positivo Master)
- Carlos Guilherme Katzewwadel (Colégio Marista Pio XII)
- Danilo Schermak (Colégio Sagrada Família)
- Eduarda Grizoski (Escola Municipal Professora Haydée Ferreira de Oliveira)
- Eduardo Stadler Tozin (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Eduardo Vaz Rodrigues (Escola Municipal Prefeito Engenheiro Cyro Martins)

- Enzo de Paula Brêga (Colégio Marista Pio XII)
- Evandro Luis Rosa (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Felipe Cauã Hekavei (Escola Municipal Felício Francisquiny)
- Felipe de Souza Dias (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Felipe Westphal Julio (Colégio Marista Pio XII)
- Gabriel Henrique da Costa Heil (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Guilherme Portela Lorencet (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Henrique Gumurski Sedrez (Colégio Marista Pio XII)
- Isabelly Romualdo Cordeiro Martins (Escola Municipal Professora Dercia do Carmo Noviski)
- João Pedro Umbelino Barbosa (Colégio Alfa Plus)
- Kauan Henrique Soares Rosa (Escola Municipal Deputado Mário Braga Ramos)
- Kelvyn Gabriel Antunes da Silva (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Laisa Ferreira (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Leandro Oliveira de Souza (Colégio Positivo Master)
- Lucas Matheus de Oliveira Pereira (Escola Municipal Professor Rubens Edgard Furstenberger)
- Lucas Vinicius de Lara Ribeiro (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Luciano Ferreira Machado (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Manoela Alonso Siqueira Zadorosny (Colégio Marista Pio XII)
- Marcela Meira da Rosa (Escola Municipal Prefeito Engenheiro Cyro Martins)
- Maria Antônia Parra Leite (Colégio Positivo Master)
- Maria Helloyse Corrêa de Lima (Escola São Jorge de Ponta Grossa)

- Mariana de Moura Fernandes (Escola Municipal Professor Rubens Edgard Furstenberger)
- Marina Staut Tulio (Escola Santo Ângelo)
- Massamiti Munefiça Neto (Colégio Sagrada Família)
- Matheus Alessandro Prado (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Nicholas Rodrigues Furtado (Escola Municipal Professora Minervina França Scudlareck)
- Nicolas Andrade de Mattos (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Otavio Felipe Garcia Mattauch (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Paulo de Tarso Belo Leôni (Escola Santo Ângelo)
- Pedro Campos Schwab (Colégio Marista Pio XII)
- Peterson de Lara Chuartz (Escola Municipal Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Rhian Henrique Ribas (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Sofia Sokolowiski Galvani (Escola Santo Ângelo)
- Thiago Vieira Rangel (Escola Municipal Professor Faris Antonio Michaele)
- Victor Davi Ávila de Oliveira (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Victor Gabriel Chleski (Escola Municipal Prefeito Doutor Fulton Vitel Borges de Macedo)
- Wesley Gabriel Baranek (Colégio Sagrado Coração de Jesus)

Menção Honrosa

- Alexandre Cordeiro Dias de Souza (Escola Municipal Deputado Mário Braga Ramos)
- Amanda Orizzi Moutinho de Souza (Colégio Marista Pio XII)
- Amanda Ribeiro Silva (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)

- Ana Carolina Lopes de Souza (Colégio Positivo Master)
- Ana Clara Bonfanti (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Ana Júlia Cavalheiro Pucci (Colégio Sagrada Família)
- Andrielly Tinale de Carvalho (Escola Municipal Guaracy Paraná Vieira)
- Bernardo Cordeiro Melek (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)
- Bruno Antunes dos Santos (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Caique Espindula Tullio (Colégio Integração)
- Camila Brasil Silva (Colégio Marista Pio XII)
- Carlos Heitor Bombardi (Escola Municipal Professor Jorge Dechandt)
- Carolina Giacchini Kloth (Escola Desafio)
- Carolina Krepel (Colégio Sagrada Família)
- Christiano Nascimento dos Santos (Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Daniela Marques Bandeira (Colégio Positivo Master)
- Davi Grando Primor (Colégio Integração)
- Eduarda de Paula (Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Schnirmann)
- Felipe Pavoski Restanho (Colégio Marista Pio XII)
- Franciny dos Santos (Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach)
- Francisco Belmiro dos Santos Neto (Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Gabriel de Quadros Araujo Dos Santos (Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach)
- Gabriel Fontana Moreira (Colégio Sagrada Família)
- Gabriel Machado (Escola Municipal Professora Ecléa Dos Passos Horn)

- Gabriel Moreira Pereira (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Giovana Boin Pavelecini (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Guilherme Dutra Alves (Escola Municipal Deputado Djalma de Almeida Cesar)
- Guilherme Justus Ferreira (Colégio Sant Ana)
- Gustavo Colaço (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Gustavo Lopes Rodrigues (Escola Municipal Professor Jorge Dechandt)
- Henrique Heichuk de Oliveira (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Henry Cainã Lacerda (Escola Desafio)
- Iolanda Anita Knebel Dias de Oliveira (Escola Desafio)
- Isadora Helena Fernandes (Colégio Marista Pio XII)
- Jonathan Antunes de Lima (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Julia Caillot de Souza (Colégio Sagrada Família)
- Julia Fernanda Jobbins (Escola Municipal Prefeito Doutor Othon Mader)
- Julia Graziely de Paula (Escola Municipal Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Julia Leite Dias (Escola Municipal Aristeu Costa Pinto)
- Julia Liebel (Escola São Jorge de Ponta Grossa)
- Lavinia de Morais Ferreira (Colégio Alfa Plus)
- Leonardo Daniel Naumann de Carvalho (Escola Municipal Prefeito Engenheiro Cyro Martins)
- Leonardo Nogueira Martins (Colégio Positivo Master)
- Leticia Taline Prado (Colégio Marista Santa Mônica)
- Livia Maria Virgílio Ferreira (Escola Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)
- Lucas Ambrosio Castro (Colégio Marista Pio XII)

- Lucas Sasse (Colégio Sant Ana)
- Lucas Tonon Alves (Colégio Marista Pio XII)
- Luis Eduardo Guasque Klaime (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Luísa Balula de Ramos (Colégio Alfa Plus)
- Luiz Henrique Tkaczuk (Colégio Sagrada Família)
- Luiza de Oliveira Pimentel (Escola Municipal Prefeito Doutor Othon Mader)
- Maicon Eduardo Braga (Escola Municipal Professora Maria Eulina Santos Scheena)
- Maria Júlia de Paiva (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Maria Laura Corrêa Viana (Colégio Sagrada Família)
- Maria Luiza Manosso da Luz (Escola Municipal Prefeito José Hoffmann)
- Mariana Avelino da Silva (Colégio Marista Pio XII)
- Mariana Sviercoski Tobias Pinto (Escola Santo Ângelo)
- Mario Henrique Muzeka (Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel)
- Matheus Miguel Rodrigues Donha (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Murilo Daniel Malinoscky (Colégio Sagrada Família)
- Murilo de Andrade Jensen (Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Schnirmann)
- Nathalia Cristina Cereijo de Lima (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Nathaly da Rosa Santos (Escola Municipal Professora Maria Vitória Braga Ramos)
- Nathaly Sthefani de Abreu Sviech (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Nickson Ribeiro de Arruda (Escola Municipal Prefeito Engenheiro Cyro Martins)

- Nicolli Caroline Camargo (Escola Municipal Prefeito Doutor Elyseu de Campos Mello)
- Patricia Rio Branco (Escola Municipal Padre José Bugatti)
- Rafael Boiko Neto (Escola Santo Ângelo)
- Rafael de Souza Francisco (Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach)
- Rafaela Batista Krik (Escola São Jorge de Ponta Grossa)
- Rafaela Staut Tulio (Escola Santo Ângelo)
- Raylon Naan Stofela Policeno (Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach)
- Sthefany Meira Vidal (Escola Municipal Deputado Mário Braga Ramos)
- Thyago Rodrigues Fernandes (Colégio Marista Pio XII)
- Vinicius Gabriel Kruger (Escola Municipal Guaracy Paraná Vieira)
- Vitor Gabriel Fernandes da Silva (Escola São Jorge de Ponta Grossa)
- Vitor Pacheco dos Santos (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- Yasmin Rafaelli Alves Muehlbauer (Escola Municipal Padre José Bugatti)

Nível 1

Troféu

- Felipe Mandalozzo Tebcherani (Colégio Positivo Master)
- Ruan Eneias Ferreira (Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres)

Ouro

- Alvaro Ivanski Sabedotti (Colégio Positivo Master)
- Felipe Mandalozzo Tebcherani (Colégio Positivo Master)
- João Vitor Simões Cipolari (Colégio Elite Tales de Mileto)

- Rodrigo Catto Menin (Escola Desafio)
- Thomas Lankszner Bach (Colégio Marista Pio XII)

Prata

- Alice Sangalli Saito (Colégio Positivo Master)
- Beatriz Stadler Ribas (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Brenda Bach (Escola Bom Pastor)
- Francisco Galvão Coloda (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gabriela Antoniacomi (Colégio Positivo Master)
- Gustavo Scarpim Schraier (Colégio Marista Pio XII)
- João Guilherme Pivatto (Colégio Sant Ana)
- Lavinia Borges da Silva (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Mitzi Vedan de Ramos (Colégio Integração)
- Rodrigo Dimbarre Ingles (Colégio Alfa Plus)
- Ruan Eneias Ferreira (Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres)

Bronze

- Adrian Juan Lara da Silva (Colégio Estadual Padre Arnaldo Jansen)
- Amanda Malaine Martins de Oliveira (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Ana Julia da Silva (Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)
- Ana Marcela Reis de Freitas (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Anthony Matheus Fornazzari Martins (Escola Jesus Divino Operário)
- Arthur Martins Daux Medeiros (Escola Medalha Milagrosa)
- Bernardo de Lima da Silva (Escola Medalha Milagrosa)

- Carlos Henrique Arving (Escola Medalha Milagrosa)
- Daniel dos Santos Pereira Rodrigues (Colégio Sagrada Família)
- Danilo Veide (Escola Medalha Milagrosa)
- Denis Rauch (Colégio Integração)
- Diogo Malaine Gonzalez (Colégio Estadual Sirley Jagas)
- Emilly Victoria Coronado Cheremeta (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Gabriella da Silva Franco (Colégio São Francisco)
- Gabriella Ferraz Costa Siqueira (Escola Medalha Milagrosa)
- Guilherme Cruz Skoretzky (Colégio Positivo Master)
- Harison Messias Rodrigues Moura (Colégio Estadual 31 de Março)
- Jefferson Luis Namur Junior (Colégio Sagrada Família)
- João Gustavo Verner Eidan (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Kauanne Davila Souza Santos (Escola Medalha Milagrosa)
- Laura Moscardi Milleo (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Leandro Martins Machado Hyeda (Colégio Alfa Plus)
- Leticia Felis Wolski (Colégio Sagrada Família)
- Lorenzo Bazeggio Licodiedoff (Colégio Marista Pio XII)
- Lucas Rocha de Oliveira (Escola Medalha Milagrosa)
- Lucas Tramontim Silveira Alves (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Manuela Montes Guimaraes (Escola Medalha Milagrosa)
- Marcela Nabozny Fagundes (Colégio Sagrada Família)
- Marina Garcia Ourique (Colégio Sagrada Família)
- Matheus Pedroso da Rocha (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)

- Nicolas Gurski Florenzano (Colégio Alfa Plus)
- Pedro Augusto Santana (Colégio Positivo Master)
- Rafael Barbosa Vaz (Escola Desafio)
- Rodolfo Augusto Furmann Zappe (Colégio Sagrada Família)
- Sibely de Lima Santos (Escola Jesus Divino Operário)
- Vinicius Sviatovsk Aragão (Colégio Estadual Sirley Jagas)
- Vitor Camargo dos Santos (Colégio Marista Santa Mônica)
- Walter Vieira Neto (Colégio Sagrada Família)

Menção Honrosa

- Allana Bernardo de Oliveira (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Ana Julia Maciel Maron (Colégio Positivo Master)
- Ariel Henrique Simone (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Arthur Salata (Escola Santo Ângelo)
- Aurora Tavares Schiavon (Escola Bom Pastor)
- Beatriz Arima Dechandt (Colégio Alfa Plus)
- Beatriz Namur dos Santos (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Bruna Alberti Schrut (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Bruna Gabriely Chila (Colégio São Francisco)
- Bruna Santana Montuani (Colégio Integração)
- Caue Henry Furquim Castellar (Colégio Sagrada Família)
- Eduardo Dimbarre Ingles (Colégio Alfa Plus)
- Eduardo Moreira Só (Colégio Pontagrossense Sepam)

- Emanuel Caetano Chemin Goulart (Colégio Sagrada Família)
- Felipe Fonseca Cordeiro dos Santos (Escola Medalha Milagrosa)
- Henrique Scorsim dos Santos (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Julia Fernandes Kavitski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Leonardo Henrique Bonfanti (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lucas Gabriel Dal Col (Escola Bom Pastor)
- Luiza Kapp Lepinski (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Manuela Rolim Carneiro (Colégio Marista Pio XII)
- Manuella Louize Pasturczak Schade (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Maria Clara Amaro Cinel (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Maria Eduarda Schmidt Werlang (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Maria Eduarda Vosgerau Ferreira Ribas (Colégio Positivo Master)
- Maria Fernanda Pitlovanciv Madureira (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Marina Carvalho de Oliveira Ramos (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Mauricio Pedroso Filho (Colégio Sagrada Família)
- Melody Shibuta Sovinski (Colégio Alfa Plus)
- Natalia Dolgan (Escola Estadual Frei Doroteu de Padua)
- Rafael Ricetti Macagnan Santos (Escola Bom Pastor)
- Raul Alexandre Soares Lao (Colégio Sagrada Família)
- Samuel de Andrades Rickli (Colégio Integração)
- Sandro Gabriel Dias Valões (Colégio Estadual Padre Arnaldo Jansen)
- Tiago de Anhaia Polski (Colégio Sant Ana)
- Vinicius Ribas Bida (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Yasmin Aparecida Kuhn (Colégio São Francisco)

Nível 2

Troféu

- Renata Nadal Baier (Colégio Marista Pio XII)
- Isabella Yukari Fujita (Escola Medalha Milagrosa)

Ouro

- Gabriel França Ferreira (Colégio Marista Pio XII)
- Gabriela Brasil Silva (Colégio Marista Pio XII)
- Gustavo Borges Machado (Colégio Integração)
- Isabela Alberti Fischer (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Renata Nadal Baier (Colégio Marista Pio XII)
- Renato Mandalozzo Tebcherani (Colégio Positivo Master)

Prata

- Adnei Gabriel Marins Knupp (Colégio Integração)
- Ariel Scheifer Pereira dos Santos (Colégio Estadual João Von Borell Du Vernay)
- Beatriz Sousa Maestri (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Geovanna Ferraz Costa Siqueira (Escola Medalha Milagrosa)
- Giovana Kuan (Escola Medalha Milagrosa)
- Gustavo Guse Martins (Colégio Marista Pio XII)
- Isabella Yukari Fujita (Escola Medalha Milagrosa)
- João Matheus Schirlo (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Maria Luiza Borg (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Vinicius Eduardo Wieliczko (Colégio Alfa Plus)

Bronze

- Adryan Fernando Alves Haile (Colégio Estadual Professor Becker E Silva)
- Allan Roberto Lugo (Colégio Estadual João Von Borell Du Vernay)
- Amandha Caroline Luz (Escola Medalha Milagrosa)
- Andre de Paula de Camargo (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Andre Luis Rodrigues (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Ariadne Dechandt Damasio (Colégio São Francisco)
- Augusto Philippus Lack (Colégio Alfa Plus)
- Beatriz Pereira Machado (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Carlos Eduardo Baniski (Colégio Marista Pio XII)
- Cesar Augusto Correa Terlan (Colégio Estadual General Antonio Sampaio)
- Claudiney Gustavo Rodrigues dos Santos (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Danieli Levandoski (Escola Espírito Santo)
- Eduardo Kuller Macedo (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Ester Graciana Silva (Colégio Estadual 31 de Março)
- Gabriel Felipe Shigio (Colégio Sagrada Família)
- Gabriel Schraier (Colégio Marista Pio XII)
- Gabriela Balzer Maciel (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Giovana Kwiatkovski Godinho (Colégio Positivo Master)
- Ian Amatnecks Mainginski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Jose Emanuel do Nascimento (Escola Estadual Frei Doroteu de Padua)
- Lucas Rudolfo Schuchardt (Escola Bom Pastor)

- Maria Eduarda Gonçalves Reis (Colégio Sagrada Família)
- Matheus Luiz Bach (Escola Bom Pastor)
- Pedro Henrique Camargo dos Santos (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)
- Pedro Ramos Pereira (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Tamires de Fatima Soares (Escola Monteiro Lobato)
- Victor Luiz Kedrovski (Colégio Positivo Master)
- Vinicius Daniel Geremias (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Vinicius Scremin (Colégio Marista Pio XII)
- Yves Figueiredo Artmann (Escola Medalha Milagrosa)

Menção Honrosa

- Ana Beatriz Rentscler (Escola Bom Pastor)
- Ana Julia Pereira de Souza e Silva (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Barbara Hoffmam Wosiack (Colégio Sant Ana)
- Beatriz Locatelli Pareschi (Escola Bom Pastor)
- Bianca Borges dos Santos (Colégio Ponta Grossa)
- Bruno Cheres de Oliveira Cruz (Colégio Alfa Plus)
- Camila Conrado dos Santos (Escola Medalha Milagrosa)
- Daiana Gomes de Oliveira (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Danilo Gonçalves Santos (Colégio Integração)
- Eduarda Borges Gaspar (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Elias Torres do Nascimento (Escola Jesus Divino Operário)
- Enzo Serenato (Colégio Marista Pio XII)

- Fernanda Vieira Garrido (Colégio Marista Pio XII)
- Flavia Maichaki Knysak (Colégio Marista Pio XII)
- Gabriela Wurm (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Gabrielly Aparecida Chaves (Colégio Integração)
- Gustavo Henrik Natunen (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gustavo Henrique Teixeira Wiechaz (Colégio Integração)
- Jose Emanuel do Nascimento (Escola Estadual Frei Doroteu de Padua)
- Karyn Maria Wenglarek (Colégio Positivo Master)
- Ketlin Gabriela Costa Severo (Colégio Integração)
- Laiane Vitória Pedrozo de Mello (Colégio Estadual General Antonio Sampaio)
- Laura Malucelli Straiotto (Colégio Positivo Master)
- Laura Samways Gaertner Moro (Colégio Sagrada Família)
- Livia de Morais Pereira (Colégio Sagrada Família)
- Luiz Eduardo Ferreira Ribas (Colégio Positivo Master)
- Luiz Felipe Krzesinski Jaretz (Escola Bom Pastor)
- Luiz Henrique Bahls (Colégio Integração)
- Maria Luisa Mello Fontoura de Souza (Colégio Sagrada Família)
- Matheus Alves Galvão (Colégio Sagrada Família)
- Pedro Augusto Bruno Justus (Colégio Positivo Master)
- Pedro Henrique Brandão Pereira (Escola Desafio)
- Rafael Boldt Rodrigues de Souza (Escola Bom Pastor)
- Roger Arima Dechandt (Colégio Alfa Plus)
- Vitor Brandelero (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Welinton Murilo Camargo (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)

Nível 3

Troféu

- Danilo Beltrame (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Rafael Adriano Ferreira Elesbão (Colégio Estadual Regente Feijó)

Ouro

- Cassiano Jose Kounaris Fuziki (Colégio Marista Pio XII)
- Danilo Beltrame (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Leonardo Ferreira (Colégio Marista Pio XII)
- Lucas Perondi Kist (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Rafael Antonio Chinelatto (Colégio Marista Pio XII)

Prata

- Bruno Vieira Harmatiuk (Colégio Agricola Estadual Augusto Ribas)
- Davi Moreira dos Santos Junior (Colégio São Francisco)
- Elaine Cristina Margraf Martins (Colégio Sant Ana)
- Gabriel Leme Campos (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Jordana Nicoly Carraro (Colégio Sagrada Família)
- Rafael Adriano Ferreira Elesbão (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Rhuan Kleber Gonçalves (Colégio Integração)
- Samantha Banik (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Thiago Martins Figueiredo (Colégio Positivo Master)
- Yan Eneias Ferreira (Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres)

Bronze

- Adilson Antunes Fernandes (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Adriel de Matos Ribeiro (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Altair Schebeliski Virissimo (Colégio Estadual Sirley Jagas)
- Altanir Schebeliski Virissimo (Colégio Estadual Sirley Jagas)
- Alysson Bernardi Filho (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Ana Paula Gomes (Colégio Sant Ana)
- Andre Luis Amancio (Colégio Sant Ana)
- Elton Mateus Neves (Colégio Integração)
- Gustavo Ribeiro dos Santos (Colégio Marista Pio XII)
- Helena Rentschler (Colégio Integração)
- Igor Raul de Lara Santos (Colégio Agricola Estadual Augusto Ribas)
- Jhon Victor Messias Rosa (Colégio Estadual Regente Feijó)
- João Pedro de Souza Chociai (Colégio Alfa Plus)
- João Pedro Viatrowski (Colégio Estadual Regente Feijó)
- João Vitor Pisnisk Barbosa (Colégio Positivo Master)
- Kalyane Alinne Gasparetto (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Karenn Unrein dos Santos (Instituto de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Leonardo Viatrowski (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Lucas Eduardo Coronado Pereira (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Murilo Ianzen Grilo (Colégio Sagrada Família)

- Pedro Henrique Karpinski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Wesley Kulecza (Colégio Elite Tales de Mileto)

Menção Honrosa

- Alessandra Ulinick (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Andre Luiz Alves Junior (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Bruno Alexsandro da Silva (Colégio Ponta Grossa)
- Camila Martim (Colégio Sagrada Família)
- Emily Gabrielli de Oliveira Pedroso (Colégio Sagrada Família)
- Guilherme Correa de Andrade (Colégio Sant Ana)
- Jessica Ingrid de Almeida (Colégio Pontagrossense Sepam)
- João Marcelo Goncalves de Andrade (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Juan Antonio Peruzzo (Colégio Sagrada Família)
- Julia de Oliveira Andrade (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Leticia Kosteski da Silva (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Livia Maria Mayer (Colégio Integração)
- Luana Ferreira (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Lucas Eduardo Delfrate (Colégio São Francisco)
- Mariana Vieira Dykstra (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Maritza Uliana Scheratski Bendix (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Maryelen Santos de Oliveira (Colégio Marista Santa Mônica)
- Matheus Erevaldo Kruger Gebeluca (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)

- Rafaela Lima Cabral (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Thais Armstrog de Souza (Colégio Integração)
- Vitor Henrique Nalevaiko (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Wallace Andrey Uller (Colégio Integração)

Nível 4

Troféu

- Gabriel Henrique Kwiatkovski Godinho (Colégio Positivo Master)
- Pedro Eduardo Redivo (Colégio Agricola Estadual Augusto Ribas)

Ouro

- Gabriel Henrique Kwiatkovski Godinho (Colégio Positivo Master)
- Henrique de Carvalho Furia (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Leticia Aparecida Nunes de Siqueira (Colégio Alfa Plus)
- Lorenzo Coelho de Andrade Villela de Biassio (Colégio Positivo Master)

Prata

- Daniel Silveira Salamucha (Colégio Agricola Estadual Augusto Ribas)
- Jhennifer Lohana Tlumaski Depetris (Colégio São Francisco)
- Maria Eliana Penteado (Colégio Positivo Master)
- Mayara Beltrame (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Pedro Eduardo Redivo (Colégio Agricola Estadual Augusto Ribas)
- Pedro Victor Pereira (Colégio Integração)

Bronze

- Ana Carolina Dorado Gaertner (Colégio Agricola Estadual Augusto Ribas)

- Elizane Veronica Pereira dos Santos (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Gustavo Cristofer Medeiros Rodrigues (Colégio Sagrada Família)
- Gustavo Kossar Van Thienen da Silva (Instituto de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Mariana Luz de Araujo (Colégio Integração)
- Mariane Aparecida Gadowski (Colégio Agricola Estadual Augusto Ribas)
- Norton Tessaroli Dezonet (Colégio Positivo Master)
- Thiago Takaji Tsutsui (Colégio Sagrada Família)

Menção Honrosa

- Eduardo Naoto Saito (Colégio Integração)
- Isis Fernandes do Carmo (Colégio Alfa Plus)
- Matheus Alencar Joremtchuts Chempcetri (Colégio Estadual Regente Feijó)

Professores Premiados

Abaixo consta a relação de todos os professores que receberam troféus nos respectivos níveis:

Nível Júnior - Troféu:

- Professora Claudia Cabral (Colégio Positivo Master)
- Professora Luciane Aparecida Zoldan (Escola Municipal João Maria Cruz)

Nível 1 - Troféu:

- Professor Augusto Rangel Selski (Colégio Positivo Master)
- Professora Cláudia Almeida Aires (Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres)

Nível 2 - Troféu:

- Professora Geane Dias de Moura Jorge (Colégio Marista Pio XII)
- Professora Helen Mari Silvério (Escola Medalha Milagrosa)

Nível 3 - Troféu:

- Professor Roberto Mauro Ramos Mainardes (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Professora Maristel do Nascimento (Colégio Estadual Regente Feijó)

Nível 4 - Troféu:

- Professor Fabrício Gonçalves dos Santos (Colégio Positivo Master)
- Professora Alzenir Virginia Ferreira Soistak (Colégio Agricola Estadual Augusto Ribas)

A seguir consta a relação de todos os professores que tiveram alunos premiados na 6ª OPMat no ano de 2018:

- Marcos Sant'anna Modrow (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)

- Alzenir Virginia Ferreira Soistak (Colégio Agricola Estadual Augusto Ribas)
- Ingrid da Silva Milléo (Colégio Agricola Estadual Augusto Ribas)
- Igor Alberto Dantas Abrami (Colégio Alfa Plus)
- José Carlos Bus (Colégio Alfa Plus)
- Fabiano Batista Ribeiro (Colégio Alfa Plus)
- Nicholas Raphael de Almeira Beruski (Colégio Alfa Plus)
- Franciele Isabelita Lopes Novak (Colégio Alfa Plus)
- Paola Soares de Oliveira (Colégio Alfa Plus)
- Renan Ramos Costa (Colégio Dynâmico)
- Alisson Lima Emiliano (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Suellen Karina Palhano Iochucki (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Kelen Cristina do Santos Abrami (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Franciane Prestes Ferreira Ribeiro (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Lenilton Kovalski (Colégio Estadual Colônia Dona Luiza)
- Carlos Adolfo Weckerlin (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Ligia Maria Chiaramonte de Oliveira (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Maria Cristina Schembergue (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Nazilda Antonia Chiaramonte (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Fabiana do Reis (Colégio Estadual Frei Doroteu de Padua)
- Angela Aparecida de Oliveira Camargo de Lima (Colégio Estadual Frei Doroteu de Padua)

- Paulo Sérgio Rufino (Colégio Estadual Frei Doroteu de Padua)
- Andrea Ostruska Maximo (Colégio Estadual Frei Doroteu de Padua)
- Angela de Fátima Scremin (Colégio Estadual Frei Doroteu de Padua)
- Amélia Eponina da Luiz Ruivo (Colégio Estadual General Antonio Sampaio)
- Iolanda Gebiluka Mauda (Colégio Estadual General Antonio Sampaio)
- Ivania Mara Gabardo (Colégio Estadual General Antonio Sampaio)
- Luciano Roque Leite (Colégio Estadual General Antonio Sampaio)
- Malui Sergio Siqueira (Colégio Estadual General Antonio Sampaio)
- Marilda Volerte Cano Cordeiro (Colégio Estadual João Von Borell Du Vernay)
- Irene Terezinha Burkot (Colégio Estadual João Von Borell Du Vernay)
- Iolanda Gebiluka Malda (Colégio Estadual João Von Borell Du Vernay)
- Genice Bratt (Colégio Estadual João Von Borell Du Vernay)
- Daphne Marcelle Valentin Bley (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Debora Laranjeira Colodel (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Ivanice Rodrigues de Lima (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Josiane Deschk (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Silvia Regina Jurasrek Colesel (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Emilene Conceição Marins da Silva Bochnek (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Eva Aparecida Carvalho E Silva (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Maristel do Nascimento (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Roseli Niedjevski Dambrovisk (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Karina Rocha (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)

- Rodrigo França Pleis (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)
- Fabíola Pineda Lopes (Colégio Estadual Padre Arnaldo Jansen)
- Marilene Gomes (Colégio Estadual Padre Arnaldo Jansen)
- Karina Rocha (Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)
- Wilson José Machado Gomes (Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)
- Ana Paula Milleo Maynardes (Colégio Estadual Professor Becker E Silva)
- Leila Reda Ataya (Colégio Estadual Professor Becker E Silva)
- Marisete do Rocio Kopis (Colégio Estadual Professor Becker E Silva)
- Neli Garcia Catossi (Colégio Estadual Professor Becker E Silva)
- Silmari Oliveira Gomes (Colégio Estadual Professor Becker E Silva)
- Ana Beatriz do Reis (Colégio Estadual Professor Eugenio Malanski)
- Carla Cristiane Dal Col de Oliveira (Colégio Estadual Professor Eugenio Malanski)
- Marilda Porto (Colégio Estadual Professor Eugenio Malanski)
- Dirceu Eduardo Correa (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Edna Aparecida Fagundes Consul (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Glaci Bettes (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Maria Ester Senger Schwab (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Maria Isabel Tiburcio Fanha (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Marli Ribeiro Maia Slompo (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Wladimir Bosca (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Cláudia Almeida Aires (Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres)
- Maria José Cação Ribeiro (Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres)

- Adriane Boldt (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Andreia Daniele Urba (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Antonio Henrique Feld (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Eliane Hartmann do Santos (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Michelly Araujo de Oliveira (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Ryldo Antonio Ressetti (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Silmari Oliveira Gomes (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Andressa Niele Garcia (Colégio Estadual Professora Sirley Jargas)
- Liliane Camargo Soares (Colégio Estadual Professora Sirley Jargas)
- Luciane do Reis (Colégio Estadual Professora Sirley Jargas)
- Merlene Holdtke de Abreu (Colégio Estadual Professora Sirley Jargas)
- Lenilton Kovalski (Colégio Estadual Prrofessor Colares)
- Maria José Cação Ribeiro (Colégio Estadual Prrofessor Colares)
- Daniele Regina Penteado (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Luciana Blum Rauch (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Maristel Nascimento (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Michel Floriano Bueno (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Adriana Marise Zeni (Colégio Estadual Santa Maria, C E-Ef M
- Igor Alberto Dantas Abrami (Colégio Estadual Santa Maria, C E-Ef M)
- Renato Pereira e Silva (Colégio Estadual Santa Maria, CE-Ef M)
- Simone Daiane Pisnisk (Colégio Estadual Santa Maria, CE-Ef M)
- Bianca Aparecida Holm de Oliveira (Colégio Integração)
- Juliana Fátima Holm Brim (Colégio Integração)

- Lucas Gicorski (Colégio Integração)
- Karina Martins Barbosa (Colégio Integração)
- Geane Dias de Moura Jorge (Colégio Marista Pio XII)
- Lucia Yukie Shimasaki (Colégio Marista Pio XII)
- Tiago Vieira (Colégio Marista Pio XII)
- Nicolle Martinski Zimmer (Colégio Marista Pio XII)
- Roseli Alexandre Martins (Colégio Marista Pio XII)
- Ana Cristina Delinski Stiirmer (Colégio Marista Pio XII)
- Patricia Maria Zaremba de Oliveira (Colégio Marista Pio XII)
- Marselha Aparecida Wiecheteck (Colégio Marista Santa Mônica)
- Rafael Bruno Ligeski (Colégio Marista Santa Mônica)
- Karina Martins Barbosa (Colégio Marista Santa Mônica)
- Felipe Antônio Fagundes Machado Gonçalves (Colégio Ponta Grossa)
- Geane Correia Silva (Colégio Ponta Grossa)
- Fernanda Fetzer (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Roberto Mauro Ramos Mainardes (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Sheila Bueno de Oliveira (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Sheila Regina Bagatelli Bozz (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Daniela Aparecida Fabricio (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Fernanda Hennipman (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Francine Mayara Gomes (Colégio Pontagrossense Sepam)
- André Guilherme Buss Lemes (Colégio Positivo Master)
- Augusto Rangel Selski (Colégio Positivo Master)

- Benifrancis Teresinha Judice Matias (Colégio Positivo Master)
- Diefrei Alves (Colégio Positivo Master)
- Fabrício Gonçalves do Santos (Colégio Positivo Master)
- Claudia Cabral (Colégio Positivo Master)
- Keli Cristina Rodrigues (Colégio Positivo Master)
- Bruna Elizabeth Adamowicz da Luz (Colégio Sagrada Família)
- Fábio Augusto Souto Rosa (Colégio Sagrada Família)
- Herica Cristina Alves Galante Messias (Colégio Sagrada Família)
- Maria Regina Urban (Colégio Sagrada Família)
- Marina Marra (Colégio Sagrada Família)
- Rita Nerli Antoneli Carvalho (Colégio Sagrada Família)
- Rosilda Aparecida Chociai Scremin (Colégio Sagrada Família)
- Suzane Machado Daer Costa (Colégio Sagrada Família)
- Elyzandra Maia Cano Perreto (Colégio Sagrada Família)
- Gisele Pacheco (Colégio Sagrada Família)
- Ana Claudia Adriano de Alvarenga (Colégio Sagrado Coração Jesus)
- Danilo Slugel Lucas (Colégio Sagrado Coração Jesus)
- Mariana Andrade de Oliveira Vieira (Colégio Sagrado Coração Jesus)
- Vera do Rocio Vanat Prestes (Colégio Sagrado Coração Jesus)
- Willian Thomas Rocha (Colégio Sagrado Coração Jesus)
- Carla Janine Schantz (Colégio Sagrado Coração Jesus)
- Thakyane Souza do Nascimento (Colégio Sagrado Coração Jesus)
- Claudia Danielle de França Otoni (Colégio Sant Ana)

- Daniel Carlos Beusso (Colégio Sant Ana)
- Paulo Fernando Zaratini de Oliveira e Silva (Colégio Sant Ana)
- Idilceia Aparecida Hilgemberg Löderer (Colégio Sant Ana)
- Luiz Krett (Colégio Sant Ana)
- Luan Elias do Nascimento (Colégio São Francisco)
- Joel Lopes da Silva Júnior (Colégio Sesi-Ponta Grossa)
- Arlene Cristiane Martins de Lima (Colégio Trinta e Um de Março)
- Marissol do Rocio Vieira da Rosa (Colégio Trinta e Um de Março)
- Sandra Antunes (Colégio Trinta e Um de Março)
- Shirley Aparecida de Moraes (Colégio Trinta e Um de Março)
- Bianca Aparecida Holm de Oliveira (Escola Bom Pastor)
- Fábio Borges (Escola Bom Pastor)
- Paulo Henrique Carvalho (Escola Desafio)
- Michelle Hilbert Dipp de Oliveira (Escola Desafio)
- Daniele Walichinski (Escola Estadual Espirito Santo)
- Silvana Zimmermann Maia (Escola Estadual Espirito Santo)
- Sheila Regina Bagatelli Bozz (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Valquiria Glinski (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Adriane de Castro (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Amélia Aparecida Moro (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Debora de Lima Moscardi do Santos (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Luzia Gaioski Neneve (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Silvana Vettorazzi (Escola Estadual Jesus Divino Operário)

- Helen Mari Silvério (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Jeanine Alves de Oliveira (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Karla Adriane Boamorte (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Silvia Regina Jurasrek Colosel (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Simone de Fatima Soltes (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Edna Aparecida Fagundes Consul (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Libia Andreia Cosati (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Luciano de Oliveira (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Wladimir Bosca (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Regiane Aparecida Auer (Escola Estadual Professora Halia T Gruba)
- Denise do Rocio Mezzadri Lopes (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Marcia Bomfati Garcia (Escola Municipal Alda do Santos Rebonato)
- Maria Lenira Silveira (Escola Municipal Alda do Santos Rebonato)
- Sandra Mara Schechtel (Escola Municipal Catarina Miró)
- Luciane Cristina Teixeira Borges Pitlovanciv (Escola Municipal Catarina Miró)
- Michele de Oliveira Serzoski (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- Bernardete Aparecida da Maia (Escola Municipal Deodoro Alves Quintiliano)
- Elaine Aparecida Bendix (Escola Municipal Dep. Djalma de Almeida Cesar)
- Rosir Aparecida Gonçalves de Jesuz (Escola Municipal Dep. Mario Braga Ramos)
- Helena Kanclarowicz (Escola Municipal Dep. Mario Braga Ramos)
- Taysa do Rocio Rodrigues (Escola Municipal Dr. Carlos Ribeiro de Macedo)
- Neide Terezinha de Antoni (Escola Municipal Dr. Carlos Ribeiro de Macedo)

- Nathaly Cris Diogo da Silva Kazmierczak (Escola Municipal Dr. Edgar Sponholz)
- Nickele de Paula Faria (Escola Municipal Dr. Edgar Sponholz)
- Luciana Bernadete Maior Correia (Escola Municipal Dr. Leopoldo Pinto Rosas)
- Elainy Zahailo (Escola Municipal Felicio Francisquiny)
- Risodete Terezinha Ayres (Escola Municipal Felicio Francisquiny)
- Adriane de Oliveira Bueno (Escola Municipal Frederico Constante Degraf)
- Débora de Fátima Domingues Soares (Escola Municipal Frederico Constante Degraf)
- Solange Machado Gonçalves (Escola Municipal Frederico Constante Degraf)
- Giseli Sliwinski (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Cristina Machado Mikowski (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Juliane de Fatima Fernandes Fidelis (Escola Municipal Gal. Aldo Bonde)
- Michele Hilbert Dipp de Oliveira (Escola Municipal Gal. Aldo Bonde)
- Priscila Gabriele da Luz Kailer (Escola Municipal Gal. Aldo Bonde)
- Adriana Isabel Klas (Escola Municipal Guaracy Paraná Vieira)
- Cassandra Krepel (Escola Municipal Guaracy Paraná Vieira)
- Joelma Simone Gualdezi (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Luciane Aparecida Zoldan (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Tatiana Nunes da Silva (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Leandra do Rocio Poggere (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Rosilane Aires de Araújo (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Raquel Kuhn Miashita (Escola Municipal Padre Jose Bugatti)

- Elenice Raimundini (Escola Municipal Padre Jose Bugatti)
- Caroline Maria Sanchez Starke (Escola Municipal Pascoalino Provisiero)
- Ilza Mara de Oliveira Nunes (Escola Municipal Pref. Cel. Claudio Gonçalves Guimarães)
- Jacqueline Peres Barbosa (Escola Municipal Pref. Cel. Claudio Gonçalves Guimarães)
- Kamila Bruna Batista da Silva (Escola Municipal Pref. Cel. Claudio Gonçalves Guimarães)
- Maria Ezilda Cardoso Chuartz (Escola Municipal Pref. Cel. Claudio Gonçalves Guimarães)
- Andrea Brantes Pereira (Escola Municipal Pref. Claudio Mascarenhas)
- Cyntia Mara Rosini (Escola Municipal Pref. Dr. Amadeu Puppi)
- Vanessa Ranck de Paula (Escola Municipal Pref. Dr. Amadeu Puppi)
- Juliana Trindade Rosa (Escola Municipal Pref. Dr. Elyseu de Campo Mello)
- Suzan Marcela de Oliveira (Escola Municipal Pref. Dr. Fulton Vitel Borges de Macedo)
- Daniele do Carmo Ruth Lopes (Escola Municipal Pref. Dr. Othon Made)
- Josiane Maria Chiquito Iaroczinski (Escola Municipal Pref. Dr. Othon Made)
- Adriane Tereza Feriato de Carvalho (Escola Municipal Pref. Dr. Plauto Miró Guimarães)
- Elaine Alves Galvão (Escola Municipal Pref. Dr. Plauto Miró Guimarães)
- Silvia Regina Tozetto (Escola Municipal Pref. Eng. Cyro Martins)
- Gisele Cristina Ogrysko (Escola Municipal Pref. Eng. Eurico Batista Rosas)
- Celia Lima Emiliano (Escola Municipal Pref. Ernesto Guimarães Vilela)
- Iara Cristina Mendes Faria Costa (Escola Municipal Pref. Ernesto Guimarães Vilela)

- Lucimara Ferreira Ribeiro (Escola Municipal Pref. Heitor Ditzel)
- Jacqueline Gutoch (Escola Municipal Pref. Jose Bonifácio Guimarães Vilela)
- Sandra Mara do Rocio Guimaraes Santana (Escola Municipal Pref. Jose Bonifácio Guimarães Vilela)
- Ana Carla Svianteck de Freitas (Escola Municipal Pref. Jose Hoffmann)
- Mariana Marçal Nasseh Vieira (Escola Municipal Pref. Maj. Manoel Vicente Bittencourt)
- Simone Rosas Guarneri (Escola Municipal Pref. Theodoro Batista Rosas)
- Genislaine Cristina Souto (Escola Municipal Prof. Aristeu Costa Pinto)
- Keila Cristina Wecolovis Oliveira (Escola Municipal Prof. Aristeu Costa Pinto)
- Alessandra Caetano Taques (Escola Municipal Prof. Egdar Zanoni)
- Elza Terezinha Galvão (Escola Municipal Prof. Egdar Zanoni)
- Jaqueline Malaquias (Escola Municipal Prof. Egdar Zanoni)
- Katia Simone Pereira (Escola Municipal Prof. Egdar Zanoni)
- Maira Graboski (Escola Municipal Prof. Eloy Avrechack)
- Alice Wojcik (Escola Municipal Prof. Faris Antonio Michaele)
- Angela Maria da Silva Guarneri (Escola Municipal Prof. Ivon Zardo)
- Maria Marcia Martins Santos (Escola Municipal Prof. Jorge Dechandt)
- Luciana Kubaski (Escola Municipal Prof. Kamal Tebcherani)
- Dercia Marinho Ferreira (Escola Municipal Prof. Maria Eulina Santos Scheena)
- Claudia Rosana Bonfim Teixeira (Escola Municipal Prof. Marta Filipkowski de Lima)
- Karen Chesine Antunes Avila (Escola Municipal Prof. Marta Filipkowski de Lima)

- Adriane Esmerio Perli (Escola Municipal Prof. Nelson Pereira Jorge)
- Jandira Chezini (Escola Municipal Prof. Nelson Pereira Jorge)
- Marcia Cristina de Almeida (Escola Municipal Prof. Nelson Pereira Jorge)
- Elaine Dalzotto Ostrufka (Escola Municipal Prof. Osni Vilaca Mongruel)
- Elaine Cristina de Moraes (Escola Municipal Prof. Osni Vilaca Mongruel)
- Janaina Martins Melo Espindula (Escola Municipal Prof. Osni Vilaca Mongruel)
- Adriane Iwasenko Silva Giacomozzi (Escola Municipal Prof. Paulo Grott)
- Silvana Monteiro Durau (Escola Municipal Prof. Paulo Grott)
- Vera Lucia da Silva (Escola Municipal Prof. Placido Cardon)
- Rosilda Travensoli Silveira (Escola Municipal Prof. Rubens Edgard Furstenberger)
- Telma Xavier Macedo (Escola Municipal Prof. Rubens Edgard Furstenberger)
- Karen Schwab (Escola Municipal Prof. Sebastião do Santos E Silva)
- Diandra Tais Moresco Moraes (Escola Municipal Prof. Zair Santos Nascimento)
- Josiane Rodrigues da Silva (Escola Municipal Prof. Zair Santos Nascimento)
- Laedina Buss Rodrigues (Escola Municipal Prof. Zair Santos Nascimento)
- Patricia Maria Zaremba de Oliveira (Escola Municipal Profa. Adelaide Thomé Chamma)
- Franciele Aparecida Carneiro Stefanello (Escola Municipal Profa. Agenoridas Stadler)
- Carla Renata Filipak Marciniuk (Escola Municipal Profa. Ana de Barros Holzmann)
- Fabiane Fabri (Escola Municipal Profa. Ana de Barros Holzmann)

- Andreia Santos Fernandes (Escola Municipal Profa. Armida Frare Gracia)
- Maristela Batista Carvalho Barboza (Escola Municipal Profa. Armida Frare Gracia)
- Viviane Coutinho Woznika (Escola Municipal Profa. Braulina Carneiro de Quadros)
- Maria Renata Leniar (Escola Municipal Profa. Dércia do Carmo Noviski)
- Simone Aparecida de Almeida Krechinsk (Escola Municipal Profa. Dércia do Carmo Noviski)
- Rosmeri Aparecida Eidam Teixeira (Escola Municipal Profa. Eclea do Passos Horn)
- Silvana Aparecida Rosa da Fonceca (Escola Municipal Profa. Eclea do Passos Horn)
- Ana Paula Ribeir (Escola Municipal Profa. Guitil Federmann)
- Maira Cristina Muller Rocha Maravieski (Escola Municipal Profa. Guitil Federmann)
- Simone Aparecida Cordeiro (Escola Municipal Profa. Guitil Federmann)
- Sonia Maria Pistune Bonamente (Escola Municipal Profa. Haydee Ferreira de Oliveira)
- Marla do Santos Preste (Escola Municipal Profa. Idalia Góes)
- Paola Guimarães Santana (Escola Municipal Profa. Judith Macedo Silveira)
- Joselma Aparecida Machado (Escola Municipal Profa. Loise Foltran de Lara)
- Simone Canto Jorge (Escola Municipal Profa. Loise Foltran de Lara)
- Evelyn Emanuelle Verneke (Escola Municipal Profa. Maria Antonia de Andrade)
- Heloisa Roseni Jorge Correia (Escola Municipal Profa. Maria Antonia de Andrade)

- Tania Mara de Souza (Escola Municipal Profa. Maria Antonia de Andrade)
- Carla Aparecida Blageski Foltran (Escola Municipal Profa. Maria Coutin Riesemberg)
- Inajara Machado Gonçalves (Escola Municipal Profa. Maria Coutin Riesemberg)
- Rosane Santana de Lima (Escola Municipal Profa. Maria Coutin Riesemberg)
- Elaine Cristina Auer (Escola Municipal Profa. Maria Elvira Justus Schimidt)
- Ana Claudia Krachinski Martins (Escola Municipal Profa. Maria Laura Pereira)
- Ligia Maria Dworak Grzybowski (Escola Municipal Profa. Maria Vitoria Braga Ramos)
- Marcia Maria Elbl (Escola Municipal Profa. Maria Vitoria Braga Ramos)
- Joseane Eleuterio (Escola Municipal Profa. Minervina França Scudlareck)
- Juliana Porto Staron (Escola Municipal Profa. Minervina França Scudlareck)
- Dione Woiciechowski Lopes (Escola Municipal Profa. Otacilia Hasselmann de Oliveira)
- Claudia Chaves (Escola Municipal Profa. Ruth Holzmann Ribas)
- Mara Beatriz Chaves (Escola Municipal Profa. Ruth Holzmann Ribas)
- Melia Terezinha Lopes de Oliveira (Escola Municipal Profa. Shirley A Ggimoura)
- Graziela Vaneza de Campos (Escola Municipal Profa. Zeneida de Freitas Schnirmann)
- Janete Lourenco de Oliveira Batistel (Escola Municipal Profa. Zila Bernadete Bach)
- Joycelaine Cabral Bach (Escola Municipal Profa. Zila Bernadete Bach)
- Silmara de Almeida Burnat (Escola Municipal Profa. Zila Bernadete Bach)

- Dilmarize Fujitani Chagas de Paula (Escola Municipal Protazio Scheifer)
- Karina Martins Barbosa (Escola Municipal São Jorge)
- Mariane Oberg Falcão Ribeiro (Escola Municipal São Jorge)
- Marisol Robeiro de Souza (Escola Municipal Sen. Flavio Carvalho Guimarães)
- Regiane Terezinha Demetrio (Escola Municipal Sen. Flavio Carvalho Guimarães)
- Angela Maria Santana (Escola Municipal Vereador Adelino Machado de Oliveira)
- Gisele Fatima Ott Ranzani (Escola Municipal Vereador Adelino Machado de Oliveira)
- Sonia Aparecida Lopes Gonçalves (Escola Municipal Vereador Adelino Machado de Oliveira)
- Indyanara Popoviski Almeida (Escola Municipal Zanoni Rogoski)
- Glaucia de Fátima Colesel (Escola Reitor Álvaro A Cunha Rocha)
- Neide Gonçalves do Santos (Escola Reitor Álvaro A Cunha Rocha)
- Patrícia Bandeira (Escola Rosazul)
- Maria Eliete Francischinelli Freitas (Escola Santo Ângelo)
- Cynthia Cristine Mendes (Escola Santo Ângelo)
- Mariana Matos (Escola São Jorge de Ponta Grossa)
- Ana Cristina Schirlo (Instituto de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Carlos Roberto Schebeliski (Instituto de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Ilbiamara Aparecida Rupel Bobeck (Instituto de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Selimival Ferreira Mocroski (Instituto de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Joel Lopes da Silva Júnior (Colégio Sesi-Ponta Grossa)
- Elisabete Feld Costa (Escola Estadual Medalha Milagrosa)

Escolas Participantes

Abaixo consta a relação de todas as escolas participantes da 6ª OPMat no ano de 2018:

Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa
Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas
Colégio Alfa Plus
Colégio Dynâmico
Colégio Elite Tales de Mileto
Colégio Estadual 31 de Março
Colégio Estadual Colônia Dona Luíza
Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas
Colégio Estadual Frei Doroteu de Padua
Colégio Estadual General Antonio Sampaio
Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória
Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças
Colégio Estadual Padre Arnaldo Jansen
Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny
Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki
Colégio Estadual Professor Becker e Silva
Colégio Estadual Professor Colares
Colégio Estadual Professor Eugênio Malanski
Colégio Estadual Professor João Von Borell Du Vernay
Colégio Estadual Professor José Gomes do Amaral
Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico
Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres
Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá
Colégio Estadual Regente Feijó
Colégio Estadual Santa Maria
Colégio Estadual Sirley Jagas
Colégio Integração
Colégio Marista Pio XII
Colégio Marista Santa Mônica
Colégio Ponta Grossa
Colégio Pontagrossense Sepam
Colégio Positivo Master
Colégio Sagrada Família

Colégio Sagrado Coração de Jesus
Colégio Sant Ana
Colégio São Francisco
Colégio SESI Ponta Grossa
Escola Bom Pastor
Escola Desafio
Escola Estadual Espírito Santo
Escola Estadual Jesus Divino Operário
Escola Estadual Medalha Milagrosa
Escola Estadual Monteiro Lobato
Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba
Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato
Escola Municipal Catarina Miró
Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci
Escola Municipal Deodoro Alves Quintiliano
Escola Municipal Deputado Djalma de Almeida Cesar
Escola Municipal Deputado Mário Braga Ramos
Escola Municipal Doutor Carlos Ribeiro de Macedo
Escola Municipal Doutor Edgar Sponholz
Escola Municipal Doutor Leopoldo Pinto Rosas
Escola Municipal Felício Francisquiny
Escola Municipal Fioravante Slaviero
Escola Municipal Frederico Constante Degraf
Escola Municipal Frei Elias Zulian
Escola Municipal General Aldo Bonde
Escola Municipal Guaracy Paraná Vieira
Escola Municipal Humberto Cordeiro
Escola Municipal João Maria Cruz
Escola Municipal Ludovico Antonio Egg
Escola Municipal Padre José Bugatti
Escola Municipal Pascoalino Provisiero
Escola Municipal Prefeito Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães
Escola Municipal Prefeito Doutor Amadeu Puppi
Escola Municipal Prefeito Doutor Elyseu de Campos Mello
Escola Municipal Prefeito Doutor Fulton Vitel Borges de Macedo
Escola Municipal Prefeito Doutor Othon Mader
Escola Municipal Prefeito Doutor Plauto Miró Guimarães

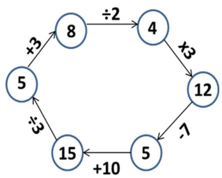
Escola Municipal Prefeito Engenheiro Cyro Martins
Escola Municipal Prefeito Engenheiro Eurico Batista Rosas
Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela
Escola Municipal Prefeito Heitor Ditzel
Escola Municipal Prefeito Jose Bonifacio Guimarães Vilela
Escola Municipal Prefeito José Hoffmann
Escola Municipal Prefeito Major Manoel Vicente Bittencourt
Escola Municipal Prefeito Theodoro Batista Rosas
Escola Municipal Professor Aristeu Costa Pinto
Escola Municipal Professor Edgar Zanoni
Escola Municipal Professor Eloy Avrechack
Escola Municipal Professor Faris Antonio Michaele
Escola Municipal Professor Ivon Zardo
Escola Municipal Professor Jorge Dechandt
Escola Municipal Professor Kamal Tebcherani
Escola Municipal Professor Nelson Pereira Jorge
Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel
Escola Municipal Professor Paulo Grott
Escola Municipal Professor Plácido Cardon
Escola Municipal Professor Rubens Edgard Furstenberger
Escola Municipal Professor Sebastiao dos Santos E Silva
Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma
Escola Municipal Professora Agenoridas Stadler
Escola Municipal Professora Ana de Barros Holzmann
Escola Municipal Professora Armida Frare Gracia
Escola Municipal Professora Braulina Carneiro de Quadros
Escola Municipal Professora Dercia do Carmo Noviski
Escola Municipal Professora Ecléa dos Passos Horn
Escola Municipal Professora Guitil Federmann
Escola Municipal Professora Haydée Ferreira de Oliveira
Escola Municipal Professora Idalia Goes
Escola Municipal Professora Judith Macedo Silveira
Escola Municipal Professora Loise Foltran de Lara
Escola Municipal Professora Maria Antonia de Andrade
Escola Municipal Professora Maria Coutin Riesemberg
Escola Municipal Professora Maria Elvira Justus Schimidt
Escola Municipal Professora Maria Eulina Santos Scheena

Escola Municipal Professora Maria Laura Pereira
Escola Municipal Professora Maria Vitória Braga Ramos
Escola Municipal Professora Marta Filipkowski de Lima
Escola Municipal Professora Minervina França Scudlareck
Escola Municipal Professora Otacália Hasselmann de Oliveira
Escola Municipal Professora Ruth Holzmann
Escola Municipal Professora Shirley Aggi Moura
Escola Municipal Professora Zair Santos Nascimento
Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Schnirmann
Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach
Escola Municipal Protazio Scheifer
Escola Municipal Senador Flávio Carvalho Guimarães
Escola Municipal São Jorge
Escola Municipal Vereador Adelino Machado de Oliveira
Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins
Escola Municipal Zanoni Rogoski
Escola Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha - CAIC
Escola Rosazul
Escola Rural Municipal Prefeito Cláudio Mascarenhas
Escola Santo Ângelo
Escola São Jorge de Ponta Grossa
Instituto Estadual de Educação Professor César Pietro Martinez

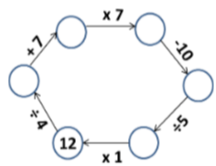
Provas

Nível Júnior

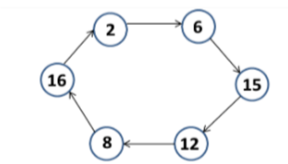
Problema 1. A figura abaixo mostra círculos contendo números que satisfazem as operações indicadas nas setas.



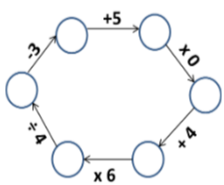
(a) Preencha com os valores corretos os círculos abaixo:



(b) Preencha com as operações corretas:



(c) Preencha a sucessão de círculos abaixo de modo que todas as operações indicadas nas setas sejam corretas.



Problema 2. Na panificadora da esquina há um cesto com 105 bombons que custam R$0,90 cada um. José, Carla e Priscila compraram bombons. José, que tinha mais dinheiro, comprou um teço do total de bombons. Carla comprou oito bombons mais um quinto da quantidade comprada por José. Priscila gastou na sua compra R$18,90.

(a) Quantos bombons José e Carla, juntos, compraram?

(b) Os bombons comprados por Priscila representam que fração dos 105 que havia no cesto?

(c) Após as três compras, quantos bombons restaram no cesto?

Problema 3. Marcos e Anita devem colocar bolinhas de plásticos dentro de um saco e de uma caixa. Marcos tem que colocar, dentro do saco, uma bolinha no primeiro minuto, duas bolinhas no segundo minuto, três bolinhas no terceiro, quatro no quarto, etc... Anita, por sua vez, tem que colocar, dentro da caixa, 30 bolinhas no primeiro minuto, 29 bolinhas no segundo minuto, 28 bolinhas no terceiro, 27 no quarto, etc...

(a) Após quantos minutos, o saco conterá 45 bolinhas?

(b) Após cinco minutos, quantas bolinhas haverá na caixa?

(c) Após quantos minutos, o saco e a caixa terão a mesma quantidade de bolinhas?

Problema 4. Num jogo virtual há uma maquina que lança bexigas infladas (balões). Ao inicia-lo a máquina lança uma quantidade fixa de balões no ar. A regra do jogo consiste em você estourar esses balões antes que eles toquem o chão. Porém, a cada quatro balões que você estoura, a máquina lança mais dois balões. Você vence se conseguir estourar todos os balões de modo que a maquina não possa mais lançar novos balões.

(a) Se inicialmente a máquina lançou sete balões, quantos balões você estourou para ser vencedor?

(b) Ao final de uma rodada do jogo, você estourou 22 balões e foi vencedor. Quantos balões a máquina lançou inicialmente?

Provas

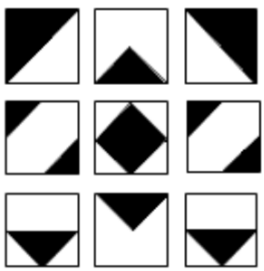
Nível 1

Problema 1. Num jogo virtual há uma máquina que lança bexigas infladas (balões). Ao iniciá-lo a máquina lança uma quantidade fixa de balões no ar. A regra do jogo consiste em você estourar esses balões antes que eles toquem o chão. Porém, a cada quatro balões que você estoura, a máquina lança mais dois balões. Você vence se conseguir estourar todos os balões de modo que a maquina não possa mais lançar novos balões.

(a) Se inicialmente a máquina lançou sete balões, quantos balões você estourou para ser vencedor?

(b) Ao final de uma rodada do jogo, você estourou 22 balões e foi vencedor. Quantos balões a máquina lançou inicialmente?

Problema 2. Os ladrilhos da figura representam quadrados iguais. As partes pintadas são 10 triângulos retangulos e um quadrado, sendo que suas áreas correspondem a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{8}$ da área do ladrilho. Temos que os vértices dessas figuras sempre coincidem com os vértices do ladrilho, com o centro do ladrilho ou com o ponto que divide o lado do ladrilho em dois lados de comprimentos iguais.



(a) Se o lado do ladrilho mede 1cm, qual é a área da região pintada de preto?

(b) Se o lado do ladrilho mede 1cm, qual a diferença entre a área branca e a área preta?

(c) Se o lado do ladrilho mede 2cm qual é a área da parte pintada de preto?

(d) Se o lado do ladrilho mede 2cm, qual a diferença entre a área branca e a área preta?

Problema 3. Bruno e Carlos caminhavam juntos, carregando pesados sacos em carrinhos de mão. Lamentava-se Carlos do seu pesado carrinho ao que consolou-lhe Bruno: - De que te queixa? Se eu te tomasse três sacos, a carga do meu carrinho passaria a ser o quádruplo da carga do teu. Por outro lado, se eu te der 6 dos meus sacos, a carga dos nossos carrinhos seriam iguais. Sabendo que todos os acos têm o mesmo peso, responda:

(a) É possível que Bruno esteja carregando nove sacos em seu carrinho de mão?

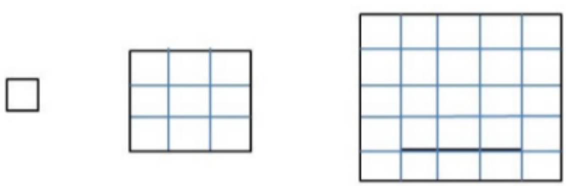
(b) Quantos sacos tinham em cada carrinho de mão?

Problema 4. Num laboratório há duas salas contendo joaninhas, que são insetos de seis patas, e aranhas, que são aracnídeos de oito patas. Na primeira sala há apenas oito animais, sendo que todos juntos tem cinquenta e quatro patas. Na segunda sala há 56 animais, todos juntos totalizando 486 patas.

(a) Quantas joaninhas há na primeira sala?

(b) Quantas aranhas há na segunda sala?

Problema 5. Ao colocarmos uma camada de quadradinhos em torno de um quadradinho obtemos um quadrado com nove quadradinhos. Se adicionarmos outra camada obtemos um quadrado com vinte e cinco quadradinhos.
Observe as figuras:



(a) Agora, complete a tabela:

Quantidade de camadas colocadas	Quantidade de quadradinhos no quadrado
1	9
2	25
3	
4	
5	

(b) Qual é a quantidade de quadradinhos em um dos lados do quadrado quando colocarmos 10 camadas?

(c) Após colocarmos 499 camadas, iremos ter um quadrado com quantos quadradinhos?

Problema 6. Numa aula de matemática, o professor escreveu na lousa todos os números naturais de 1 a n. A seguir pediu que Clarice fosse até a lousa e apagasse todos os múltiplos de 2 que não fossem múltiplos de 3; depois, que Cristina fosse até a lousa e apagasse todos os múltiplos de 3 que não fossem múltiplos de 5. Supondo que Clarice e Cristina cumpriram corretamente suas tarefas, responda:

(a) Se n=20, quantos números permaneceram escritos na lousa?

(b) Se n=500, quantos números permaneceram escritos na lousa?

Provas

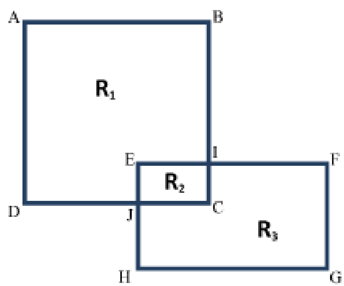
Nível 2

Problema 1. Num jogo virtual há uma maquina que lança bexigas infladas (balões). Ao iniciá-lo a máquina lança uma quantidade fixa de balões no ar. A regra do jogo consiste em você estourar esses balões antes que eles toquem o chão. Porém, a cada quatro balões que você estoura, a máquina lança mais dois balões. Você vence se conseguir estourar todos os balões de odo que a maquina não possa mais lançar novos balões.

(a) Se inicialmente a máquina lançou sete balões, quantos balões você estourou para ser vencedor?

(b) Ao final de uma rodada do jogo, você estourou 22 balões e foi vencedor. Quantos balões a máquina lançou inicialmente?

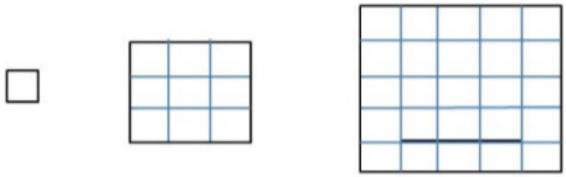
Problema 2. Um quadrado e um retângulo estão sobrepostos formando três regiões distintas: R_1, R_2 e R_3. Sabendo que o perímetro do quadrado ABCD é 20 cm, o perímetro do retângulo EFGH é 14 cm, e além disso, $5\overline{EI} = 2\overline{HG}$ e $7\overline{EI} = 3\overline{AD}$, pede-se:



(a) Calcule a área do quadrado ABCD e do retângulo EFGH.

(b) Calcule a diferença entre as áreas das regiões.

Problema 3. Ao colocarmos uma camada de quadradinhos em torno de um quadradinho obtemos um quadrado com nove quadradinhos. Se adicionarmos outra camada obtemos um quadrado com vinte e cinco quadradinhos.
Observe as figuras:



(a) Agora, complete a tabela:

Quantidade de camadas colocadas	Quantidade de quadradinhos no quadrado
1	9
2	25
3	
4	
5	

(b) Qual é a quantidade de quadradinhos em um dos lados do quadrado quando colocarmos 10 camadas?

(c) Após colocarmos 499 camadas, iremos ter um quadrado com quantos quadradinhos?

Problema 4. Vamos provar que a média aritmética dos quadrados de dois números reais é sempre maior ou igual ao produto entre eles. Sejam a e b esses números reais, então;

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Rightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

Como o quadrado de qualquer número real é sempre um número positivo, então a última afirmação é correta. Este fato prova que a afirmação inicial é correta. Agora, faça você:

(a) Prove que $\frac{a^2+b^2}{2} \geq 2$, onde a, b e c são números positivos não nulos.

(b) Prove que a média aritmética entre dois números reais é maior ou igual à média geométrica. Isto é, prove que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Problema 5. Uma organização internacional promoveu um encontro entre casais unidos pelo matrimônio há mais de 50 anos. Uma das regras era de que cada casal cumprimentasse todos os outros casais. Os homens cumprimentavam, tanto homens quanto mulheres, com um aperto de mãos. Já as mulheres cumprimentavam os homens com um aperto de mão e as outras mulheres com um encosto de rostos (sem aperto de mãos).

(a) Complete a tabela abaixo:

Nº de casais que compareceram	Nº de apertos de mãos dados por homens	Nº de apertos de mão dados por mulheres	Nº total de apertos de mão
4			
5			
6			
7			

(b) Se compareceram 41 casais quantos apertos de mão ocorreram?

Problema 6. Joel e Aline ganharam diferentes quantidades de balas. Joel disse para Aline: Se me deres quatro das tuas balas a minha quantidade passaria a ser o quadrado da tua. Por outro lado, se eu te der onze das minhas balas, a tua quantidade de balas e a minha seriam iguais.

(a) É possível que Joel tenha ganhado quarenta e cinco balas? Justifique sua resposta.

(b) Quantas balas cada um deles ganhou?

Provas

Nível 3

Problema 1. Num jogo virtual, você tem que derrubar pinos lançando bolas contra eles. A cada dois pinos que você derruba, surgem três novos pinos. No momento em que há quinze pinos em pé, o jogo muda de modo que a cada quatro pinos derrubados só surgem dois novos pinos em pé. Você vence uma partida quando conseguir derrubar todos os pinos sem que surja qualquer novo pino.

(a) Se o jogo iniciar com 7 pinos, quantos pinos você terá que derrubar para vencer?

(b) Se para você vencer uma partida foi necessário derrubar 33 pinos, quanto pinos estavam de pé no início do jogo?

Problema 2. Temos que $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$. Use procedimentos similares para:

(a) Provar que $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \sqrt{7}-\sqrt{2}$.

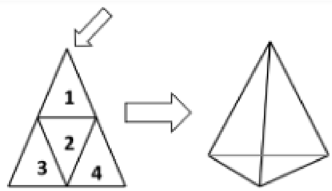
(b) Provar que $(\sqrt{17}+1)\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \dfrac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{10}} + \dfrac{7}{\sqrt{10}+\sqrt{17}}\right)$ é um número inteiro.

Problema 3. Usando o fato de que o quadrado de qualquer número real é positivo:

(a) Prove que $(x^2-1)^2 = x(3x^2)$ só tem soluções positivas.

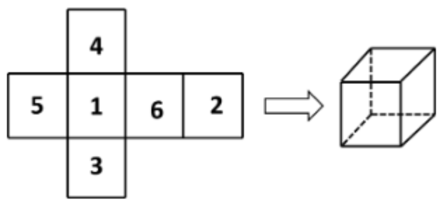
(b) Quantas soluções negativas a equação $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$ possui?

Problema 4. A figura abaixo mostra uma planificação de um tetraedro com faces numeradas. Chamamos de poder de um vértice a soma dos números que estão nas faces que contém esse vértice:

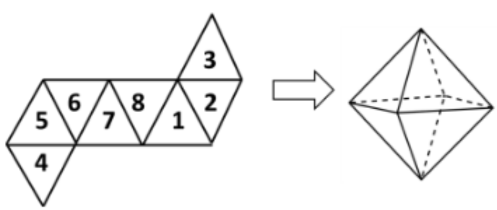


Por exemplo, o vértice indicado pela seta tem poder $1 + 3 + 4 = 8$.

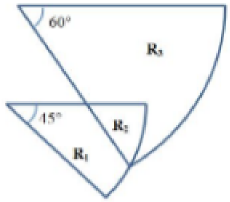
(a) Determine qual é o menor poder que um vértice do cubo planificado abaixo tem.



(b) Mostre como calcular o maior poder que um vértice de um octaedro planificado abaixo possui, sem calcular o poder de todos os vértices.



Problema 5. Na figura abaixo, dois setores circulares se interceptam formando três regiões distintas: R_1, R_2 e R_3.



O arco do setor maior mede π cm.

O arco do setor menor mede $\frac{\pi}{2}$ cm.

(a) Calcule a área do setor circular de 45^o.

(b) Calcule a área do setor circular de 60^o.

(c) Calcule a diferença entre as áreas das regiões R_3 e R_1.

Problema 6. Uma organização internacional promoveu um encontro entre casais unidos pelo matrimonio há mais de 50 anos. Uma das regras era de que cada casal cumprimentasse todos os outros casais. Os homens cumprimentavam, tanto homens quanto mulheres, com um aperto de mãos. Já as mulheres cumprimentavam os homens com um aperto de mão e as outras mulheres com um encosto de rostos (sem aperto de mãos).

(a) Complete a tabela abaixo:

Número de casais que compareceram	Número de apertos de mãos dados por homens	Número de apertos de mão dados por mulheres	Número total de apertos de mão
4			
5			
6			
7			

(b) Se compareceram 41 casais quantos apertos de mão ocorreram?

Provas

Nível 4

Problema 1. Num jogo, cada competidor adquire um cartão contendo 4 números inteiros distintos entre 1 e 32, dispostos em duas linhas e duas colunas. Os números são sucessivamente sorteados de um globo contendo 32 bolinhas numeradas com inteiros de 1 até 32. Tanto a aquisição do cartão, quanto o sorteio dos números ocorre de forma absolutamente aleatória. Vence o competidor que tiver dois números sorteados presentes em uma linha ou em uma coluna do seu cartão.

23	08
11	29

e

29	11
08	23

Os cartões acima são equivalentes, pois se você vence num dos cartões, também ganha, obrigatoriamente, no outro.

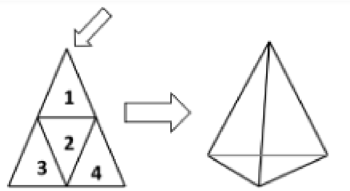
(a) Encontre todos os cartões equivalentes ao cartão:

09	08
21	12

(b) Calcule a probabilidade de, após serem tiradas as duas primeiras bolas do globo, você ganhar tendo o cartão:

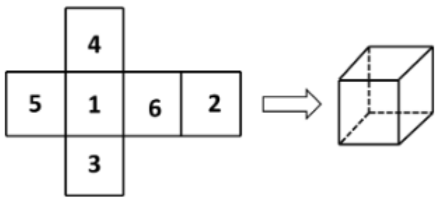
09	08
21	12

Problema 2. A figura abaixo mostra uma planificação de um tetraedro com faces numeradas. Chamamos de poder de um vértice a soma dos números que estão nas faces que contém esse vértice:

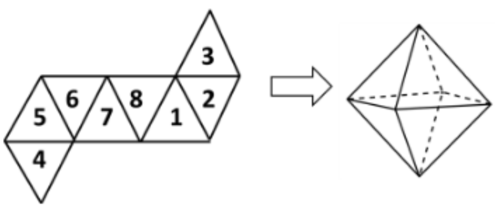


Por exemplo, o vértice indicado pela seta tem poder $1 + 3 + 4 = 8$.

(a) Determine qual é o menor poder que um vértice do cubo planificado abaixo tem.



(b) Mostre como calcular o maior poder que um vértice de um octaedro planificado abaixo possui, sem calcular o poder de todos os vértices.



Problema 3. Uma organização internacional promoveu um encontro entre casais unidos pelo matrimonio há mais de 50 anos. Uma das regras era de que cada casal cumprimentasse todos os outros casais. Os homens cumprimentavam, tanto homens quanto mulheres, com um aperto de mãos. Já as mulheres cumprimentavam os homens com um aperto de mão e as outras mulheres com um encosto de rostos (sem aperto de mãos).

(a) Complete a tabela abaixo:

Número de casais que compareceram	Número de apertos de mãos dados por homens	Número de apertos de mão dados por mulheres	Número total de apertos de mão
4			
5			
6			
7			

(b) Se compareceram 41 casais quantos apertos de mão ocorreram?

Problema 4. Números binomiais são definidos por

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+2)(n-p+1)}{1.2.3....(p-1).p}$$

com $0 \leq p \leq n$.
Usando o Binômio de Newton, podemos provar que:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$

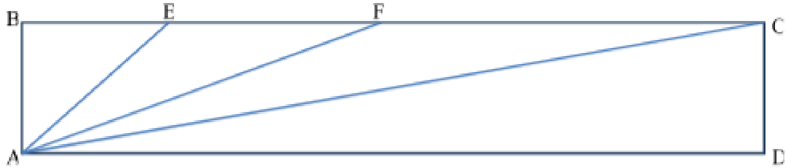
Use essas informações para:

(a) Calcular o resultado de $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$.

(b) Provar que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ para $1 \leq k \leq n$.

(c) Provar que $\dfrac{\binom{2018}{1} + 2\binom{2018}{2} + 3\binom{2018}{3} + \cdots + 2017\binom{2018}{2017} + 2018\binom{2018}{2018}}{2018} = 2^{2017}$.

Problema 5. Considere o retângulo abaixo:



Sabendo que: $\widehat{ABC} = 82^o30'$, $\overline{AB} = 1cm$, $\overline{AE} = \overline{EF}$, $\overline{AF} = \overline{FC}$.

(a) Calcule as medidas dos ânguloss $\widehat{ACB}$, $\widehat{AFB}$ e $\widehat{AEB}$.

(b) Calcule as medidas dos segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BE}$ e $\overline{AF}$.

(c) Calcule $tg(82^o30')$.

Problema 6. Seja

$$S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{2015} + 2^{2016} + 2^{2017} + 2^{2018} = 2(2^{2018} - 1).$$

(a) Suponha que você descobriu que: $2 = 2^2 - 2, 2^2 = 2^3 - 2^2, 2^3 = 2^4 - 2^3, 2^4 = 2^5 - 2^4, ..., 2^{2015} = 2^{2016} - 2^{2015}, 2^{2016} = 2^{2017} - 2^{2016}, 2^{2017} = 2^{2018} - 2^{2017}, 2^{2018} = 2^{2019} - 2^{2018}$

Substituindo a tua descoberta na soma S, mostre como podemos concluir que $S = 2(2^{2018} - 1)$.

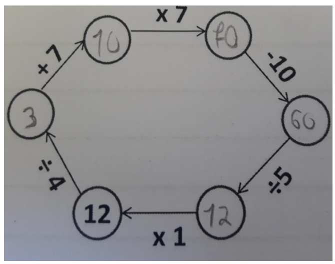
(b) Se $S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{2015} + 3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018}$. Mostre como você faria para chegar à conclusão que $S = \dfrac{3(3^{2018} - 1)}{2}$.

Resoluções

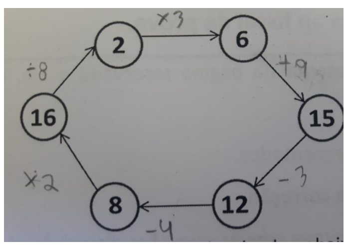
Nível Júnior

Problema 1. (*Resolução de Aquiles Santos Carmo - Escola Elite Tales de Mileto*)

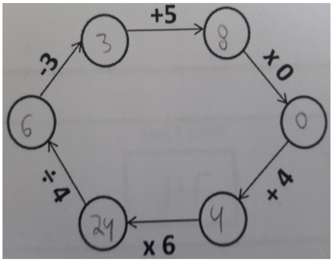
(a) Pois $12/4 = 3; 3 + 7 = 10; 10.7 = 70; 70 - 10 + 60; 60/5 = 12; 12.1 = 12.$ Assim, completando o hexágono.



(b) Pois se calcularmos $2.3 = 6; 6 + 9 = 15; 15 - 3 = 12; 12 - 4 = 8;$ $8.2 = 16; 16.8 = 2$



(c) Partindo de que todo número multiplicado por 0 é 0, se colocarmos nessa sequencia, teremos o resultado de forma correta.



Problema 2. (*Resolução de Francisco Grokoviski - Escola Municipal João Maria Cruz*)

(a) 50 bombons. Eu dividi 105 por 3 ($105/3 = 35$) e peguei a quantidade de bombons que José comprou e dividi por 5 ($35/5 = 7$), assim resultando em 7. Depois somei 7 com 8 e o resultado disso com a quantidade de bombons que José comprou ($7 + 8 + 35 = 50$).

(b) $\frac{1}{5}$. Eu fui multiplicando 90 a partir de 5 até chegar a algum número que desse 1.890, que seriam R$ 18,90. Quando consegui, multipliquei por 5, pois já sabia que daria 105.

(c) Restaram 34 bombons. Eu somei os resultados das outras perguntas e achei o resultado, depois diminui esse resultado de 105.

Problema 3. (*Resolução de Antônio José Heberle de Bastiany - Positivo Master*)

(a) Após 9 minutos. Por que com 8 minutos está com menos e com 9 já está com mais de 45 bolinhas.

(b) Haverá 140 bolinhas. Eu somei a quantidade de bolinhas colocadas por minuto.

(c) Após 30 minutos. Eu chutei 30 minutos e somei até chegar em 30.

Problema 4. *Resolução da Pauta.*

(a) Sabendo que a rodada iniciou com a máquina lançando 7 balões, então,

Balões à estourar	Total de bolões estourados
7 - 4 + 2 = 5	4
5 - 4 + 2 = 3	8
3	11

Portanto, estourou 11 balões para ser vencedor.

(b) Sabendo que foram estourados 22 balões, tem-se que:

Total de bolões estourados	Balões à estourar
22	22 - 4 + 2 = 20
18	20 - 4 + 2 = 18
14	18 - 4 + 2 = 16
10	16 - 4 + 2 = 14
6	14 - 4 + 2 = 12
2	

ou,

Balões à estourar	Total de bolões estourados
12 - 4 + 2 = 10	4
10 - 4 + 2 = 8	8
8 - 4 + 2 = 6	12
6 - 4 + 2 = 4	16
4 - 4 + 2 = 2	20
2	22

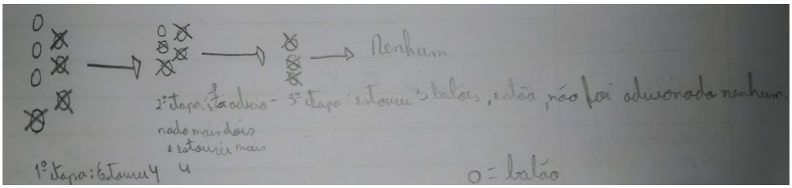
Portanto, a máquina lançou 12 balões para iniciar a rodada.

Resoluções

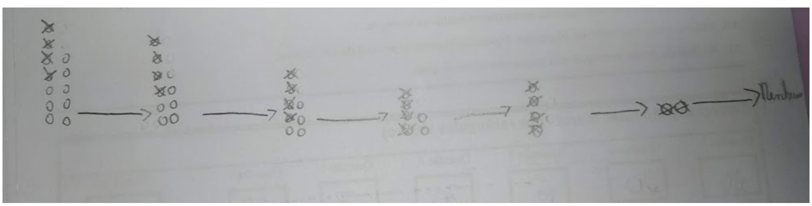
Nível 1

Problema 1. (*Resolução de Felipe Mandalozzo Tebcherani - Colégio Positivo Master*)

(a) 11 balões, expliquei abaixo como resolvi, em um esquema no qual cada "bolinha" representa um balão e cada bolinha com um X representa cada balão que estourei naquela etapa.



(b) 12 balões, dividi 22 por 4 (que é o número de balões que você pode estourar por "etapa") deu 5 com resto 2, esse 2 é a quantidade de balões da última etapa, então fui montando um processo inversamente, e contando o número de balões já estourados até chegar em 12.



Problema 2. (*Resolução da Pauta*)

(a) Se o lado do ladrilho mede 1cm, qual é a área da região pintada de preto?

Analisando as áreas individuais de cada quadrado, e sabendo que o lado de cada quadrado mede $1cm$ então a área de cada quadrado é de $1cm^2$. Assim, para a área demarcada de preto, tem-se:

$$A_{preto} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 1$$
$$A_{preto} = \frac{3}{2} + \frac{4}{4} + \frac{4}{8}$$
$$A_{preto} = \frac{24}{8}$$
$$A_{preto} = 3cm^2.$$

(b) Se o lado do ladrilho mede 1cm, qual a diferença entre a área branca e a área preta?

Sabendo que há 9 quadrados de mesma área $1cm^2$ temos que a área total é $9cm^2$, e como já temos a área em preto, para obter a área em branco basta calcular a seguinte diferença:

$$A_{branco} = A_{total} - A_{preto} = 9 - 3 = 6cm^2.$$

Portanto, a diferença entre as áreas em preto e em branco é dada por:

$$A_{dif} = A_{preto} - A_{branco} = 6 - 3 = 3cm^2.$$

(c) Se o lado do ladrilho mede 2cm, qual é a área da parte pintada de preto?

Sabendo que o lado de cada quadrado mede 2 cm então a área de cada quadrado é de $4cm^2$, para a área demarcada de preto, tem-se:

$$A_{preto} = \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{8}\cdot 2\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 41 + \frac{1}{8}\cdot 2\cdot 4 + \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{4}\cdot 4$$
$$A_{preto} = 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$A_{preto} = 12cm^2.$$

(d) Se o lado do ladrilho mede 2cm, qual a diferença entre a área branca e a área preta?

Sabendo que há 9 quadrados de mesma área $4cm^2$ temos que a área total é $36cm^2$, e como já temos a área em preto, para obter a área em branco basta calcular a seguinte diferença:

$$A_{branco} = A_{total} - A_{preto} = 36 - 12 = 24cm^2.$$

Portanto, a diferença entre as áreas em preto e em branco é dada por:

$$A_{dif} = A_{branco} - A_{preto} = 24 - 12 = 12cm^2.$$

Problema 3. (*Resolução de Thomas Lankszner Bach - Colégio Marista Pio XII*)

Para resolução deste problema, seja x e y representando o nº de sacos de Carlos e Bruno, respectivamente.

(a)

$$\begin{aligned} x + 6 &= 9 - 6 \\ x + 6 &= 3 \\ x &= 3 - 6 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 4(x-3) &= 9 + 3 \\ 4x - 12 &= 12 \\ 4x &= 12 + 12 \\ 4x &= 24 \\ x &= \frac{24}{4} \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Não é possível, pois na segunda situação Carlos ficaria com bem mais sacos que Bruno.

(b) Pelo enunciado, se Bruno der 6 sacos a Carlos, a carga de seus carrinhos seriam iguais, assim $y - 6 = x + 6$, ou seja, $y = x + 12$. Também, se Bruno tomasse 3 sacos a carga de seu carrinho seria o quadruplo da carga do carrinho de Carlos, ou seja, $y + 3 = 4(x - 3)$. Fui reunindo as dicas do enunciado ($y - x = 12$, $x > 3$ e $y = 4(x - 3) - 3$) e comecei a testar até chegar no resultado possível ($x = 9$ e $y = 21$), como mostra a tabela.

x	$y = 12 + x$	$y = 4(x-3) - 3$
4	16	1
5	17	5
6	18	9
7	19	13
8	20	17
9	21	21

Logo, no carrinho de Carlos tinha 9 sacos e no de Bruno 21 sacos.

Problema 4. (*Resolução de Alvaro Ivanski Sabedotti - Colégio Positivo Master*)

(a) Sendo J=6 o número de patas de cada joaninha e A=8 o número de patas de cada aranha temos que

$$\begin{aligned} 8 \cdot J &= 48 \\ 7 \cdot J + A &= 50 \\ 5 \cdot J + 3A &= 54 \\ 30 + 24 &= 54 \end{aligned}$$

Assim, há cinco joaninhas, pois se tiver três aranhas (que totalizam 24 patas) mais as cinco joaninhas, obtemos o número de patas.

(b) Para um total de 56 animais na segunda sala, temos

$$\begin{aligned} 56 \cdot 8 &= 448 \\ 30 \cdot 8 &= 240 \\ 26 \cdot 6 &= 156 \\ 156 + 240 &= 396 \end{aligned}$$

Não é possível pois o máximo de aranhas é 56 e se multiplicar por oito obtemos um número menor do que se tem na sala.

Problema 5. (*Resolução de Ruan Eneias Ferreira - Colégio Meneleu de Almeida Torres*)

(a)

Quantidade de camadas colocadas	Quantidade de quadradinhos no quadrado
1	9
2	25
3	49
4	81
5	121

(b) Devemos identificar a sequência, se colocarmos uma camada temos um total de $3^2 = 9$ quadradinhos, duas camadas um total de $5^2 = 25$ quadradinhos, e assim por diante, que é a quantidade de quadradinhos do lado do quadrado. Para dez camadas temos

$$3^2, 5^2, 7^2, 9^2, 11^2, ..., 21^2,$$

e assim o lado do quadrado possuirá 21 quadradinhos.

(c) O primeiro termo possui uma camada e a quantidade de quadradinhos é dada pelo quadrado da soma da quantidade de camadas mais o seu sucessor, por exemplo, para uma camada, $(1 + 2)^2 = 3^2 = 9$, e assim por diante, com 499 camadas será: 499 mais o seu sucessor, no caso $(499 + 500)^2 = 999^2$ e então fazemos $999^2 = 998001$ quadradinhos.

Problema 6. (*Resolução da Pauta*)

(a) Se $n = 20$, quantos números permaneceram escritos na lousa? Podemos enumerar de 1 a 20 abaixo

$$1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, 15, \cancel{16}, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}$$

e fazer a seguinte análise: como João apagou os múltiplos de 2 que não são múltiplos de 3, então João apagou os números 02, 04, 08, 10, 14, 16 e 20. Em seguida, Paulo apagou os múltiplos de 3 que não são múltiplos de 5, ou seja, ele apagou os números 03, 06, 09, 12 e 18. Assim, foram apagados 12 números da lousa e portanto, restaram 8 números escritos na lousa.

Uma solução alternativa: analisando os critérios pedidos pelo professor, serão apagados os $M(2) - M(6)$, pois os $M(6)$ são os números múltiplos de 2 e múltiplos de 3 simultaneamente, e também $M(3) - M(15)$ pois os $M(15)$ são os números múltiplos de 3 e múltiplos de 5 simultaneamente. Assim, para $n = 20$ temos:

$$\begin{aligned} n[M(2)] &= 20 \div 2 = 10 \\ n[M(3)] &= 20 \div 3 = 6 \\ n[M(6)] &= 20 \div 6 = 3 \\ n[M(15)] &= 20 \div 15 = 1 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} n[M(2) - M(6)] &= 10 - 3 = 7 \\ n[M(3) - M(15)] &= 6 - 1 = 5 \end{aligned}$$

Portanto, foram apagados

$$n[M(2) - M(6)] + n[M(3) - M(15)] = 7 + 5 = 12$$

E permaneceram então escritos na lousa 8 números.

(b) Se $n = 500$, quantos números permaneceram escritos na lousa?

Analisando os critérios pedidos pelo professor, serão apagados os $M(2) - M(6)$, pois os $M(6)$ são os números múltiplos de 2 e múltiplos de 3 simultaneamente, e também $M(3) - M(15)$ pois os $M(15)$ são os números múltiplos de 3 e múltiplos de 5 simultaneamente. Assim, para $n = 500$ temos:

$$\begin{aligned} n[M(2)] &= 500 \div 2 = 250 \\ n[M(3)] &= 500 \div 3 = 166 \\ n[M(6)] &= 500 \div 6 = 83 \\ n[M(15)] &= 500 \div 15 = 33 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} n[M(2) - M(6)] &= 250 - 83 = 167 \\ n[M(3) - M(15)] &= 166 - 33 = 133 \end{aligned}$$

Portanto, foram apagados

$$n[M(2) - M(6)] + n[M(3) - M(15)] = 167 + 133 = 300$$

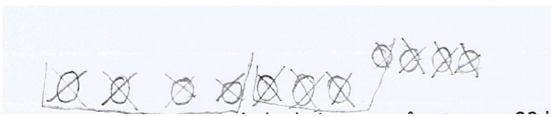
E permaneceram então escritos na lousa 200 números.

Resoluções

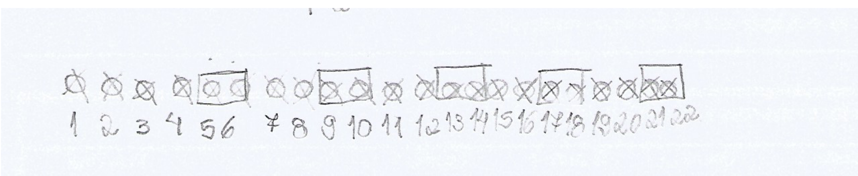
Nível 2

Problema 1. (*Resolução de Geovanna Ferraz Costa Siqueira - Escola Medalha Milagrosa*)

(a) 11 balões, pois temos 7 balões no ar, estouramos 4, com +2 balões ficarão 5 balões no ar, estouramos +4, ficarão 3 balões no ar (contado com os outros dois que subiram), então estouramos esses 3 e não sobe mais nenhum.



(b) 12 balões, fiz o desenho abaixo, 22 balões, e os "X", representa os que foram estourados, fiz "X" nos 4 primeiros e os 2 seguintes. A seguir estouramos os balões 5, 6, 7 e o 8 e subiram 9 e 10 e assim por diante, após isso tiramos do 22 o número de balões que subiram, ou seja, os que estão dentro do retângulo. e chegamos em 12.



Problema 2. (*Resolução da Pauta*)

(a) Analisando os dados do problema, para o quadrado ABCD temos:

$$2p_{(ABCD)} = 20$$
$$4l_{(ABCD)} = 20$$
$$l_{(ABCD)} = 5\text{cm}$$

Assim, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 5cm$. Logo, a área do quadrado será dada por

$$A_{(ABCD)} = 5 \times 5$$
$$A_{(ABCD)} = 25cm^2.$$

Para o retângulo EFGH temos duas alternativas de resolução:

- Analisando por frações:

$$7 \cdot \overline{EI} = 3 \cdot \overline{AD}$$
$$7 \cdot \overline{EI} = 3 \cdot 5$$
$$7 \cdot \overline{EI} = 15$$
$$\overline{EI} = \frac{15}{7}$$

Logo,

$$5 \cdot \overline{EI} = 2 \cdot \overline{HG}$$
$$5 \cdot \frac{15}{7} = 2 \cdot \overline{HG}$$
$$\frac{75}{7} = 2 \cdot \overline{HG}$$
$$\overline{HG} = \frac{75}{14}cm.$$

Onde,

$$\begin{aligned}
2p_{(EFGH)} &= 2 \cdot \overline{HG} + 2 \cdot \overline{FG} \\
14 &= 2 \cdot \frac{75}{14} + 2 \cdot \overline{FG} \\
14 &= \frac{150}{14} + 2 \cdot \overline{FG} \\
14 - \frac{150}{14} &= 2 \cdot \overline{FG} \\
2 \cdot \overline{FG} &= \frac{46}{14} \\
\overline{FG} &= \frac{23}{14} cm.
\end{aligned}$$

Assim, a área do retângulo será dada por

$$\begin{aligned}
A_{(EFGH)} &= \frac{75}{14} \cdot \frac{23}{14} \\
A_{(EFGH)} &= \frac{1725}{196} cm^2.
\end{aligned}$$

- Analisando por decimais:

$$\begin{aligned}
7 \cdot \overline{EI} &= 3 \cdot \overline{AD} \\
7 \cdot \overline{EI} &= 3 \cdot 5 \\
7 \cdot \overline{EI} &= 15 \\
\overline{EI} &= \frac{15}{7} \\
\overline{EI} &= 2,1 cm
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
5 \cdot \overline{EI} &= 2 \cdot \overline{HG} \\
5 \cdot 2,1 &= 2 \cdot \overline{HG} \\
10,5 &= 2 \cdot \overline{HG} \\
\overline{HG} &= 5,25 cm.
\end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned}2p_{(EFGH)} &= 2 \cdot \overline{HG} + 2 \cdot \overline{FG}\\ 14 &= 2 \cdot (5,25) + 2 \cdot \overline{FG}\\ 14 &= 10,5 + 2 \cdot \overline{FG}\\ 14 - 10,5 &= 2 \cdot \overline{FG}\\ 2 \cdot \overline{FG} &= 3,5\\ \overline{FG} &= 1,75cm.\end{aligned}$$

Assim, a área do retângulo será dada por

$$\begin{aligned}A_{(EFGH)} &= 5,25 \cdot 1,75\\ A_{(EFGH)} &= 9,2cm^2.\end{aligned}$$

(b) Do mesmo modo, para a diferença entre as áreas temos as duas alternativas de resolução:

- Usando frações:

$$\begin{aligned}A_{(ABCD)} - A_{(EFGH)} &= 25 - \frac{1725}{196}\\ (R_1 + R_2) - (R_2 + R_3) &= \frac{4900 - 1725}{196}\\ R_1 + R_2 - R_2 + R_3 &= \frac{3175}{196}\\ R_1 - R_3 &= \frac{3175}{196}cm^2\end{aligned}$$

- Usando decimais:

$$\begin{aligned}A_{(ABCD)} - A_{(EFGH)} &= 25 - 9,2\\ (R_1 + R_2) - (R_2 + R_3) &= 15,8\\ R_1 + R_2 - R_2 + R_3 &= 15,8\\ R_1 - R_3 &= 15,8cm^2\end{aligned}$$

Problema 3. (*Resolução de Renato Mandalozzo Tebcherani - Colégio Positivo Master*)

(a)

Quantidade de camadas colocadas	Quantidade de quadradinhos no quadrado
1	9
2	25
3	$7^2 = 49$
4	$9^2 = 81$
5	$11^2 = 121$

(b) $f(x) = (2x+1)^2$
$f(10) = (2 \cdot 10 + 1)^2$
$f(10) = 21^2$ quadradinhos total
$\sqrt{21^2}$ = lado do quadrado = 21

(c) $f(499) = (2 * 499 + 1)^2$
$f(499) = (999^2)$
$f(499) = 998001$ quadradinhos.

Problema 4. (*Resolução de Renata Nadal Baier - Colégio Marista Pio XI*)

(a) Provar que $\frac{a^2b^+2c^2}{abc} \geq 2$.

$$\begin{aligned} a^2b^2 + c^2 &\geq 2abc \\ a^2b^2 - 2abc + c^2 &\geq 0 \\ (ab-c)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

está correto, pois o quadrado de um número real é sempre positivo. Isso prova que $\frac{a^2b^+2c^2}{abc} \geq 2$.

(b) Provar que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

$$\begin{aligned} a + b &\geq 2\sqrt{ab} \\ a - 2\sqrt{ab} + b &\geq 0 \\ (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

isto prova que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, pois todo quadrado de um número real é positivo, ou seja, maior ou igual a zero.

Problema 5. (*Resolução de Gabriela Brasil Silva - Colégio Marista Pio XII*)

(a) Completando a tabela temos:

Nº de casais que compareceram	Nº de apertos de mãos dados por homens	Nº de apertos de mão dados por mulheres	Nº total de apertos de mão
4	18	12	18
5	30	20	30
6	45	30	45
7	63	42	63

Assim, cada mulher dará a mesma quantidade de apertos de mão que a do número de casais, menos um, multiplicado pelo número de casais. Os cumprimentos femininos são $\dfrac{2}{3}$ dos cumprimentos totais, que é igual aos do homem também.

(b) Seguindo a regra do item anterior, sendo o número de cumprimentos das mulheres igual a $\frac{2}{3}$ do total, e eles são obtidos pela operação ((nº de casais - 1) $\cdot$ total de casais) obtemos 40·41=1640, que corresponde a $\frac{2}{3}$ dos cumprimentos total, então,

$$\frac{1640}{x} = \frac{2}{3},$$

ou seja, ocorreram 2460 cumprimentos de apertos de mão.

Problema 6. (*Resolução de Gabriel França Ferreira - Colégio Marista Pio XII*)

(a) Não, pois se Aline der 4 balas para Joel a equação ficaria assim:

$$45 + 4 = (x - 4)^2$$
$$49 = (x - 4)^2$$

e tirando a raiz de ambos os lados teríamos

$$7 = (x - 4)$$
$$7 + 4 = x$$
$$x = 11$$

Assim, se ele desse a ela 11 balas, essa seria a equação.

(b) Para chegar na solução foram feitos os seguintes cálculos:
$x =$ balas de Aline
$y =$ balas de Joel

- Equação 1

$$y + 4 = (x - 4)^2$$
$$y + 4 = x^2 - 8x + 16 \text{ (Isolar y)}$$
$$y = x^2 - 8x + 12 \text{ (Substituir y na Equação 2 abaixo)}$$

- Equação 2

$$y - 11 = x + 11$$

Assim, temos que

$$x^2 - 8x + 12 - 11 = x + 11$$
$$x^2 - 8x + 1 - x - 11 = 0$$
$$x^2 - 9x - 10 = 0$$

Usando a regra da soma e produto encontramos as raízes $x_1 = 10$ e $x_2 = -1$, mas como o número de balas tem que ser positivo, usamos $x = 10$ e substituímos na equação 2, assim

$$\begin{aligned} y - 11 &= x + 11 \\ y - 11 &= 10 + 11 \\ y &= 11 + 10 + 11 \\ y &= 32 \text{ (balas de Joel)} \end{aligned}$$

Como temos o valor de y, podemos substituir novamente e achar o valor de x, assim

$$\begin{aligned} y - 11 &= x + 11 \\ 32 - 11 - 11 &= x \\ x &= 10 \text{ (balas de Aline)} \end{aligned}$$

Portanto, Aline ganhou 10 balas e Joel 32 balas.

Resoluções

Nível 3

Problema 1. (*Resolução de Danilo Beltrame - Colégio Pontagrossense Sepam*)

(a) Para cada 2 pinos que se derruba, o saldo de pinos é 4, então, para que 8 novos pinos apareçam, de forma a totalizar 15 pinos, precisamos derrubar 16 pinos.

Agora temos 15 pinos e a regra do jogo mudou, de forma que a cada 4 pinos derrubados, o saldo é -2, então, vamos supor que eu reduzi o saldo em 10, restando 5 pinos, e derrubando 20 para isso. Eu derrubo mais 4 e 2 são repostos, sobrando 3 pinos. Agora posso derrubar os 3 últimos pinos, sem que haja reposição. Portanto, para vencer basta derrubar $16 + 20 + 4 + 3 = 43$ pinos.

(b) Utilizando informações da letra (a) desse problema: a partir do momento em que temos 15 pinos precisamos derrubar 27 pinos para vencer e ainda, a cada pino faltando para chegar em 15 pinos, na primeira etapa do jogo, é necessário derrubar 2 pinos. Assim, se 27 jogadas foram necessárias para a segunda etapa, apenas 6 foram usadas na primeira, para aumentar o saldo inicial em $\frac{6}{2} = 3$ pinos, portanto:

$$\begin{aligned} x + 3 &= 15 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Portanto, no começo do jogo tinham 12 pinos em pé.

Problema 2. (*Resolução de Leonardo Ferreira - Colégio Marista Pio XII*)

(a) Provar que $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})}$.

Temos que

$$\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})}\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})}+\frac{3}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}\\
&=(\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5})+(\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2})\\
&=\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2}+\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}\\
&=\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{2}\\
&=\sqrt{7}-\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

(b) Provar que $(\sqrt{17}+1)(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\frac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{10}}+\frac{7}{\sqrt{10}+\sqrt{17})}).$

Temos que

$$(\sqrt{17}+1)(\frac{1}{(1+\sqrt{2})}\frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})}+\frac{3}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{5})}+\frac{5}{(\sqrt{5}+\sqrt{10})}\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{10})}{(\sqrt{5}-\sqrt{10})}+$$
$$\frac{7}{(\sqrt{10}+\sqrt{17})})\frac{(\sqrt{10}-\sqrt{17})}{(\sqrt{10}-\sqrt{17})}$$

$$\begin{aligned}
&=(\sqrt{17}+1)(\frac{1(1-\sqrt{2})}{1-2}+\frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{2-5}+\frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{10})}{5-10}+\frac{7(\sqrt{10}-\sqrt{17})}{10-17}\\
&=(\sqrt{17}+1)(-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{10}+\sqrt{17})\\
&=(\sqrt{17}+1)(-1+\sqrt{17})\\
&=-\sqrt{17}+17-1+\sqrt{17}\\
&=17-1=16.
\end{aligned}$$

E 16 é um número inteiro.

Problema 3. (*Resolução de Rafael Antonio Chinelatto - Colégio Marista Pio XII*)

(a) Prove que $(x^2-1)^2 = x(3x^2)$ só tem soluções positivas.

Caso x fosse um número negativo, a primeira parte da equação seria positiva, pois o quadrado de qualquer número real é positivo e a segunda parte seria negativa. Como $(3x^2)$ seria positivo, já que x^2 sempre é positivo, e x seria negativo, pela regra de sinal daria um número negativo. Como um número positivo é diferente de um negativo, só existe soluções positivas.

(b) Quantas soluções negativas a equação $x^4-3x^3-2x^2-\sqrt{2}x+1=0$ possui?

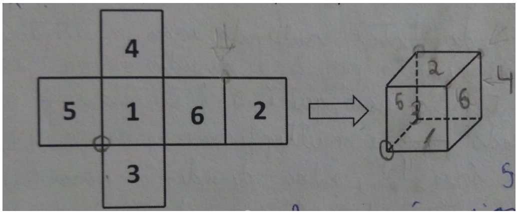
Temos que

$$\begin{aligned} x^4-3x^3-2x^2-\sqrt{2}x+1&=0\\ (x^2-1)^2&=x^4-2x^2+1\\ (x^2-1)^2-3x^3-\sqrt{2}x&=0\\ (x^2-1)^2&=3x^3+\sqrt{2}x \end{aligned}$$

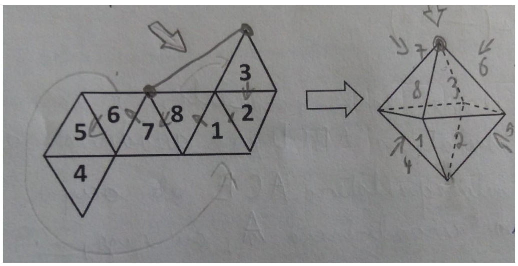
Se x for negativo, $(x^2-1)^2$ será positivo, pois o quadrado de qualquer número real é positivo, e $(3x^3+\sqrt{2}x)$ será negativo, pois x^3 será negativo e quando multiplicado com o 3, continuará negativo e $\sqrt{2}x$ será negativo pois o produto entre o número positivo $(\sqrt{2})$ e um número negativo (x) é um número negativo. Ou seja, como um número negativo é diferente de um número positivo, a equação não admite soluções negativas.

Problema 4. (*Resolução de Rafael Adriano Ferreira Elesbão - Colégio Estadual Regente Feijó*)

(a) 5+1+3=9
Apenas procurar o vértice com os menores números possíveis 5+3+1, pois qualquer outro vértice embaixo é maior, 5 e 4, 4 e 6, 6 e 3 e em cima soma os mesmos pares só que com o 2 (número maior que 1).



(b) 8+7+6+6 = 15+9 = 24
É preciso olhar apenas os 3 números maiores que se encontram em um mesmo vértice, neste caso, 8, 7 e 6 que se juntam com o 3 ainda.



Problema 5. (*Resolução da Pauta*)

(a) Calcule a área do setor circular de 45^o.

Como $360° : 45° = 8$, então o setor corresponde a $\dfrac{1}{8}$ do círculo inteiro. Por isso, a sua circunferência mede $8\dfrac{\pi}{2} = 4\pi cm$. Como o comprimento do arco de uma circunferência de raio r é dado por $2\pi r$, vem $2\pi r = 4\pi$, logo $r = 2$.

Logo, a área do círculo é dada por

$$A_{total} = \pi r^2 = \pi(2)^2 = 4\pi cm^2$$

e a área do setor será

$$A_{setor} = \frac{1}{8}4\pi = \frac{\pi}{2}cm^2$$

(b) Calcule a área do setor circular de 60º.

Da mesma maneira, como $360° : 60° = 6$, então o setor corresponde a $\frac{1}{6}$ do círculo inteiro, assim sua circunferência mede $8\pi cm$. Como o comprimento do arco de uma circunferência de raio r é dado por $2\pi r$, vem $2\pi r = 8\pi$, donde $r = 4$. Logo, a área do círculo é dada por

$$A_{total} = \pi r^2 = \pi(4)^2 = 16\pi cm^2$$

e a área do setor será

$$A_{setor} = \frac{1}{8}16\pi = 2\pi cm^2$$

(c) Calcule a diferença entre as áreas das regiões R_3 e R_1.

A área do setor circular de 45º é $R_1 + R_2 = \frac{\pi}{2}$.

A área do setor circular de 60º é $R_3 + R_2 = 2\pi$.

Assim, a diferença entre as áreas dos setores é dada por:

$$A_{dif} = (R_3 + R_2) - (R_1 + R_2)$$
$$A_{dif} = R_3 + R_2 - R_1 - R_2$$
$$A_{dif} = R_3 - R_1 = 2\pi - \frac{\pi}{2}$$
$$A_{dif} = \frac{3\pi}{2} cm^2$$

Problema 6. (*Resolução de Cassiano José Kounaris Fuziki - Colégio Marista Pio XII*)

(a) Completando a tabela temos:

Nº de casais que compareceram	Nº de apertos de mãos dados por homens	Nº de apertos de mão dados por mulheres	Nº total de apertos de mão
4	0+3=3	0+3=3	0+3=3
5	3+6=9	2+6=8	3+6=9
6	9+9=18	6+9=15	9+9=18
7	18+12=30	12+12=24	18+12=30

(b) Como visto no item anterior, o número de apertos de mão dados por mulheres não influencia no número total de apertos, uma vez que estas só podem cumprimentar outros homens. Desta forma, para descobrir o número total de apertos, basta calcular a quantidade de cumprimentos feitos por homens.

O número de apertos entre homens corresponde a

$$\frac{n^o dehomens \cdot (n^o dehomens - 1)}{2}.$$

Isso acontece pois um homem não pode cumprimentar a si mesmo e porque cada aperto de mão só acontece uma vez entre dois homens. Nos casos de apertos de mão entre um homem e uma mulher, o número de cumprimentos será:

$$n^{\text{o}} \text{ de homens} \cdot (n^{\text{o}} \text{ de mulheres} - 1).$$

Dessa forma, como existem 41 casais dentre os quais apenas $41 - 3 = 38$ terão um padrão normal, haverá

$$(\frac{38.37}{2}) + 38 \cdot 37 = 703 + 1406 = 2 \cdot 109.$$

Para os 3 casais restantes, haverão $3 \cdot (41 - 3) = 3 \cdot 38 = 114$, uma vez que só irão cumprimentar mulheres.

Portanto, o resultado será $2109 + 114 = 2223$ cumprimentos.

Resoluções

Nível 4

Problema 1. (*Resolução da Pauta*)

(a) Há 32 números possíveis de serem retirados do globo na primeira vez e 31 na segunda. Portanto, há $32 \cdot 31 = 992$ pares de números que podem ser sorteados na retirada das duas primeiras bolas do globo. Um par específico de números ganhadores, do cartão acima, pode aparecer em 8 cartões distintos. Portanto, a probabilidade desse cartão ser premiado é 8 em 992, isto é $\frac{8}{992} = \frac{1}{124}$.

(b) Para que o cartão dado acima seja ganhador no primeiro sorteio deve sair um dos 4 números do cartão. Como há 32 bolas no globo, a probabilidade de isso acontecer é $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. O segundo número sorteado tem que ser um número que está na linha ou na coluna do primeiro sorteado. Portanto, há dois números possíveis de serem o número sorteado na retirada da segunda bola. Como a segunda bola pode ser retirada de 31 diferentes maneiras, então a probabilidade de sair uma bola ganhadora na segunda retirada é $\frac{2}{31}$. Logo, a probabilidade de ganhar com o cartão acima, após retirar duas bolas do globo, é $\frac{4}{32} \cdot \frac{2}{31} = \frac{8}{992} = \frac{1}{124}$.

Problema 2. (*Resolução de Gabriel Henrique Kwiatkovski Godinho - Colégio Positivo Master*)

(a) Realizei a soma de todos os vértices dados três a três, e encontrei que o menor poder é 9, que corresponde ao somatório $5 + 3 + 1 = 9$.

(b) Pela figura podemos perceber que em um dos vértices encontram-se os três maiores valores das faces, ou seja 6, 7 e 8. Juntando a soma deles com o maior vértice que fará fronteira (3), encontramos o maior poder, ou seja $3 + 6 + 7 + 8 = 24$.

Problema 3. (*Resolução da Pauta*)

(a) Completando a tabela vem:

Nº de casais que compareceram	Nº de apertos de mãos dados por homens	Nº de apertos de mão dados por mulheres	Nº total de apertos de mão
4	0+3=3	0+3=3	0+3=3
5	3+6=9	2+6=8	3+6=9
6	9+9=18	6+9=15	9+9=18
7	18+12=30	12+12=24	18+12=30

(b) Vamos considerar primeiro que todos os apertos de mão ocorreram. Comparecendo 41 casais, tem-se:

Aperto de mãos dadas entre homens:

Cada homem apertará a mão de quarenta outros homens.

Logo, $A_{(entrehomens)} = \dfrac{41 \cdot 40}{2} = 820.$

Aperto de mãos dadas por homens em mulheres:

Cada homem apertará a mão de quarenta outras mulheres (pois não apertará a mão de sua cônjuge).

Logo,$A_{(entrehomensemulheres)} = 41 \cdot 40 = 1640.$

Aperto de mãos dadas por mulheres em homens:

Cada mulher apertará a mão de quarenta outros homens (pois não apertará a mão de seu cônjuge).

Logo, $A_{(entremulheresehomens)} = 41 \cdot 40 = 1640.$

Total de apertos de mãos:

O total de apertos de mãos se dará pela soma dos apertos de mãos entre homens e apertos de mãos entre homens e mulheres.

Portanto, $A_{(total)} = 820 + 1640 = 2460.$

Agora vamos descontar os apertos de mão que não ocorreram.

Como 3 casais não apertaram a mão de homens e cada casal dá dois apertos nas mãos de cada homem, deixaram de ocorrer $3 \cdot 38 = 114$ apertos.

Como 2 casais não apertaram a mão de mulheres e cada casal dá um aperto nas mãos de cada mulher, deixaram de ocorrer $1 \cdot 38 = 40$ apertos.

Portanto, o total de apertos de mão foi de $2460 - 120 - 40 = 2300.$

Problema 4. (*Resolução da Pauta*)

(a) Fazendo x = -1 na igualdade

$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} x^2 + ... + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n.$

obteremos

$(1-1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}(-1) + \binom{n}{2}(-1)^2 + ... + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n$

donde vem

$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

(b) Provar que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ para $1 \leq k \leq n$.

$$\begin{aligned}
k\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= k\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k-2)(n-k-1)}{1.2.3.....(k-1).k} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k-2)(n-k-1)}{1.2.3.....(k-1)} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k-2)(n-k-1)(n-k)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n(n-1)!}{k![(n-1)-(k-1)]!} \\
&= n\binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}$$

E assim está provado.

(c) Provar que $\dfrac{\binom{2018}{1} + 2\binom{2018}{2} + 3\binom{2018}{3} + \cdots + 2017\binom{2018}{2017} + 2018\binom{2018}{2018}}{2018} = 2^{2017}$.

Pelo item anterior temos que

$$\begin{aligned}
1\begin{pmatrix} 2018 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2018\begin{pmatrix} 2017 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
2\begin{pmatrix} 2018 \\ 2 \end{pmatrix} &= 2018\begin{pmatrix} 2017 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
&\cdots\cdots \\
2017\begin{pmatrix} 2018 \\ 2017 \end{pmatrix} &= 2018\begin{pmatrix} 2017 \\ 2016 \end{pmatrix}, \\
2018\begin{pmatrix} 2018 \\ 2018 \end{pmatrix} &= 2018\begin{pmatrix} 2017 \\ 2017 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donde vem,

$$\begin{aligned}
&\frac{\begin{pmatrix} 2018 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2018 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2018 \\ 3 \end{pmatrix} + \ldots + 2017\begin{pmatrix} 2018 \\ 2017 \end{pmatrix} + 2018\begin{pmatrix} 2018 \\ 2018 \end{pmatrix}}{2018} \\
&= \frac{2018\left[\begin{pmatrix} 2017 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2017 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2017 \\ 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 2017 \\ 2016 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2017 \\ 2017 \end{pmatrix}\right]}{2018} \\
&= \begin{pmatrix} 2017 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2017 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2017 \\ 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 2017 \\ 2016 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2017 \\ 2017 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Fazendo $x = 1$ e $n = 2017$ na expressão do Binômio de Newton, obteremos

$$2^{2017} = \begin{pmatrix} 2017 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2017 \\ 1 \end{pmatrix} 1 + \begin{pmatrix} 2017 \\ 2 \end{pmatrix} 1^2 + \ldots + \begin{pmatrix} 2017 \\ 2016 \end{pmatrix} 1^{2016} + \begin{pmatrix} 2017 \\ 2017 \end{pmatrix} 1^{2017}$$

e que substituindo na última linha da expressão acima mostra que

$$\frac{\binom{2018}{1} + 2\binom{2018}{2} + 3\binom{2018}{3} + ... + 2017\binom{2018}{2017} + 2018\binom{2018}{2018}}{2018}$$
$$= \frac{2018 \cdot 2^{2017}}{2018}$$
$$= 2^{2017}$$

E assim está provado o resultado.

Problema 5. (*Resolução de Letícia Aparecida Nunes de Siqueira - Colégio Alfa Plus*)

(a) Analisando os dados do problema temos que

- $\widehat{ACB} = 90^o - \widehat{ACD} = 90^o - 82^o30' = 7^o30'$.
- $\widehat{AFB} = 15^o$, pois a soma dos ângulos internos do triângulo deve ser 180º e o ângulo $\widehat{AFC}$ é suplementar de $\widehat{AFB}$.
- $\widehat{AEB} = 30^o$, pois a soma dos ângulos internos do triângulo AEF deve ser 180º e o ângulo $\widehat{AEF}$ é suplementar a $\widehat{AEB}$.

(b) No triângulo ABE temos:

$$\text{sen}30^o = \frac{1cm}{\overline{AE}} \to \frac{1}{2} = \frac{1cm}{\overline{AE}} \to \overline{AE} = 2cm$$

Aplicando a relação de Pitágoras nesse mesmo triângulo vem:

$$2^2 = 1^2 + \overline{BE}^2 \to 4 = 1 + \overline{BE}^2 \to 3 = \overline{BE}^2 \to \overline{BE} = \sqrt{3}$$

Como o triângulo AEF é isósceles segue também que $\overline{EF} = 2$. Ainda, como o triângulo ABF é retângulo, usamos o Teorema de Pitágoras para obter

$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2$ $\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + (\overline{BE} + \overline{EF})^2$ $\overline{AF}^2 = 1^2 + (\sqrt{3} + 2)^2$
$\overline{AF}^2 = 1 + 3 + 4\sqrt{3} + 4 = 8 + 4\sqrt{3} = 4(2 + \sqrt{3})$
Logo, $\overline{AF} = \overline{FC} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

(c) $tg 82^{\text{o}}30' = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \quad (\overline{CD} = \overline{AB} = 1\text{cm})$

$tg 82^{\text{o}}30' = \dfrac{2+\sqrt{3}\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{1}$

$tg 82^{\text{o}}30' = 2+\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{8+4\sqrt{3}}.$

Problema 6. (*Resolução da Pauta*)

(a) Já que $S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots 2^{2018}$ e que $2 = 2^2 - 2$, $2^2 = 2^3 - 2^2, \ldots,$ $2^{2018} = 2^{2019} - 2^{2018}$, obtemos

$$\begin{aligned} S &= (2^2-2)+(2^3-2^2)+(2^4-2^3)+\cdots+(2^{2018}-2^{2017})+(2^{2019}-2^{2018}) \\ &= 2^{2019}-2 = 2(2^{2018}-1). \end{aligned}$$

(b) Notamos que $3^{n+1} - 3^n = (3-1)\cdot 3^n = 2\cdot 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desse modo,

$$\begin{aligned} 2S &= (3^2-3)+(3^3-3^2)+(3^4-3^3)+\cdots+(3^{2018}-3^{2017})+(3^{2019}-3^{2018}) \\ &= 3^{2019}-3 = 3(3^{2018}-1), \end{aligned}$$

donde $S = \dfrac{3(3^{2018}-1)}{2}$.

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Artigos

O Princípio da Casa dos Pombos: proposições e aplicações

Gabriel da Silva Lima[1]

limagabrielpg@gmail.com

Resumo: O Princípio da Casa dos Pombos é uma das ferramentas utilizadas para a resolução de problemas, principalmente envolvendo noções de conjuntos. Com enunciado simples e intuitivo, veremos que o PCP pode ser utilizado como método de prova, e possui aplicabilidade em vários ramos da Matemática, como Teoria dos Números, Geometria e Combinatória. No presente trabalho, apresentamos as versões simplificada e quantificada deste resultado, bem como problemas olímpicos cujas resoluções envolvem seu uso.

Palavras-chave: Conjuntos; Problemas olímpicos; resolução de problemas.

Introdução

Johann Dirichlet (1805-1859) foi um matemático alemão que fez contribuições valiosas para diversas áreas da matemática, dentre elas destacamos a convergência de séries trigonométricas, a participação no desenvolvimento da Teoria dos Números, inclusive estudando o Último Teorema de Fermat. Para resolver problemas matemáticos envolvendo elementos de um conjunto finito ou infinito, Dirichlet usou um instrumento que posteriormente foi chamado de Princípio das Gavetas ou também Princípio da Casa dos Pombos (PCP).

O PCP diz respeito a uma propriedade dos números inteiros positivos, sendo utilizado comumente em problemas da Teoria dos Números, além de outros ramos da Matemática, como Combinatória e Geometria. Sendo de fácil entendimento, já que seu enunciado é simples e intuitivo, o que muitas vezes pode dar a impressão de ser "óbvio". A seguir, vejamos a proposição em sua versão simples.

[1]Graduando em Licenciatura em Matemática pela UEPG.

Versão Simplificada

Proposição 1. Se tivermos $N+1$ pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa conterá dois ou mais pombos.

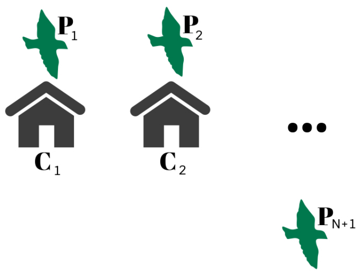


Figura 1. Sabendo que P representa os pombos e C às casas, verificamos que o pombo que restou, P_{N+1} , deverá deslocar-se até alguma das n casas, o que implicará em uma casa com dois pássaros.

Demonstração. Em um conjunto finito, tal princípio pode ser demonstrado através de uma contagem. Pode-se ainda usar a Demonstração por Absurdo, ou seja, supor o contrário. Nesse caso, suponha-se que após a distribuição de pombos por casa não sobrou nenhum pombo, o que significaria que o número de pombos é menor ou igual ao número de casas, o que contradiz a hipótese inicial de termos $N+1$ pombos. ■

Não há dificuldade em saber quando e como aplicar o PCP, desde que se tenha bem estabelecido o que está sendo representado pelas casas e o que está representando os pombos. Veremos agora exemplos onde o PCP foi aplicado adequadamente.

Exemplos

Exemplo 1. Qual o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que duas entre elas fazem aniversário no mesmo mês?

Solução. Vamos denotar primeiramente os dados:

Casas: Meses do ano (12).

Pombos: Pessoas.

Relacionando cada pessoa com seu respectivo mês de nascimento, notamos que se reunirmos 12 pessoas ou menos, é possível que cada uma faça aniverásrio em meses diferentes, o que não cumpre o enunciado do nosso problema. Reunindo 13 pessoas a hipótese inicial atinge sucesso, já que pelo menos duas obrigatoriamente farão aniversário no mesmo mês. Então precisamos reunir no mínimo 13 pessoas para ter certeza que duas delas fazem aniversário no mesmo mês.

Exemplo 2 (OBM). Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e entre as 10 restantes, algumas são brancas e outras são pretas. Determine o menor número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver pelo menos 10 bolas da mesma cor.

Solução 2. Observe que precisamos de 10 bolas da mesma cor, e isso não acontecerá com as bolas pretas e brancas, já que a quantidade de bolas dessas cores é menor que 10. Agora, tirando 9 bolas de cada uma das outras cores restante (azul, verde e vermelha), teremos certeza que a próxima bola retirada será de uma das três cores restante, contemplando 10 bolas da mesma cor.

10 (pretas ou brancas) + 9 (azuis) + 9 (verde) + 9 (vermelhas) + 1 (azul, verde ou vermelha) = 38 bolas.

O número mínimo de bolas a serem retiradas são 38.

Exemplo 3 (OBM). Qual é a maior quantidade de números do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ que podemos escolher de modo que nenhum deles seja o dobro do outro?

Solução. Vamos separar este conjunto em subconjuntos contendo números e seus dobros: $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}, B = \{3, 6, 12\}, C = \{5, 10, 20\}, D = \{7, 14\}, E = \{9, 18\}$.

Os números restantes pertencem ao conjunto: $F = \{11, 13, 15, 17, 19\}$.

Como não pode ter dobros, poderá ser escolhido no máximo três elementos do conjunto A, sem que isso interfira na hipótese inicial. Assim como será possível escolher 2 elementos de B e C e apenas um de D e E, já no conjunto F poderá ser escolhido qualquer número, já que nenhum é dobro dos elementos do conjunto.

Como $3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 5 = 14$, encontramos que, dado o conjunto inicial, podemos formar um subconjunto com no máximo 14 elementos, de forma que nenhum possua dobro no mesmo conjunto.

Versão Geral: quantificada

Proposição 2. Dado p pombos a serem guardados em c casas, existe uma casa com pelo menos $[\frac{p-1}{c}]+1$ pombos.

Demonstração. Similar a demonstração da primeira proposição, suponhamos por absurdo que, todas as casas têm menos de $[\frac{p-1}{c}]+1$ pombos. Com isso, cada casa terá uma quantidade de pombos menor ou igual a $\frac{p-1}{c}$. Então, haverá no máximo $k\frac{p-1}{k}=p-1$ pombos, o que é um absurdo.

Logo, uma casa tem ao menos $[\frac{p-1}{c}]+1$ pombos.

Exemplos

Exemplo 1 (OBM) Carlinhos pensa num número ímpar positivo menor do que 100. Pedrinho se dispõe a descobrir que número é esse fazendo a seguinte pergunta, quantas vezes forem necessárias: "O número que você pensou é maior, menor ou igual a x?" Note que x é um número que Pedrinho escolhe.

Quantas perguntas desse tipo Pedrinho poderá ter que fazer até descobrir o número pensado por Carlinhos?

Solução. Primeiramente, como Carlinhos escolheu um número ímpar positivo menor que 100, o subconjunto de possibilidades de escolha são $A=\{1,3,5,7,...,99\}$, sendo que o total de elementos do conjunto é 50.

Após cada perguntas, as possibilidades de x caem pela metade. Ou seja. $(\frac{k-1}{2})$ possibilidades.

Então, passamos de 50 possibilidades para $(\frac{50-1}{2})=24,5$ e assim sucessivamente.

$\frac{24,5-1}{2}=11,75 \rightarrow \frac{11,75-1}{2}=5,375 \rightarrow \frac{5,375-1}{2}=2,1875 \rightarrow \frac{k-1}{2}=0,6.$

Note que Pedrinho precisará realizar 5 perguntas no mínimo, para que se tenha certeza absoluta do número pensado por Carlinhos.

Exemplo 2 (OBM) No interior de um quadrado de lado 16 são colocados 1000 pontos. Mostre que é possível colocar um triângulo equilátero de lado $2\sqrt{3}$ no plano de modo que ele cubra pelo menos 16 destes pontos.

Solução. Sabemos que a altura do triângulo é $2\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

Agora, precisamos descobrir quantos dos triângulos equiláteros cabem no quadrado.

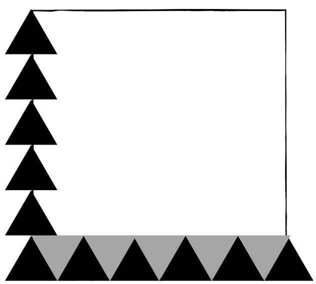
Fazendo área do quadrado dividida pela área do triângulo, teremos $\dfrac{16^2}{(2\sqrt{3})^2} = \dfrac{256}{12} = 21 + \dfrac{1}{3}$, que está entre $4, 5^2$ e 5^2.

Fazendo $3(A\triangle).5 = 15$, mas como o lado do quadrado é 16, sabemos que, na horizontal, podemos colocar no máximo 6 triângulos.

Como a altura do triângulo é 3, pensando em organizá-los horizontalmente, não se pode colocar apenas 5 triângulos, pois teriamos $5.3 = 15$, mas o lado do quadrado é 16. Por isso, vamos ultrapassar o lado.

Agora que organizamos, completando os espaços que sobraram, observamos que 5 triângulos são suficientes (cinza).

Observe uma possível representação.



Sabendo que é possível colocar seis faixas de triângulos, fazemos, $6.6(\triangle preto) + 5.6(\triangle cinza) = 66$.

Pelo PCP, se distribuimos 1000 pontos em 66 triângulos, algum triângulo terá pelo menos $[\dfrac{1000-1}{66} + 1] \approx 16$.

Referências

[1] FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. O Princípio da Casa dos Pombos. In: OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins et al. Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. cap. 4, p. 143-160. ISBN 978-85-8337-114-4.

[2] SANTOS, José P.; MELLO, Margarida P.; MURARI, IdaniT. C. Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008

Os Números Primos de Sophie Germain

Scheila Valechenski Biehl [1]

Arielin Dombrovsky [2]

Laila Andrade Sturmer [3]

Lourdes Aparecida da Luz [4]

Resumo: Matemática francesa, Sophie Germain, 1776-1831, demonstrou o último teorema de Fermat para alguns valores específicos de números primos, que ficaram conhecidos por "Primos de Sophie Germain". Neste trabalho apresentamos um histórico da vida desta mulher matemática, a Identidade de Sophie Germain e sua demonstração, bem como algumas aplicações de seu resultado.

Introdução

Nas últimas décadas a sociedade vem se deparando com alguns avanços no que diz respeito à inserção e à participação das mulheres no campo científico, mas essa é uma questão ainda em constante debate e conscientização, como mostra um estudo em [1] sobre a participação dos gêneros na pesquisa científica nos últimos anos, identificando que muitas vezes esse aumento considerado como "positivo" mascara uma realidade que, na prática, as mulheres enfrentam problemas históricos, como a sub-representação e a falta de prestígio como cientistas.

[1]Professora do Departamento de Matemática e Estatística (DEMAT) da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), svbiehl@uepg.br

[2]Acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), arielindobad@gmail.com

[3]Acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), lailasturmer@uepg.br

[4]Acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), loaplu@gmail.com

Projetamos então esse "preconceito científico" para o ano de 1776, em Paris, onde nasce Marie Sophie Germain. Desde pequena, mostrava interesse por números, cálculos e área das exatas. Seu pai, um homem culto, tinha uma biblioteca em casa que continha obras de Newton, Euler e Arquimedes, e Sophie, decidida a se tornar matemática, leu tudo o que existia sobre esses temas na biblioteca.

Mesmo conseguindo as notas necessárias para entrar na Escola Politécnica de Paris, não pode ingressar pelo fato de ser mulher, mostrando o grande preconceito que dominava a época. Sophie começou então a utilizar o codinome Monsieur Le Blanc, para a publicação e o compartilhamento de seus trabalhos com pessoas importantes e influentes na época, como por exemplo Lagrange e Friederic Gauss, com os quais trocava correspondências acerca de seus estudos, produzindo importantes resultados como o "Último Teorema de Fermat".

Sua identidade foi descoberta por Gauss, em 1806, o qual continuou a ter grande admiração pelo seu trabalho e por tê-lo inspirado a voltar a estudar a teoria dos números. Ao longo de toda a sua vida, Germain teve grandes dificuldades em ter seu trabalho reconhecido, alguns sendo publicado apenas em 1821. Nos documentos que atestam seu óbito, vítima de um câncer de mama em 1931, em sua profissão aparece "rendatária" ao invés de matemática ou cientista.

Esse breve histórico da trajetória de Marie Sophie Germain mostra um exemplo típico do preconceito existente com relação ao trabalho feminino nos meios científicos de sua época, mas também é uma grande lição e motivação na luta pelo avanço profissional científico das mulheres nos dias atuais. Mais informações e curiosidades sobre a história e os trabalhos de Sophie podem ser encontradas em [2], [3].

Números Primos e Identificação de um Número Não-Primo

No decorrer de toda a história da Matemática, os números primos se apresentam como belos e desafiadores, motivando o desenvolvimento de teorias e algoritmos desde a época de Fermat, Euler e Gauss sendo campo de estudo até os dias atuais. Vamos apresentar a seguir, algumas propriedades básicas dos números primos e em seguida, um critério interessante, devido à matemática francesa Sophie Germain, que nos permite saber quando um número não é primo [4].

Temos então, a seguinte definição para *Números Primos e Compostos*: Um inteiro positivo $n \geq 2$ é dito *primo* se os únicos divisores que ele tem são 1 e ele próprio; caso contrario, é dito *composto*. O número 1 de modo geral não é considerado nem primo nem composto. Por exemplo, os números 2, 7 e 19 são primos e os números 10, 35 e 320 são compostos.

Numa caracterização mais formal, temos que um inteiro positivo p é primo se, e somente se, satisfaz a seguinte propriedade:

$$p|ab \Rightarrow p|a \text{ ou } p|b$$

onde $a, b \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que p é primo e que $p \nmid b$ (p não divide b), logo $(p, b) = 1$, ou seja, p e b são primos entre si e $p|a$.

Reciprocamente, suponhamos que a definição acima seja válida e além disso, vamos supor, pelo absurdo, que p não é primo. Então,

$$p = d_1 d_2, \text{ com} 1 < d_1 < p, \ 1 < d_2 < p.$$

Assim, segue que $p|d_1$ ou $p|d_2$, e consequentemente

$$p|d_1, \text{ ou } p|d_2,$$

contradizendo a afirmação $p = d_1 d_2$. Logo, p é primo.

Existem vários teoremas e estudos sobre os números primos, desde resultados tratados na matemática elementar, até conjecturas que não foram provadas. Um dos mais importantes no campo da Aritmética é o *Teorema Fundamental da Aritmética* (TFA), que afirma que "Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único, exceto pela ordem dos fatores, como um produto de números primos". Sua demonstração pode ser obtida, por exemplo, em [5].

A fim de uma simples ilustração podemos enunciar abaixo.

Exemplo. Verificar se o número $n = 2^{20} - 25^4$ é composto.

Solução: podemos escrever n de outra forma, com o objetivo de facilitar o desenvolvimento. Com efeito, observamos que

$$n = (2^{10})^2 - (25^2)^2 = 1024^2 - 625^2 = (1024 - 625)(1024 + 625)$$

logo, é composto, por ser diferença de quadrados. Além disso, podemos perceber que

$$n = (1024 - 625)(1024 + 625) = 399 \cdot 1649 = 3 \cdot 133 \cdot 1649,$$

ou seja, $3|n$, o que significa que 3 divide n, ou em outras palavras, n é múltiplo de 3.

Vejamos agora, um critério de identificação de um número não primo, devido à Sophie Germain.

Identidade de Sophie Germain Dados a,b $\in \mathbb{R}$, vale a igualdade

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab).$$

Proof. A prova segue das seguintes igualdades:

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2$$

$$= (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2$$

$$= (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab).$$

□

Algumas aplicações

Vejamos abaixo alguns exemplos de aplicações desta identidade.

Exemplo 1. $q_n = n^4 + 4^n$ é composto, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução: o conjunto dos números naturais é particionado em duas classes disjuntas: o conjunto dos números pares e o conjunto dos números ímpares. Estudaremos cada classe em separado. Assim,

- se n é um número par, então $n = 2m$ para algum inteiro positivo $m \geq 1$. Deste modo,

$$n^4 + 4^n = (2m)^4 + 4^{2m} = 16m^4 + 2^{4m},$$

$$= 2(8m^4 + 2^{4m-1}).$$

Portanto, neste caso, $n^4 + 4^n \geq 2$. Logo, se $n > 1$ é qualquer número inteiro positivo par temos que $n^4 + 4^n$ não é um número primo;

- se n é um número ímpar, então $n = 2m + 1$ para algum inteiro positivo $m \geq 1$. Assim,

$$n^4 + 4^n = (2m+1)^4 + 4^{2m+1} = (2m+1)^4 + 4 \cdot 4^{2m},$$
$$= (2m+1)^4 + 4 \cdot 2^{4m} = (2m+1)^4 + 4 \cdot (2m)^4.$$

  Logo, tomamos $a = 2m + 1$ e $b = 2^m$, o resultado é uma consequência direta da Identidade de Sophie Germain.

Exemplo 2. $5^{20} + 2^{30}$ é um número composto.

Solução: escrevemos

$$5^{20} + 2^{30} = 5^{5.4} + 2^2.2^{28} = (5^5)^4 + 4(2^7)^4,$$

de onde podemos usar a Identidade de Sophie Germain com $a = 5^5$ e $b = 2^7$ para comprovar que o número $5^{20} + 2^{30}$ é composto.

Também encontramos alguns usos diretos da identidade de Sophie Germain em questões de vestibulares como podemos ver abaixo.

Exemplo 3. Sophie Germain introduziu em seus cálculos matemáticos um tipo especial de número primo descrito abaixo. Se p é um número primo e se $2p + 1$ também é um número primo, então o número primo p é denominado primo de Germain. Pode-se afirmar que é primo de Germain o número:
a) 7
b) 17
c) 18
d) 19
e) 41

Solução: podemos descartar a letra (c) já que 18 não é um número primo, e então por verificação para os outros números fazendo $2p + 1$ para $p = 7, 17, 19$ e 41 vemos que a única solução correta é a letra (e).

Também encontramos a aplicação desta importante identidade matemática em questões envolvendo produtos notáveis e fatoração, como no exemplo abaixo:

Exemplo 4. Com os cubinhos que tem, Matheus construiu n cubos maiores idênticos utilizando $n \cdot n \cdot n$ cubinhos na construção de um deles e ainda sobraram 4 cubinhos. Se Matheus for repartir todos esses cubinhos em partes iguais entre seus amigos, uma quantidade de amigos para a qual é sempre possível fazer tal divisão pode ser:
a) $(n+2)^2 - 1$
b) $(n-2)^2 + 1$
c) $(n+1)^2 - 1$
d) $(n+1)^2 + 1$
e) $(n+2)^2 - 2$

Solução: cada cubo precisou de n^3 cubinhos, e ao total, foram gastos n^4 cubinhos na construção de n cubos. A partir daí, sai imediatamente com a identidade de Sophie Germain:

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2).$$

O fator da esquerda também pode ser escrito como $(n+1)^2 + 1$. Portanto, a solução é a letra (d).

Considerações Finais

A dedicação e persistência de Sophie Germain a tornou uma mulher precursora em algumas áreas científicas e atualmente ela é um grande exemplo da trajetória de mulheres que lutaram para conquistar seu espaço na ciência. Em particular, suas contribuições foram fundamentais para a Criptografia, que é uma forma de transmissão segura de dados e de informações sigilosas, necessária por exemplo, quando uma pessoa acessa sua conta bancária por meio de seu smartphone. Com a crescente utilização da rede mundial de computadores para transações, o uso da chamada Criptografia RSA (Rivest-Shamir-Adleman) impossibilita fatorar números grandes em fatores primos e contribui com mais segurança para que os canais de comunicação, visto que os dados se "embaralham" virtualmente.

Podemos concluir que Marie Sophie Germain foi uma matemática brilhante e pesquisadora da área das ciências exata, além de ser uma ilustração típica do preconceito existente na época com relação ao trabalho feminino nos meios científicos, sendo lembrada até hoje por sua trajetória e sua coragem de enfrentar uma sociedade opressora contra as mulheres. Assim, é fundamental a disseminação destas histórias bibliográficas e da conscientização sobre a importância do estímulo ao acesso de mulheres na área acadêmica e científica, a qual pode e deve começar desde a infância, sendo uma peça chave para enfrentar os desafios de representação e participação das mulheres na ciência.

Referências

[1] SILVA, F. F. e RIBEIRO, P. R. C. *Trajetórias de mulheres na ciência: "ser cientista" e "ser mulher"*. Ciência & Educação (Bauru), 20(2), 449-466, 2014.

[2] GRISTEIN L. S. *Women of Mathematics: A biobibliographic sourcebook*. Greenwood Pub Group, 1987.

[3] HALL N., JONES M. and JONES G. *A Vida e o Trabalho de Sophie Germain*. Gazeta de Matemática. Nº 146. Janeiro de 2004.

[4] OLIVEIRA, K. I. M. e FERNÁNDEZ, A. J. C. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[5] HEFEZ, A. *Elementos da Aritmética*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

Projeto POTI na UEPG: contribuição social e acadêmica

Scheila Valechenski Biehl [1] Elisangela dos Santos Meza [2]

svbiehl@uepg.br, elisangelameza@gmail.com

Resumo: O POTI é um Polo Olímpico de Treinamento Intensivo destinado para alunos que desejam participar de Olimpíadas de Matemática e consiste de uma atividade do programa de extensão “Olimpíadas de Matemática: promovendo a inclusão social e ajudando a mudar o cenário da educação”, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, com intuito de oferecer treinamento para as olimpíadas de matemática, em particular para Olimpíada Pontagrossense de Matemática (OPMAT). Neste artigo, fazemos um relato das ações desenvolvidas no projeto POTI bem como destacamos sua importância no âmbito social e acadêmico.

Introdução

A realização de competições como as olimpíadas de matemática é um projeto de inclusão social contemplado pelas políticas educacionais que procura estimular o estudo da matemática nos mais diversos níveis sociais e econômicos, a fim de garantir o direito a uma educação de qualidade a todos os cidadãos (AVALIAÇÃO DO IMPACTO DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA NAS ESCOLAS PÚBLICAS ? OBMEP 2010). Visa despertar o interesse e a motivação pelo estudo da ciência matemática, fazendo uso da investigação matemática e da resolução de problemas para a construção do conhecimento e para o desenvolvimento do raciocínio lógico, crítico e abstrato, contribuindo para a melhoria do desempenho dos estudantes dentro do ambiente escolar.

Druck (2005) afirma que ?talvez uma das maiores contribuições das olimpíadas tenha sido apresentar uma visão mais ampla e atraente do que seja aprender e ensinar

[1] Professora do Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Ponta Grossa
[2] Professora do Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Ponta Grossa

matemática, propiciando às escolas um ambiente efervescente para a mobilização de alunos e professores em torno da Matemática?. Considerando esse contexto, uma das ações desenvolvidas dentro do projeto de extensão da OPMat foi a implementação do POTI, oferecendo aulas gratuitas para alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, de escolas públicas e particulares, visando a participação nas olimpíadas de matemática a nível municipal e nacional.

Objetivos

A presente ação extensionista visa oferecer treinamentos específicos para as olimpíadas de matemática, envolvendo os participantes no conhecimento dos principais ramos da matemática e na identificação de como estes ramos são frequentemente abordados nas olimpíadas. Além disso, promove a integração entre universidade e escolas públicas e privadas, professores e alunos, contribuindo para a melhoria da aprendizagem da matemática.

Metodologia

O polo do POTI na Universidade Estadual de Ponta Grossa foi implementado em 2014, estando portanto em sua sexta edição. Atualmente, o projeto é aberto para todos os alunos interessados, de escolas públicas e particulares, sendo o público alvo classificado nos seguintes níveis

- Nível 1: 6º e 7º anos do Ensino Fundamental;
- Nível 2: 8º e 9º anos do Ensino Fundamental;
- Nível 3: 1º e 2º anos do Ensino Médio;
- Nível 4: 3º ano do Ensino Médio;

Os treinamentos abrangem quatro grandes eixos temáticos da matemática: Álgebra, Geometria, Teoria dos Números e Combinatória. As tabelas abaixo apresentam resumidamente os principais temas que podem ser abordados para o Ensino Fundamental e Médio.

Grandes Eixos - Ensino Fundamental			
Álgebra	**Combinatória**	**Geometria**	**Teoria dos Números**
Produtos Notáveis	Lógica	Congruência	Divisibilidade
Equações e Sistemas	Paridade	Semelhança	Divisores
Indução	Contagens	Quadriláteros	Algoritmo de Euclides
Sequências	Jogos	Relações Métricas	Congruências I e II
Recorrência	Tabuleiros	Relações entre Áreas	Equações Diofantinas I e II
Máximos e Mínimos	PCP[3]	Pontos Notáveis	Teorema Chinês
Funções	Invariantes	Teorema de Ptolomeu	Função Parte Inteira
Polinômios		Circunferências	Ordem

Grandes Eixos - Ensino Médio			
Álgebra	**Combinatória**	**Geometria**	**Teoria dos Números**
Desigualdades	Contagens	Quadriláteros cíclicos	Divisibilidade
Funções Implícitas	Bijeções	Quadriláteros circunscritíveis	Indução
Números Complexos	Recursões	Pontos Notáveis	Teorema Fund. da Aritmética
Raízes de Polinômios	PCP	Relações entre Áreas	Congruências
Somas de Newton	Inclusão-Exclusão	Relações Métricas	Equações Diofantinas
Irredutibilidade	Grafos	Teorema de Ceva	Frações contínuas
Sequências	Princípio Extremo	Teorema de Menelaus	Equações de Pell
	Probabilidades		Funções Multiplicativas

Na abertura das inscrições para o POTI as escolas são comunicadas via email, no início do ano, a qual deve ser feita no próprio site do programa (www.poti.impa.br), sem exigências ou seleção. O treinamento consiste em encontros semanais presenciais, no Campus Uvaranas da UEPG, totalizando 16h/mês, abrangendo os temas dos quatro grandes eixos da matemática, ministrados por professores e acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da UEPG.

Esses treinamentos específicos auxiliam no desenvolvimento e formação matemática dos alunos que querem aprofundar seus conhecimentos e descobrir como a matemática pode ajudar a resolver problemas desafiadores. Conforme relata Dante (1988), ?a resolução de um problema exige uma certa dose de iniciativa e criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias?. Em geral, as questões de olimpíadas exigem esses requisitos, sendo fundamental muitas vezes, unir o raciocínio lógico com o embasamento teórico.

Na área de Teoria dos Números, por exemplo, conceitos sobre divisibilidade e congruências podem auxiliar na resolução de muitos problemas que envolvem análise de restos, questões envolvendo problemas de calendário e até mesmo criptografia. A seguir é feita uma análise sobre o tema análise de restos.

Exemplo 1 (OPMat 2016/ Nível 2) - Qual o resto da divisão de 20.142.015 por 7?

A essência da ideia de congruência é trabalhar com os restos das divisões de problemas que relacionam divisões ou potenciações, visto que esses restos são números menores e é de se esperar que isso simplifique a resolução dos problemas. Na notação matemática $a \equiv b(mod\, m)$, com a, b e m inteiros ($m > 0$), dizemos que "a é congruente a b módulo m", o que significa que a e b deixam o mesmo resto quando divididos por m. Por exemplo, $18 \equiv 14(mod\, 4)$ pois o resto da divisão de ambos os números 18 e 14 por 4 é 2. Assim, na potência 2014^{2015} são consideradas as potências do número 4 para então concluir sobre a potência 4^{2015}. Com os treinamentos sobre congruências, o aluno percebe que as potências de 4 tem um ciclo de repetições dos restos 4,2,1 para os expoentes 1,2,3, depois 4,2,1 para os expoentes 4,5,6, e assim basta ver quantas vezes esse ciclo "se repete" com o número 2015, fazendo 2015/3=671 com resto 2, ou seja, esse resto corresponde à segunda posição no ciclo dos restos na divisão por 7, concluindo então que o resto da divisão de 2014^{2015} por 7 é 2.

	resto na divisão por 7	expoente	notação
$4^1 = 4$	4	1	$4^1 \equiv 4(mod\, 7)$
$4^2 = 16$	2	2	$4^2 \equiv 4^2(mod\, 7)$
$4^3 = 64$	1	3	$4^3 \equiv 4^3(mod\, 7)$
$4^4 = 256$	4	4	$4^4 \equiv 4(mod\, 7)$
$4^5 = 1024$	2	5	$4^5 \equiv 4^2(mod\, 7)$
$4^6 = 4096$	1	6	$4^6 \equiv 4^3(mod\, 7)$

Outro exemplo que podemos citar é o uso do conceito de mínimo múltiplo comum para resolução da seguinte questão:

Exemplo 2 (OPMat 2016/ Nível 2) - João e Paulo são dois caminhoneiros. João almoça no restaurante Boa Viagem a cada 3 dias e Paulo almoça no mesmo restaurante a cada 4 dias. Numa certa segunda-feira João e Pedro almoçaram no Boa Viagem. Passados alguns dias, seguindo a mesma rotina de sempre, almoçaram de novo no mesmo dia no Boa Viagem. Em que dia da semana isso aconteceu?

Essa questão pode ser resolvida com raciocínio lógico, elaborando alguma estratégia de resolução como por exemplo a apresentada na tabela abaixo, e concluindo que João e Pedro almoçaram novamente num sábado.

S	T	Q	Q	S	S	D	S	T	Q	Q	S	S	D
João	x		x			x			x			x	
Pedro	x			x				x				x	

Com os treinamentos o aluno é capaz de identificar que os dados do problema se referem ao conceito de mínimo múltiplo comum entre 3 e 4, ou seja, MMC(3,4)=12 e com relação aos dias da semana, iniciando na segunda, 12 dias depois cai num sábado. Essa concepção pode ser mais útil e melhor aproveitada quando o problema for muito extenso, sendo de natural importância compreender a existência do raciocínio lógico embutido na estratégia de solução direta.

Considerações Finais

Além de possibilitar a descoberta de novos talentos, as competições de olimpíadas propiciam um ambiente onde os alunos podem colocar em prática sua criatividade, desenvolver suas habilidades lógica e abstrata sem ficar totalmente presos a fórmulas fechadas, estimulando um interesse cada vez maior pelo estudo da matemática.

Com os treinamentos realizados no POTI, o estudo dos conteúdos específicos dos eixos temáticos e a resolução de problemas olímpicos, o aluno aprende a reconhecer e a identificar a forma com que as questões são apresentadas nas competições e, gradualmente, se torna capaz de elaborar suas estratégias de resolução e ter sucesso nas competições.

Acreditamos estar realizando uma importante atividade na área da educação, procurando fazer com que a ciência matemática torne-se atrativa para os alunos, estimulando-os a participarem de competições como as olimpíadas, melhorando seu rendimento escolar como um todo e contribuindo para uma maior inclusão social.

Agradecimentos e Convite de Participação

Agradecemos em especial a todos os professores e monitores que participaram do projeto POTI na UEPG desde a sua primeira edição, pois sem seus esforços e dedicação essa importante atividade foi implementada e continua sendo realizada.

Aproveitamos para convidá-lo, caro leitor, a se juntar ao nosso projeto POTI em 2020!

Referências

[1] AVALIAÇÃO DO IMPACTO DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA NAS ESCOLAS PÚBLICAS - OBMEP 2010. Cen-

tro de Gestão e Estudos Estratégicos (CGEE). Disponível em: www.cgee.org.br/atividades/redirect/725.

[2] DANTE, L. R. *Criatividade e resolução de problemas na prática educativa matemática*. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Tese de Livre Docência, 1988.

[3] DRUCK, S. *Entrevista a Manoel Alves Filho*. Jornal da Unicamp, 17 a 24 de fevereiro de 2005, 6-7.

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Entrevistas

Nas duas entrevistas a seguir, os professores doutores *Marli Terezinha Van Kan* e *Giuliano Gadioli La Guardia*, coordenadores dos cursos de Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Matemática Aplicada, respectivamente, da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), conversam sobre as particularidades de cada curso.

Entrevista com a coordenadora Profª Marli Terezinha Van Kan

1. **Você poderia fazer uma breve apresentação da sua formação acadêmica?**
   Iniciei o curso de Licenciatura em Ciências -Habilitação em Matemática na UEPG no ano de 1981 com término em 1984. Em 1994 conclui uma Especialização sob o título "Fundamentos para o Ensino da Matemática". Em 2008, concluí o mestrado em Ciências - Física e em 2013, o doutorado em Ciências - Física, todos pela UEPG. Estou na coordenação do curso de graduação Licenciatura em Matemática desde o ano de 2014 até os dias de hoje.

2. **Como é o funcionamento do curso? Período, tempo mínimo, máximo, turno.**
   Para completar o currículo pleno do curso superior de graduação em Licenciatura em Matemática, o acadêmico deverá totalizar 3200 horas distribuídas em, no mínimo, 4 anos e, no máximo, 06 anos letivos no turno noturno.

3. **Que tipos de disciplinas aparecem no currículo do curso?**
   O curso é constituído por disciplinas de Formação Básica Geral, como Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Álgebra e Geometria, bem como disciplinas de Formação Específica Profissional, por disciplinas de Prática como Componente Curricular, ou seja, conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise, além do Estágio Curricular Supervisionado e de disciplinas de Diversificação ou Aprofundamento.

4. **Existem algum tipo de requisito para um(a) candidato(a) que pretende cursar Licenciatura em Matemática? Qual(ais)?**
   Para cursar Licenciatura em Matemática não é necessário pré-requisitos, mas em geral observa-se uma maior afinidade com a área de exatas, aptidão para ciências exatas, interesse para adquirir conhecimentos relativos à matemática, raciocínio abstrato, capacidade para resolver problemas, e desenvolvimento de aptidão para a docência nos candidatos que ingressam no curso.

5. **O que um estudante que presta vestibular para Licenciatura em Matemática pode almejar para seu futuro profissional?** O curso de Licenciatura em

Matemática da UEPG destina-se na formação do docente para atuar na Educação Básica, bem como no ensino superior se o licenciado em matemática der continuidade em sua formação por meio de cursos de Pós-Graduação. Também poderá atuar em instituições privadas com sua bagagem do conhecimento teórico matemático ou do ensino em matemática.

6. **Pessoas tímidas podem cursar e serem bem sucedidas no curso de Licenciatura?**
   Sim, não vejo problema. O curso oferece condições para que o aluno consiga superar e/ou trabalhar com suas limitações pessoais.

7. **Quais dicas você daria para um(a) interessado(a) em cursar Licenciatura em Matemática?**
   Para os candidatos que gostam da matemática e que têm facilidade com os números sugere-se estudar bem a teoria do conteúdo básico, encontrar formas alternativas de resolver os exercícios, procurar desenvolver o raciocínio lógico, fazer anotações para melhor entendimento do conteúdo, compreender e interpretar o enunciado das questões de matemática, enfim, organizar um roteiro de estudos e dedicar-se a matemática.

8. **O curso habilita a lecionar em quais níveis de ensino básico?**
   O curso habilita o licenciado a trabalhar nos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio.

9. **O curso habilita para lecionar no ensino superior?**
   O curso habilita o licenciado a trabalhar no ensino superior público, em cargos efetivos desde que tenha feito um curso de Pós-graduação e concorra a uma vaga por meio de Concurso Público de Provas e Títulos para Provimento de Cargo de Docente, ou em cargos de professores colaboradores por meio de testes seletivos que algumas vezes podem ser prestados logo após a conclusão da graduação.

10. **É possível continuar estudando em programas de pós-graduação? A UEPG oferece programas na área? Quais?**
    O licenciado em matemática pode continuar a vida acadêmica por meio de cursos de Pós-Graduação. A UEPG oferece em Matemática, o PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, com áreas como Análise Matemática, Ensino de Matemática, Geometria e Matemática Aplicada. Na área de ensino, o Mestrado em Ciências e Educação Matemática, com foco

no Ensino de Ciências e Formação de Professores, e também, o Mestrado em Ciências - Física.

11. **Onde é possível obter mais informações sobre o curso de Licenciatura em Matemática da UEPG?**
É possível obter mais informações sobre o curso de Licenciatura em Matemática por meio de materiais de divulgação dos cursos da UEPG, sendo a PROGRAD Pró-Reitoria de Graduação, a responsável. O catálogo do curso se encontra em `www.uepg.br/catalogo/cursos/2019/matematica.pdf`

Entrevista com o coordenador Prof° Giuliano Gadioli La Guardia

1. **Você poderia fazer uma breve apresentação da sua formação acadêmica?**
Com relação à minha formação acadêmica, possuo graduação (bacharelado) em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (1994), mestrado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (1998) e doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas (2008).

2. **Como é o funcionamento do curso? Período, tempo mínimo, máximo e turno, etc.**
O curso é de regime integral, com carga horária total de 2750 horas. A duração mínima é de 4 anos e a duração máxima é de 6 anos. São oferecidas 30 vagas: 11 para o vestibular de inverno, 11 para o vestibular de Verão, e 8 para o Processo Seletivo Seriado (PSS). As condições para ingresso são mediante concurso vestibular, PSS e transferência.

3. **Que tipos de disciplinas aparecem no currículo do curso?**
O curso possui 17 (dezessete) disciplinas de Formação Básica Geral, totalizando 1258 (um mil, duzentos e cinquenta e oito) horas, 13 (treze) disciplinas de Formação Específica Profissional, com 1088 (um mil e oitenta e oito) horas, e disciplinas de Diversificação ou Aprofundamento, com 204 (duzentos e quatro) horas.

4. **Existe algum tipo de requisito para um(a) candidato(a) que pretende cursar Bacharelado em Matemática Aplicada? Qual(ais)?** Como de costume, qualquer aluno que tenha cursado o ensino fundamental e o ensino médio pode ingressar no curso por meio de uma das condições para ingresso elencadas na resposta da pergunta 2. Naturalmente observa-se nos ingressantes uma maior afinidade com a área de exatas, mas isso não é necessariamente um requisito.

5. **O que um estudante que presta vestibular para Bacharelado em Matemática Aplicada pode almejar para seu futuro profissional?**
   Ao profissional da Matemática Aplicada pretende-se dar uma formação para que ele possa:

   - abordar problemas práticos, oriundos da observação empírica e da tecnologia, mentalidade esta essencial para a construção e validação empírica de modelos matemáticos que descrevam fenômenos reais;
   - tratar de problemas tecnológicos e problemas oriundos de outras áreas das ciências, puras ou aplicadas, contribuindo, portanto, para promover a inovação científica e tecnológica no cenário brasileiro;
   - integrar o uso de metodologias e ideias de diversas áreas da matemática, utilizar ferramentas estatísticas e computacionais avançadas, tornando-se capaz de abordar problemas reais oriundos da experimentação, da tecnologia ou de outras ciências;
   - desenvolver a capacidade de explorar e analisar dados obtidos através da experimentação ou observação empírica e utilizá-los para a inferência de parâmetros e verificação de modelos, bem como para a construção heurística, simulação computacional e calibração dos mesmos;
   - propor métodos originais, além de empregar aqueles já existentes, para solucionar problemas concretos advindos da própria Matemática ou de outras ciências, puras ou aplicadas, que possuam forte interface com a Matemática.

   Devido a todas essas competências descritas, o bacharel em Matemática Aplicada é qualificado para desenvolver pesquisas científicas em Matemática, atuar no ensino superior, atuar no mercado de trabalho fora do ambiente acadêmico ou cursar pós-graduação. Assim, esse profissional deverá ter uma sólida formação matemática e capacidade de perceber o mundo de forma crítica e ser capaz de ajudar a transformá-lo.

6. **Quais dicas você daria para um(a) interessado(a) em cursar Bacharelado em Matemática?**
   O bacharel em Matemática Aplicada deve gostar de desafios, ser persistente, deve gostar de solucionar problemas (relacionados ou não com a realidade). O candidato deve sempre estar disposto a propor novas situações-problema bem

como tentar resolvê-las. Acredito que o candidato deva se esforçar constantemente e ter um ritmo de estudo diário, que permita com que ele absorva maior quantidade de informação e consiga, de fato, consubstanciá-lo em sua mente.

7. **Quais as perspectivas de área de atuação no mercado de trabalho para o Bacharel?**
   O graduado no curso de Bacharelado poderá trabalhar em empresas que realizem pesquisa, desenvolvimento e inovação nos setores de informática, telecomunicações, setor energético, aeroespacial ou mecânico. Também poderá fazer parte de equipes responsáveis pela modelagem e simulação numérica de processos nas fases de projeto, produção ou gestão de novas tecnologias ou serviços, na análise do comportamento e gestão de sistemas de alta complexidade, etc. Este profissional poderá atuar também em bancos, companhias de seguros, bolsas de valores e no mercado financeiro, em atividades envolvendo interpretação estatística de dados, simulação e modelagem de situações e fenômenos de alta complexidade. Poderá atuar também em empresas públicas ou privadas de prestação de serviços, órgãos governamentais, empresas que produzem softwares dedicados à modelagem e à simulação de sistemas, etc. Além disso, pode aprofundar seus estudos no nível de pós-graduação (mestrado e doutorado), para atuar em Pesquisa, Desenvolvimento e Inovação.

8. **Quais as principais diferenças entre os cursos de Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Matemática Aplicada?**
   O enfoque das disciplinas da Licenciatura são totalmente diferentes quando compara-se os dois cursos, pois o primeiro curso forma profissionais habilitados principalmente para ministrar aulas de ensino médio e fundamental, e o segundo curso forma profissionais para atuarem nos diversos campos de trabalho elencados na resposta à pergunta 7.

9. **O curso habilita para lecionar no Ensino Básico ou Superior?**
   Como foi mencionado na resposta à pergunta nº 5, o bacharel em Matemática Aplicada pode lecionar no ensino superior. Entretanto, esse profissional não pode lecionar no ensino básico ou médio.

10. **Onde é possível obter mais detalhes ou informações sobre o curso?**
    Maiores informações ou detalhes são encontrados por meio de materiais de divulgação dos cursos da UEPG. O catálogo do curso se encontra em
    `www.uepg.br/catalogo/cursos/2019/Bach_matem_aplicada.pdf`

Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Curiosidades

European Girls' Mathematical Olympiad

Você sabia que existe uma olimpíada internacional de Matemática somente para meninas? Estamos falando da Olimpíada Matemática de Meninas Europeias (EGMO), que reúne meninas do mundo inteiro que se interessem pela Matemática, criando um espaço de convivência e troca de experiências através de culturas diferentes, mas um gosto em comum, e incentivando a participação de garotas na ciência. A 8ª EGMO (2019) aconteceu em Kiev, na Ucrânia, de 07 a 13 de abril. Cada país participante envia uma equipe composta por quatro estudantes em idade escolar. Quem representou o Brasil na edição de 2019 foram: Ana Beatriz Studart (CE), Bruna Nakamuda (SP), Maria Clara de Lacerda (RJ) e Mariana Groff (RS), todas estudantes do Ensino Médio. A participação foi financiada com recursos da SBM e do IMPA.

A equipe brasileira trouxe para casa uma medalha de ouro, conquistada por Mariana Groff e duas de bronze, conquistadas por Ana Beatriz e Maria Clara. Além disso, o Brasil conquistou o 20º lugar no quadro geral de países. A próxima edição do EGMO acontecerá na Holanda, e o Brasil já está organizando um torneio para seleção das participantes. Saiba mais em: http://www.egmo2019.org/

Dica de filme: O Homem que Viu o Infinito

A história do matemático indiano Srinivasa Ramanujan (1887-1920) foi eternizada no filme *O Homem que Viu o Infinito*, lançado em 1991 com direção de Matt Brown. O filme apresenta as dificuldades de adaptação do jovem Ramanujan, considerado um gênio. Pobre e natural de Madras, Índia, órfão de pai e sem educação formal, o matemático luta pelo sustento da esposa e da mãe. Um de seus empregos foi em um escritório dadas suas ótimas habilidades em realizar cálculos, e foi nesse trabalho que ele começou a trocar correspondência com G.H. Hardy, um renomado matemático do Trinity College . Ramanujan é convidado a ir para Trinity por Hardy, e lá se choca com algumas dificuldades de adaptação, como o clima frio, a alimentação pesada, pois era vegano, o uso de calçados, pois só usava sandálias, além de ser vítima de atitudes racistas de professores e colegas.

A obra mostra ainda a relação de Ramanujan, que acredita na relação com o divino, inclusive dizendo que recebia mentalmente fórmulas matemáticas, e seu orientador, Hardy, ateu e empenhado em ensinar os procedimentos acadêmicos formais e os métodos de comprovar suas teorias. Até hoje os trabalhos de Ramanujan vem sendo estudados e aplicados, desde o desenvolvimento de computadores até o estudo de buracos negros. O filme está disponível na Netflix e também na plataforma YouTube.

Você conhece a premiação: Medalha Fields?

A Medalha Fields é popularmente conhecida como o "Nobel da Matemática", trata-se de um prêmio quadrienal para matemáticos com no máximo 40 anos, que tenham feito grandes contribuições para este campo da ciência. São premiados de dois a quatro matemáticos por edição. Os vencedores da MF são escolhidos por um comitê selecionado pela União Internacional de Matemática e recebem uma medalha, esculpida em ouro e mais um montante de aproximadamente R$ 43 mil. O nome da premiação é em homenagem a John Charles Fields, matemático que idealizou e ajudou no financiamento das primeiras edições.

As primeiras medalhas foram entregues em 1936, mas só a partir de 1950 vem sendo entregues a cada quatro anos. Em 2014 um dos premiados foi a matemática iraniana Maryam Mirzakhani, sendo a primeira mulher a receber o prêmio. Nesse mesmo ano, foi premiado Artur Avila, o primeiro brasileiro a receber a medalha. Avila conquistou em 1995 a medalha de ouro na Olimpíada Internacional de Matemática, depois de algumas tentativas frustradas, e com 26 anos, provou junto à matemática Svetlana Jitomirskaya a "Conjectura dos dez martinis", proposta pelo físico matemático Barry Simon, e que permanecia aberta desde 1980.

Os números 6174 e 495

Que tal brincar com os números? Escolha um número composto de quatro dígitos, com pelo menos dois dígitos diferentes, por exemplo, 1234. Em seguida subtraia sua forma decrescente (4321) da sua forma crescente (1234): $4321 - 1234 = 3087$. Em seguida repita os mesmos passos até chegar em 6174. ($8532 - 2358 = 6174$).

Observe que agora não precisamos mais continuar, pois teremos a repetição da mesma operação. Assim, não importa qual número iniciamos, sempre chegaremos em 6174. Isto é conhecido como a *Constante Kaprekar*, leva esse nome em homenagem a Dattatreya Ramchandra Kaprekar (1905-1986), um amante da Teoria dos Números. Apesar de alguns matemáticos considerarem as brincadeiras com números triviais, outros acham as ideias intrigantes, e se divertem com Kaprekar. Yutaka Nishiyama, um matemático japonês, usou um computador para encontrar o número máximo de passos até chegar no número 6174, descobrindo que caso ultrapasse sete passos, há algum erro nos cálculos anteriores.

Algo semelhante acontece com números de três algarismos, por exemplo: 968. Note que $986 - 689 = 297$; $972 - 279 = 693$; $963 - 369 = 594$ e $954 - 459 = 495$. Nesse caso, as repetições indicariam o número 495.

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Problemas Propostos

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos. As melhores soluções serão publicadas na próxima edição e os autores receberão certificação de congratulação e um exemplar da mesma (Veja "Informações Gerais").

1. Em cada quadradinho de um tabuleiro 3×3 é colocado um dos números -1, 0 ou 1. Prove que entre todas as somas das linhas, colunas e diagonais do tabuleiro há duas que são iguais. Por exemplo, no tabuleiro abaixo a soma da segunda linha é 2, que coincide com a soma da terceira coluna:

-1	-1	1
1	0	1
0	-1	0

2. No triângulo isósceles ABC tem-se $AB = AC$. Os pontos M, N e P dos lados AB, BC e CA são tais que $PM = PN$. Sendo $\angle PMA = \alpha$, $\angle NPC = \beta$ e $\angle MNB = \theta$ mostre que
$$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

3. O número $1\underbrace{000\ldots00}_{2006 \text{ zeros}}1$ é composto? Argumente.

4. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}^*$ tal que
$$f(x+y) \cdot f(x-y) = [f(x) \cdot f(y)]^2 \text{ e } f(1) \neq 1.$$
Prove que, para todo $x \in \mathbb{Z}$,
$$\log_{f(1)} f(x)$$
é um quadrado perfeito.

5. Encontre todos os números palíndromos de cinco algarismos que são quadrados de números palíndromos (Observação: um número é dito *palíndromo* quando lido da esquerda para a direita e da direita para a esquerda resultado no mesmo número: por exemplo, 16761 é palíndromo de cinco algarismos, e 2332 é um palíndromo de quatro algarismos).

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Informações Gerais

Envio de Artigos e Soluções

Os **Artigos** podem ser submetidos nas próximas edições da Revista da OPMat. Os documentos devem ser, preferencialmente, redigidos em LaTeX. As **Soluções** para os desafios encontrados na seção "Problemas Propostos" devem ser claras e submetidas juntamente com o nome do participante e o número da respectiva questão.

As submissões de artigos e soluções podem ser feitas pelo e-mail:

revistaopmat@gmail.com.

Como Adquirir a Revista

Todos os alunos premiados com medalhas da VII OPMat (2019) receberão uma cópia física da Revista. A versão eletrônica será disponibilizada em link próprio divulgado nas redes sociais da Olimpíada Pontagrossense de Matemática.

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, apresentar sugestões ou fazer correções através dos contatos:

Comitê Editorial
revistaopmat@gmail.com

Olímpiada Pontagrossense de Matemática
olimpgmat@gmail.com - *(42) 3220-3048*
facebook.com/olimpiada.pontagrossensedematematica

Departamento de Matemática e Estatística da
Universidade Estadual de Ponta Grossa
Campus Uvaranas - Bloco L - Uvaranas
Avenida General Carlos Cavalcanti, 4748
Ponta Grossa - Paraná - CEP 84030-000
demat@uepg.br - *(42) 3220-3050*

Realização:

UEPG Universidade Estadual de Ponta Grossa

proex PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO E ASSUNTOS CULTURAIS

DEMAT Departamento de Matemática e Estatística

Apoio:

Olimpíada Brasileira de Matemática

impa

Informações:

Site: https://opmat.apps.uepg.br/ E-mail: olimpgmat@gmail.com
www.facebook.com/olimpiada.pontagrossensedematematica
Fones: 99831-1222 / 3220-3048