2
2020

Revista OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática
UEPG

"Promovendo a inclusão social e ajudando a mudar o cenário da educação."

Universidade Estadual de Ponta Grossa,
Setor de Ciências Exatas e Naturais
Departamento de Matemática e Estatística

Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

v.2 (2020)

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Reitor: Miguel Sanches Neto
Vice-Reitor: Everson Augusto Krum

PRÓ-REITORIA DE ASSUNTOS ADMINISTRATIVOS - PROAD

Pró-Reitor: Ivo Mottin Demiate

PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO - PROEX

Pró-Reitora: Edina Schimanski

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO - PROGRAD

Pró-Reitor: Carlos Willians Jaques Morais

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Chefe: Deyse Márcia Pacheco Gebert
Chefe Adjunto: Fabiano Manoel de Andrade

Apoio:

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA - IMPA

CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática/ Universidade Estadual de Ponta Grossa. Departamento de Matemática e Estatística. v.1 (2019). Ponta Grossa: UEPG/ DEMAT, 2019.

Anual
v.2, 2020

1. Matemática – competições. 2. Matemática – questões problemas. 3. Matemática – exercícios. I. Universidade Estadual de Ponta Grossa. II. Departamento de Matemática e Estatística. III. T.

CDD: 510

Ficha Catalográfica elaborada por Maria Luzia Fernandes Bertholino dos Santos – CRB9/986

Comissão da Olimpíada Pontagrossense de Matemática: Elisangela dos Santos Meza, José Trobia, Marcos Teixeira Alves e Scheila Valechenski Biehl

Coordenadora da OPMat: Elisangela dos Santos Meza

Coordenador da Revista da OPMat: Marcos Teixeira Alves

Supervisores da edição da Revista da OPMat: Marcos Teixeira Alves e Scheila Valechenski Biehl

Comitê Editorial da Revista:
Anderson Luís Soares de Lima
Daniel Silveira Salamucha
Elisangela dos Santos Meza
Gabriel da Silva Lima
Karine Moreira dos Santos
Keyti Alyne Francisco de Souza
Marcos Teixeira Alves
Núbia Aline Lutke
Rodrigo Santiago Biasio
Scheila Valechenski Biehl

Editoração Eletrônica:
Anderson Luís Soares de Lima
Daniel Silveira Salamucha
Elisangela dos Santos Meza
Gabriel da Silva Lima
Karine Moreira dos Santos
Keyti Alyne Francisco de Souza
Marcos Teixeira Alves
Núbia Aline Lutke
Rodrigo Santiago Biasio
Scheila Valechenski Biehl

Arte da Capa:
CCOM - Coordenadoria de Comunicação

Postagem:
Segundo semestre de 2020

Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática v.2 (2020)

Sumário

Apresentação

Caro Leitor,

A *Revista da Olímpiada Pontagrossense de Matemática* é resultado do projeto de extensão: *Olímpiadas de Matemática: Promovendo a Inclusão Social e ajudando a mudar o cenário da Educação*, desenvolvido pelo Departamento de Matemática e Estatística da UEPG. Tem periodicidade anual, sendo este o seu 2° volume.

O principal objetivo da Revista é compor um material robusto em conteúdos matemáticos com vista a ser utilizado como recurso pedagógico ao letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e como fonte de estudo e treinamento para olimpíadas de matemática.

Encorajamos todos os leitores a nos enviar soluções para os desafios encontrados na seção "Problemas Propostos", bem como submeter artigos, que serão publicados na próxima edição, desde que sejam aprovados pelo Comitê Editorial da Revista.

Para ficar por dentro das notícias da Olimpíada Pontagrossense de Matemática; próximas edições, fotos e resultados, acompanhe-nos pela nossa rede social:

`facebook.com/olimpiada.pontagrossensedematematica`

e pela homepage:

`www2.uepg.br/opmat/revista-da-opmat/`

Ponta Grossa, 10 de dezembro de 2020.

Comitê Editorial

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

8ª OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

"Promovendo a inclusão social e ajudando a mudar o cenário da educação."

Premiados

A Cerimônia de Premiação da *7ª Olimpíada Pontagrossense de Matemática* ocorreu no dia 07 de dezembro de 2019, no Cine Teatro Pax, em dois horários distintos: às 09h30 para os alunos do Nível **Júnior** (5º ano do Ensino Fundamental I) e às 14h30 para os alunos dos Níveis **1** (6º e 7º anos do Ensino Fundamental II), **2** (8º e 9º anos do Ensino Fundamental II), **3** (1ª e 2ª séries do Ensino Médio) e **4** (3ª e 4ª séries do Ensino Médio e aqueles estudantes que tenham concluído Ensino Médio há menos de um ano e não tenham ingressado em nenhum curso superior, quando da realização da primeira fase da OPMat).

No período da manhã, a Cerimônia de Premiação contou com a presença das seguintes autoridades:

- Profa Cristina Berger Fadel representando a reitoria e a Pró-Reitora de Extensão e Assuntos Culturais da UEPG
- Profa Sandra Mara Dias Pedroso representando o Núcleo Regional da Educação de Ponta Grossa
- Profa Annaly Schewtschik representando a Secretaria Municipal de Educação de Ponta Grossa
- Prof. Luiz Alexandre Gonçalves Cunha - Diretor do Setor de Ciências Exatas e Naturais da UEPG
- Profa Deyse Marcia Pacheco Gebert - Chefe Adjunta do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG
- Profa Scheila Valechenski Biehl - Vice-Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPG
- Prof. Giuliano Gadioli La Guardia - Coordenador do Curso de Bacharelado em Matemática Aplicada da UEPG
- Profa Elisangela dos Santos Meza - Coordenadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Nessa Cerimônia foram premiados 147 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 15,64% dos alunos que participaram do Nível Júnior da 7ª OPMat): 2 alunos com troféus; 5 com medalhas de ouro; 10 com medalhas de prata; 54 com medalhas de bronze e 78 com medalhas de menção honrosa.

Também foram entregues troféus para as escolas e para os professores dos alunos que obtiveram a maior pontuação na 7ª OPMat da rede particular e da rede pública. Todos os professores cujos alunos foram premiados receberam certificados de congratulações, assim como todas as escolas participantes da 7ª OPMat.

No período da tarde, a Cerimônia de Premiação contou com a presença das seguintes autoridades:

- Prof. Miguel Sanches Neto - Reitor da Universidade Estadual de Ponta Grossa
- Profa Sandra Mara Dias Pedroso representando o Núcleo Regional da Educação de Ponta Grossa
- Prof. Antonio José Camargo - Diretor Adjunto do Setor de Ciências Exatas e Naturais da UEPG
- Profa Margarete Aparecida dos Santos - Chefe do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG
- Profa Marli Terezinha Van Kan - Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPG
- Prof. José Tadeu Teles Lunardi - Vice-Coordenador do Curso de Bacharelado em Matemática Aplicada da UEPG
- Prof. José Luis Domingues Ribas representando do colegiado do curso de Licenciatura em Matemática EAD
- Profa Elisangela dos Santos Meza - Coordenadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática
- Prof. Josnei Francisco Peruzzo - Membro da Comissão Organizadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Na ocasião foram premiados 241 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 24,12% dos alunos que participaram da segunda fase da 7ª OPMat): 8 estudantes com troféus; 21 com medalhas de ouro; 34 com medalhas de prata; 94 com medalhas de bronze e 93 com medalhas de menção honrosa.

Foram entregues troféus para as escolas e para os professores dos dois alunos que obtiveram a maior pontuação em cada nível (1, 2, 3 e 4) da 7ª OPMat, sendo um de escola particular e um de escola pública. Além disso, todos os professores cujos alunos foram premiados receberam certificados de congratulações, assim como todas as escolas participantes da 7ª OPMat.

Nível Júnior

Troféu

- Tomás Milczewski Batista (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Isabela Aparecida Lendzion (Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach)

Ouro

- Tomás Milczewski Batista (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lucas Ferreira (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Emanuel Swiech Ayoub (Colégio Marista Pio XII)
- Isabela Aparecida Lendzion (Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach)
- Lucas Maeda Kataoka (Colégio Alfa Plus)

Prata

- Julia Ogrysko (Colégio Sagrada Família)
- Leonardo Oliveira Bittencourt (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Victor Rafael May Arévalos (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Guilherme Otto Baier (Escola Desafio)
- Natália Zannon Sluzarz (Colégio Marista Pio XII)
- Gabriel Vinicius Da Silva (Escola Municipal Prefeito Theodoro Batista Rosas)
- Lucas Gabriel Padilha de Lima (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Kauan Fernando Correia Traczykowski (Escola Municipal Aristeu Costa Pinto)
- Rafael Gueiber Montes (Colégio Positivo Master)

- Calebe Jeremias Azevedo Decol (Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel)

Bronze

- Catarina Sloboda Stange (Colégio Alfa Plus)
- Francisco Pereira de Aguiar (Colégio Sagrada Família)
- Ramon Gabriel de Pontes (Colégio Sagrada Família)
- André Jun Sumikawa (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Jing Chao Chen (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Pedro Henrique de Andrade Flaviano (Colégio Marista Pio XII)
- Eduardo Deschk Heck (Escola Desafio)
- Gustavo Aqsenen (Escola Rosazul)
- Sofia Regailo Lopes (Escola Santo Ângelo)
- Cauã Gabriel Rettig da Luz (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Joaquim Candido Bueno Rutcoski (Colégio Sant'Ana)
- Maria Eduarda Soltovski Eisele (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Eloisa Ribas Coelho (Colégio Sant'Ana)
- Gustavo Tomporoski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Nicolas Nadal Osga (Colégio Marista Santa Mônica)
- Matheus Garcia Valentim (Escola Santo Ângelo)
- Henrique Luis de Geus (Colégio Marista Pio XII)
- Felipe Bernet Inoue (Colégio Marista Pio XII)
- Theo Martins Machado Hyeda (Colégio Alfa Plus)
- Eduardo Caillot Schoroeder Lesiko (Colégio Sagrada Família)

- Jean Luca de Araujo Pissaia (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Francisco de Assis Brasil (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Heloísa Vieira da Silva (Colégio Marista Pio XII)
- Cassiano Schwade Januário (Colégio Sagrada Família)
- Luigi Armstrong Troyner Nicolau (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Anna Beathriz Mullet de Miranda (Colégio Alfa Plus)
- Luis Germano de Souza de Abreu (Escola Rosazul)
- Nicolas Eduardo Machado dos Santos (Escola Municipal Doutor Raul Pinheiro Machado)
- Luis Henrique Dolinski (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Matheus Nascimento Romanhuki (Escola Municipal Professora Maria Antonia de Andrade)
- Vitória de Quadros (Escola Municipal Professora Armida Frare Gracia)
- Danilo Szczepanski Matias (Escola Municipal Deputado Mário Braga Ramos)
- Kauan Hamura (Escola Municipal Professor Maria Vitória Braga Ramos)
- Matheus Eduardo dos Santos (Escola Municipal Doutor Edgar Sponholz)
- Nayana Novakowski Travensoli (Escola Municipal Professora Maria Antonia de Andrade)
- Melissa Diniz Matsunaga Torigoe (Escola Municipal Doutor Raul Pinheiro Machado)
- Felipe Daniel de Araújo (Escola Municipal Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Gabriel Henrique Ribeiro (Escola Municipal Prefeitura Major Manoel Vicente Bittencourt)
- Myrela Isis Ribeiro Wichert (Escola Municipal Professora Otacilia Hasselman de Oliveira)
- Nycolas Priotto Alves (Escola Municipal Professora Zair Santos Nascimento)

- Daniel Filipe Pires Rodrigues (Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach)
- Eduardo Taras (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Cauã Henrique Chaikouski (Escola Municipal Professor Paulo Grott)
- Ediclei Oliveira Rodrigues de Camargo (Escola Municipal Professora Armida Frare Gracia)
- Gustavo Vinicius Farias Carraro (Escola Municipal Alda Santos Rebonato)
- Kauã Marins Oliveira dos Santos (Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach)
- Bruno Laudelino de Oliveira (Escola Municipal Doutor José Pinto Rosas)
- Gustavo Ferreira (Escola Municipal Ruth Holzmann Ribas)
- Kauan José Padilha (Escola Municipal Deputado Mário Braga Ramos)
- Spencer Antunes da Rosa Cenko (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Gabriela Bomfati Garcia (Escola Municipal Alda Santos Rebonato)
- Matheus Ramos Mattos Dos Santos (Escola Municipal Professor Kamal Tebcherani)
- Ryan Caio Maurer (Escola Municipal Guaracy Paraná Vieira)
- Kauã Gabriel Borgo Lopes (Escola Municipal Deputado Mário Braga Ramos)

Menção Honrosa

- Ibrahim Lindolm Nusda (Escola Municipal Professora Maria Laura Pereira)
- Arita Rosa Guimaraes Santos (Escola Municipal Doutor Raul Pinheiro Machado)
- Conrado Cipriano Graciano (Escola Municipal Professora Maria Antonia de Andrade)
- Eloá Gabriela da Costa (Escola Municipal Professora Braulina Carneiro De Quadros)
- Lauany Naisa de Oliveira (Escola Municipal Prefeito Doutor Fulton Vitel Borges de Macedo)

- Mariana Teleginski de Azevedo (Escola Municipal São Jorge)
- Matheus Dos Santos Eidam (Escola Municipal Alda Santos Rebonato)
- Matheus Quadros da Silva (Escola Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)
- Nicolas de Quadros Sonnenstrahl (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)
- Bianca Arruda (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Alexandre Guimarães (Escola Municipal Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Maria Vitória Fernandes da Silva (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Amanda Pereira do Nascimento (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Gustavo Novossad Carneiro (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- João Vitor Mehret Pinto (Escola Municipal Frederico Constante Degraf)
- Laysla Camily Grzebelucka Fernandes (Escola Municipal Deputado Djalma de Almeida Cesar)
- Nathalia Souza da Silva (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimaraes Vilela)
- Yasmim Pagano Schott (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Emanueli de Oliveira (Escola Municipal Felicio Francisquiny)
- José Cristofer Correia de Freitas Prezasniuk (Escola Municipal Doutor José Pinto Rosas)
- Ana Elisa Tanello da Silva (Escola Municipal Alda Santos Rebonato)
- Ana Luísa da Silva Paliano (Escola Municipal Prefeitura Doutor Plauto Miró Guimarães)
- Gabriel Moreira Santos (Escola Municipal Professora Dércia do Carmo Noviski)
- Gabriele de Fátima Costa Ferreira (Colégio Sant'Ana)

- Nathally Gabrielle Cardozo (Escola Municipal Professora Zahira Catta Preta Mello)
- Raul Daniel Romualdo de Souza (Escola Municipal General Aldo Bonde)
- Alexandre Nery Gutstein (Escola Municipal Frederico Constante Degraf)
- Rafaelly Batista Alves (Escola Municipal Professor Maria Vitória Braga Ramos)
- Artur Costa Fontana (Colégio Alfa Plus)
- Christian Rulian de Jesus Bello (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Eduardo Borsuk (Escola Municipal Doutor José Pinto Rosas)
- Fernanda Valerya Procópio dos Santos (Escola Municipal Professora Zair Santos Nascimento)
- Gabriel Ott Torres (Colégio Elite Tales de Mileto)
- João Lucas Ferreira Martins (Escola Municipal Professora Agenoridas Stadler)
- Julia Rutes Silva (Escola Reitor Alvaro Augusto Cunha Rocha - CAIC
- Marco Antônio Santos Dec (Colégio Marista Pio XII)
- Nicolas Galvão de Oliveira (Escola Municipal Prefeito Doutor Othon Mader)
- Duane Rafaelli Rozário Garcia (Escola Municipal Professor Sebastião dos Santos e Silva)
- Fernanda Luiza Moreira da Silva (Escola Municipal Professor Faris Antônio Michaele)
- André Tozetto (Escola Rosazul)
- Bruno Drong Vieira (Escola Municipal Professora Agenoridas Stadler)
- Joao Pedro Yassugui Moletta Rausch Monteiro (Escola Municipal Professor Paulo Grott)
- Marielle de Oliveira Penteado (Escola Municipal Prefeito Doutor Fulton Vitel Borges de Macedo)

- Nathalia Bronoski Moura (Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel)
- Nicole Alves dos Santos (Escola Municipal Prefeito Doutor Othon Mader)
- Vitoria Aparecida Gonçalves da Cruz (Escola Municipal Doutor Carlos Ribeiro De Macedo)
- Anna Laura Pelinski (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimaraes Vilela)
- Emanueli Witkowski Antunes (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Iuri Cataneo Silveira (Colégio Sagrada Família)
- Rafael Natã de Jesus Rodrigues (Escola Municipal Professora Minervina França Scudlareck)
- Yasmim Gabrielly de Lima França Vonsoski (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Arthur Araujo de Castro (Colégio Pontagrossense Sepam)
- João Pedro Kieltyka Simon Sola (Colégio Marista Pio XII)
- Matheus dos Santos (Escola Municipal Professora Zahira Catta Preta Mello)
- Alice Sousa de Morais (Colégio Marista Pio XII)
- Felipe Della Bernarda Miranda (Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach)
- Gabriely Gubert Pianowski (Escola Municipal São Jorge)
- João Victor Evangelista dos Santos (Escola Municipal Prefeito Doutor Fulton Vitel Borges de Macedo)
- Laura de Jesus Dutra Schimidt (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Leonardo Fegert (Colégio Alfa Plus)
- Matheus Francischinelli Freitas (Escola Santo Ângelo)
- Nathalia Cavilha Borges (Escola Municipal São Jorge)

- Nikolas Padilha Pendiuck Dos Santos (Escola Municipal Prefeitura Doutor Plauto Miró Guimarães)
- Rafaelly Alves de Campos (Escola Municipal Professora Otacilia Hasselman de Oliveira)
- Ramon Miguel Tozetto (Escola Municipal Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Sofia Roloff (Escola Municipal Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Bruno Maciel Dalssotto (Escola Municipal Professora Jorge Dechandt)
- Felipe Gonçalves de Oliveira (Colégio Integração)
- Juliana Boratto Dalazoana (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- Arthur Cardoso Drummer (Colégio Marista Pio XII)
- Bárbara Malacarne Campagnoli (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Daniela Fernanda Kuhn (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Fernanda da Silva Gulmine (Escola Municipal Prefeitura Doutor Plauto Miró Guimarães)
- Leonardo Henrique Maravieski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Nathaly Copla de Morais Rosa (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- João Pedro de Morais Nogueira (Escola Bom Pastor)
- Juliana Lorena Pires de Assis Pereira (Escola Municipal Prefeito Doutor Elyseu de Campos Mello)
- Matheus Cunha de Oliveira (Escola Municipal Professor Paulo Grott)

Nível 1

Troféu

- Ana Julia da Silva (Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)
- Maria Eduarda Onesko Slusarz (Colégio Elite Tales de Mileto)

Ouro

- Ana Julia da Silva (Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)
- Maria Eduarda Onesko Slusarz (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Yasmin Castilho Ouriques (Colégio Positivo Master)
- Grazielly do Bomfim Antisko (Colégio Sagrada Família)
- Francisco Grokoviski (Colégio Elite Tales de Mileto)

Prata

- Aquiles Santos Carmo (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Pedro Augusto Sant'anna (Colégio Positivo Master)
- Luis Eduardo Cosseti Correia (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Gabriel Henrique da Costa Heil (Colégio Vila Militar Cescage)
- Vinicius Ribas Bida (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Camila Brasil Silva (Colégio Marista Pio XII)
- Rafael Boiko Neto (Escola Santo Ângelo)
- Carlos Henrique Arving (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Manuella Louize Pasturczak Schade (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Arthur Henrique Kruger Geronimo (Colégio Pontagrossense Sepam)

Bronze

- Mitzi Vedan de Ramos (Colégio Integração)
- Matheus Miguel Rodrigues Donha (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Maria Eduarda Schmidt Werlang (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Elton Walesko de Souza (Escola Santo Ângelo)

- Thierre de Arruda (Colégio Sagrada Família)
- Ana Marcela Reis de Freitas (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Murillo Kossobuski (Colégio Sagrada Família)
- Eduardo Dimbarre Ingles (Colégio Alfa Plus)
- Hendrick Jordan Prado Santos (Colégio Vila Militar Cescage)
- Maria Clara Amaro Cinel (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Mariana Scremin (Colégio Marista Pio XII)
- Ana Luiza Smaniotto (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Joyce Nirelly Carraro (Colégio Sagrada Família)
- Lavínia Machado Canova (Colégio Alfa Plus)
- Lucas Eduardo Oliveira dos Santos (Colégio Marista Pio XII)
- Davi Grando Primor (Colégio Integração)
- Gabriele Eduarda Pauka (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Gustavo Marques da Silva (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- João Gustavo Verner Eidan (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Eduarda de Paula (Escola Estadual Frei Doroteu de Padua)
- Amanda Danyella Coelho dos Santos (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Victória Banach Nunes (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Alexandre Covaleki (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Otavio Felipe Garcia Mattauch (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Maria Fernanda dos Santos (Colégio Estadual Doutor Munhoz da Rocha)
- Anddrielly Tinale de Carvalho (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Emanoelle Vitoria Santana dos Santos (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)

- Tiago Malanczen (Colégio Estadual Professor Becker e Silva)
- João Lucas Bolfe (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Arthur Israel de Oliveira Prestes (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Matheus Pedroso da Rocha (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Thiago Borges Crema (Escola Estadual Medalha Milagrosa)

Menção Honrosa

- Lucas Gabriel Dal Col (Escola Bom Pastor)
- Davi Bernardo Casagrande (Escola Bom Pastor)
- Luca Christoforo Tavarnaro (Colégio Marista Pio XII)
- Davi Augusto Caldas (Colégio Sagrada Família)
- João Guilherme Pivatto (Colégio Sant'Ana)
- Julia Faria Andrade (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Ana Luisa Mattos (Escola Santo Ângelo)
- Guilherme do Nascimento (Colégio São Francisco)
- Gustavo Halila Jacob (Colégio Positivo Master)
- Leandro Oliveira de Souza (Colégio Positivo Master)
- Gabriel Colman Martins (Colégio Sagrada Família)
- Lavínia de Morais Ferreira (Colégio Alfa Plus)
- Emanuel Peron Lameira (Colégio Marista Pio XII)
- Lorena de Oliveira Freitas (Colégio Sagrada Família)
- Yasmim Graboski (Colégio Sagrada Família)
- Arthur Salata (Escola Santo Ângelo)

- Carolina Hauser Santos (Colégio Integração)
- Marina Staut Tulio (Escola Santo Ângelo)
- Vanessa Ribeiro dos Santos (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Ana Clara Fogaça Souza (Colégio Integração)
- Luis Otávio Bochmia (Escola Bom Pastor)
- Nycolas Ribaski da Silva (Colégio Integração)
- Sofia Sokolowski Galvani (Escola Santo Ângelo)
- Frederico Hendges Roube (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Leonardo Luiz Chaves Domingues (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Mariana de Moura Fernandes (Colégio Sant'Ana)
- Henrique Heichuk de Oliveira (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lucas Ribeiro Ramos (Colégio Sant'Ana)
- Vinicius Gabriel Dolinski (Colégio Integração)
- Carolina Giacchini Kloth (Escola Desafio)
- Julia Vieira dos Santos (Colégio Positivo Master)
- Thalyta Rodrigues da Silva (Colégio Sagrada Família)
- Mateus Ramos (Colégio Sagrada Família)
- Gabriela Krindges dos Santos (Colégio São Francisco)

Nível 2

Troféu

- Vinicius Scremin (Colégio Marista Pio XII)
- Isabella Yukari Fujita (Escola Estadual Medalha Milagrosa)

Ouro

- Vinicius Scremin (Colégio Marista Pio XII)
- Felipe Mandalozzo Tebcherani (Colégio Positivo Master)
- Isabella Yukari Fujita (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Ruan Eneias Ferreira (Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres)
- Ricardo Catapan Fidelis (Colégio Sagrada Família)

Prata

- Rodrigo Dimbarre Ingles (Colégio Alfa Plus)
- Rafael Boldt Rodrigues de Souza (Escola Bom Pastor)
- Giovana Kwiatkowski Godinho (Colégio Positivo Master)
- Enzo Serenato (Colégio Marista Pio XII)
- Walter Vieira Neto (Colégio Sagrada Família)
- Beatriz Sousa Maestri (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Vinicius Eduardo Wieliczko (Colégio Alfa Plus)
- Arthur Martins Daux Medeiros (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Lavínia Borges da Silva (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Thomas Lankszner Bach (Colégio Marista Pio XII)

Bronze

- Roger Arima Dechandt (Colégio Alfa Plus)
- Beatriz Stadler Ribas (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Ana Julia Pereira de Souza e Silva (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Gabriel Felipe Shigio (Colégio Sagrada Família)

- Rodrigo Catto Menin (Colégio SESI - Ponta Grossa)
- Mariana Cosseti Correia (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Paula Aparecida de Lima (Colégio Sagrada Família)
- Pedro Henrique Cieslak (Colégio Sagrada Família)
- Leandro Martins Machado Hyeda (Colégio Alfa Plus)
- Muriel Wesley Eidam (Colégio Sagrada Família)
- Geovana Ehlert Rosa (Colégio Marista Santa Mônica)
- Ana Carolina Ataya (Colégio Alfa Plus)
- Davi Ximenes (Colégio Marista Pio XII)
- Nicoli Saldanha Ricardo (Colégio Integração)
- Vitor Brandelero (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Vinicius Daniel Geremias (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- José Vinicius Sinegoski (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Karoline Carvalho Salazar (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Adrian Juan Lara da Silva (Colégio Estadual Padre Arnaldo Jansen)
- Kauã Hilgenberg (Colégio Estadual Professor Eugenio Malanski)
- Fernanda Seniv (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- João Vitor Moreira da Silva (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Hevellyn Alves de Godoy Bueno (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Anthony Panaggio (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Gabriela Wurm (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Julia Martins de Lara (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Laiane Vitoria Pedrozzo de Mello (Colégio Estadual General Antonio Sampaio)

- Victor Hugo dos Santos (Instituto de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Andrei Santana Oliveira (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Victor Daniel Holler (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)

Menção Honrosa

- João Pedro Biguelini (Colégio Sant'Ana)
- Rodolfo Augusto Furmann Zappe (Colégio Sagrada Família)
- Gustavo Scarpim Schraier (Colégio Marista Pio XII)
- Henrique Franzini Ozorio (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Matheus Mendes Christofoli (Escola Desafio)
- Luiz Henrique Bahls (Colégio Integração)
- Vitor Camargo dos Santos (Colégio Marista Santa Mônica)
- Adriana Pereira de Souza e Silva (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Alvaro Ivanski Sabedotti (Colégio Positivo Master)
- Laura Malucelli Straiotto (Colégio Positivo Master)
- Alice Sangalli Saito (Colégio Positivo Master)
- Denis Rauch (Colégio Vila Militar Cescage)
- Maria Eduarda Martins (Colégio Sagrada Família)
- Amanda Malaine Martins de Oliveira (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Gabriela Antomiacomi (Colégio Positivo Master)
- Giullia Ramos Bertoletti (Colégio Sant'Ana)
- Nilson Gonçalves Machado Junior (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Rafael Barbosa Vaz (Escola Desafio)

- Amandha Caroline da Luz (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Bárbara Hoffmam Wosiack (Colégio Sant'Ana)
- João Marcos Logullo de Camargo (Escola Bom Pastor)
- Nathally Stefany Ramos da Silva (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Nickolas Quadros Jordão da Silva (Escola Bom Pastor)
- Renan Gelinski Santos (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Amanda Leticia Castanha (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- João Vitor Simões Cipolari (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Mariana Baizan Schmidt (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Rafaelly Aparecida Schafranski da Silva (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Luis Eduardo Lopes Faustin (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Natalia Dolgan (Escola Estadual Frei Doroteu de Padua)
- Pedro Henrique Azambuja dos Santos (Colégio Marista Pio XII)
- Rafaela Cordeiro Kunau (Colégio Sagrada Família)
- Tiago Hass Pereira (Colégio Alfa Plus)
- Gabriella Ferraz Costa Siqueira (Escola Estadual Medalha Milagrosa)

Nível 3

Troféu

- Leonardo Ferreira (Colégio Marista Pio XII)
- Eduardo Kossar Van Thienen da Silva (Colégio Estadual Professor Becker e Silva)

Ouro

- Leonardo Ferreira (Colégio Marista Pio XII)

- Gustavo Gelinski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Renato Mandalozzo Tebcherani (Colégio Positivo Master)
- Danilo Beltrame (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Renata Nadal Baier (Colégio Positivo Master)
- Lucas Perondi Kist (Colégio Elite Tales de Mileto)

Prata

- Guinter Sponholz Neiverth (Colégio Positivo Master)
- Gabriel dos Santos (Colégio Integração)
- Pietra Bernardelli Fadel (Colégio Positivo Master)
- Vinicius Brigagão Lunardi (Colégio Sagrada Família)
- Eduardo Kossar Van Thienen da Silva (Colégio Estadual Professor Becker e Silva)
- Ariel Scheifer Pereira dos Santos (Colégio Estadual Colônia Dona Luiza)
- Maria Eduarda Gonçalves Reis (Colégio Sagrada Família)
- Thiago Neves de Campos (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Gabriela Brasil Silva (Colégio Marista Pio XII)
- Lívia Cristina Fipke (Colégio Sagrada Família)
- Varnava Sanarov Rusakoff (Instituto de Educação Professor César Pietro Martinez)

Bronze

- Nicolle Galleto Greskiv (Colégio Lobo Ponta Grossa)
- Rafael Henrique Mauda Scos (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Lorenzo Gabriel Nabozny (Colégio Alfa Plus)

- Pedro Ramos Pereira (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Thiago Martins Figueiredo (Colégio Positivo Master)
- Adnei Gabriel Marins Knupp (Colégio Integração)
- Isabela Alberti Fischer (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Matheus Luiz Bach (Colégio Integração)
- Nicolas Mikael da Silva (Colégio Alfa Plus)
- Barbara Feducenko Moreira (Colégio Alfa Plus)
- Giovana Kuan (Colégio Sagrada Família)
- Gabriel Gravronski (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Isabela Haas Borges (Colégio Alfa Plus)
- Adriel de Matos Riberio (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Yves Figueiredo Artmann (Colégio Estadual José Elias da Rocha)
- Leticia Kosteski da Silva (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Geovanna Ferraz Costa Siqueira (Colégio Estadual Regente Feijó)
- João Pedro Viatrowski (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Welinton Murilo Camargo (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)
- Isabele Lopatko Correia (Colégio Estadual João Von Borell Du Vernay)
- Thomas Schelesky Mehret (Colégio Estadual Presidente Kennedy)
- Eduardo Kuller Macedo (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Igor Raul de Lara Santos (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Leonardo Andrade Matos (Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres)

- Thais Armstrog de Souza (Colégio Estadual Colônia Dona Luiza)
- Thiago Portella (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)

Menção Honrosa

- Alex Nunes de Lara (Colégio Sagrada Família)
- Henrique Thiago da Silva (Colégio SESI - Ponta Grossa)
- Natália Sanches (Colégio Sagrada Família)
- Gustavo Guse Martins (Colégio Marista Pio XII)
- Eduardo Machado Dechandt (Colégio Positivo Master)
- Klaus Kugler Santos (Colégio Sant'Ana)
- Mariana Tomasoni dos Santos (Colégio Sagrada Família)
- Matheus Von Jelita Salina (Colégio Positivo Master)
- João Elias Annes de Assis (Colégio Estadual Regente Feijó)
- William de Camargo Smolarek (Colégio Lobo Ponta Grossa)
- Eduarda Kowalsky (Instituto de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Gabriel Schraier (Colégio Marista Pio XII)
- José Miguel Raifur (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Vitor Henrique Nalevaiko (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Andre de Paula de Camargo (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Laysa Basso (Colégio Vila Militar Cescage)
- Adilson Antunes Fernandes (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Camila Conrado dos Santos (Colégio Positivo Master)

- Maria Eduarda Teleginski Bonissoni (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Matheus Felipe Lazarotto (Colégio Sant'Ana)

Nível 4

Troféu

- Cassiano Jose Kounaris Fuziki (Colégio Marista Pio XII)
- Leonardo Viatrowski (Colégio Estadual Regente Feijó)

Ouro

- Cassiano Jose Kounaris Fuziki (Colégio Marista Pio XII)
- Leonardo Viatrowski (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Rafael Antonio Chinelatto (Colégio Marista Pio XII)
- Rafael Adriano Ferreira Elesbão (Colégio Estadual Regente Feijó)
- João Eduardo Leniar (Colégio Lobo Ponta Grossa)

Prata

- Elaine Cristina Margraf Martins (Colégio Sant'Ana)
- João Pedro de Souza Chociai (Colégio Lobo Ponta Grossa)
- Yan Eneias Ferreira (Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres)

Bronze

- Elton Mateus Neves (Colégio Integração)
- Lucas Andrade Sikorski (Colégio Lobo Ponta Grossa)
- Elcio Oscar Machinski Júnior (Colégio Alfa Plus)
- Bruno Vieira Harmatiuk (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Fernanda Fogaça Souza (Colégio Estadual José Elias da Rocha)

- Jhon Victor Messias Rosa (Colégio Estadual Regente Feijó)

Menção Honrosa

- Heloiza Victoria de Souza (Colégio Sagrada Família)
- Luis Gustavo Schnaider da Silva (Colégio Sagrada Família)
- Emilly Gabrielli de Oliveira Pedroso (Colégio Sagrada Família)
- Rita Aparecida Guerem P. Prado (Colégio Marista Santa Mônica)
- Carlos Eduardo Justus (Colégio Sagrado Coração de Jesus)

Professores Premiados

Abaixo consta a relação de todos os professores que receberam troféus nos respectivos níveis:

Nível Júnior - Troféu:

- Professora Francine Mayara Gomez (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Professora Debora Alves Pereira (Escola Municipal Profa. Zila Bernadete Bach)

Nível 1 - Troféu:

- Professor Alisson Lima Emiliano (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Professora Suellen Karina Palhano Iochucki (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Professora Fabíola Pineda Lopes (Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)

Nível 2 - Troféu:

- Professora Geane Dias de Moura Jorge (Colégio Marista Pio XII)
- Professora Karla Adriane Boamorte (Escola Estadual Medalha Milagrosa)

Nível 3 - Troféu:

- Professor Tiago Vieira (Colégio Marista Pio XII)
- Professora Ana Paula Milleo Maynardes (Colégio Estadual Professor Becker E Silva)

Nível 4 - Troféu:

- Professor Tiago Vieira (Colégio Marista Pio XII)
- Professora Daniele Regina Penteado (Colégio Estadual Regente Feijó)

A seguir consta a relação de todos os professores que tiveram alunos participantes da 7ª OPMat no ano de 2019:

- Ingrid da Silva Milléo (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)

- Marcos Sant'anna Modrow (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Maura Cristina Almeida Dicenha (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Osvaldo Thibes Chaves de Oliveira (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Paulo Roberto Batista (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Alzenir Virginia Ferreira Soistak (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Ingrid da Silva Milléo (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Franciele Isabelita Lopes Novak (Colégio Alfa Plus)
- Igor Alberto Dantas Abrami (Colégio Alfa Plus)
- José Carlos Bus (Colégio Alfa Plus)
- Kellen Cristina dos Santos Abrami (Colégio Alfa Plus)
- Osvaldo Cardoso (Colégio Dynâmico)
- Renan Ramos Costa (Colégio Dynâmico)
- Alisson Lima Emiliano (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Franciane Prestes Ferreira Ribeiro (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Kellen Cristina do Santos Abrami (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Suellen Karina Palhano Iochucki (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Lenilton Kovalski (Colégio Estadual Colônia Dona Luiza)
- Arnold Vinícius Prado Souza (Colégio Estadual do Campo Doutor Munhoz da Rocha)
- Diego Ferrari do Vale (Colégio Estadual do Campo Doutor Munhoz da Rocha)
- Gisele Aparecida Carvalho e Silva (Colégio Estadual Dorah Gomes Daitschman)

- Maria Eliete Franscischinelli Freitas (Colégio Estadual Dorah Gomes Daitschman)
- Mauricio Fernandes (Colégio Estadual Dorah Gomes Daitschman)
- Vilmar de Oliveira (Colégio Estadual Dorah Gomes Daitschman)
- Andrea Ostruska Maximo (Colégio Estadual Frei Doroteu de Padua)
- Débora Laranjeira Colodel (Colégio Estadual Frei Doroteu de Padua)
- Fabiana do Reis (Colégio Estadual Frei Doroteu de Padua)
- Paulo Sérgio Rufino (Colégio Estadual Frei Doroteu de Padua)
- Iolanda Gebiluka Mauda (Colégio Estadual General Antonio Sampaio)
- Ivania Mara Gabardo (Colégio Estadual General Antonio Sampaio)
- Luciano Roque Leite (Colégio Estadual General Antonio Sampaio)
- Malui Sergio Siqueira (Colégio Estadual General Antonio Sampaio)
- Teresinha Nicolaio (Colégio Estadual General Antonio Sampaio)
- Genice Bratt (Colégio Estadual João Von Borell Du Vernay)
- Irene Terezinha Burkot (Colégio Estadual João Von Borell Du Vernay)
- Amelia Eponina da Luz Ruivo (Colégio Estadual José Elias da Rocha)
- Elaine de Fátima Fávaro (Colégio Estadual José Elias da Rocha)
- Marcos Mauricio Ferreira Sachs (Colégio Estadual José Elias da Rocha)
- Pricila Gawronski Galvão (Colégio Estadual José Elias da Rocha)
- Roberta Meneghini Noskoski (Colégio Estadual José Elias da Rocha)
- Silvia Regina Jurasrek Colesel (Colégio Estadual José Elias da Rocha)
- Ana Paula Zachordenski (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Daphne Marcelle Valentin Bley (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Edna Aparecida Fagundes Consul (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)

- Márcia Cristiane Ramos Padilha (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Maria Inez Solak de Souza (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Michelly Araújo de Oliveira (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Prisciane Leticia Silveira Teixeira (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Rubens Edgard Furstenberger Filho (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Silvia Regina Jurasrek Colesel (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Emilene Conceição Marins da Silva Bochnek (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Eva Aparecida Carvalho E Silva (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Roseli Niedjevski Dambrovisk (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Andressa Niele Garcia Gonçalves (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)
- Karina Rocha (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)
- Marselha Aparecida Wiecheteck (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)
- Raquel Pedroso (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)
- Rodrigo França Pleis (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)
- Sidenea do Rocio Kachak (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)
- Edicleia Aparecida da Silva (Colégio Estadual Padre Arnaldo Jansen)
- Fabíola Pineda Lopes (Colégio Estadual Padre Arnaldo Jansen)
- Giseli Aparecida Carvalho Silva (Colégio Estadual Padre Arnaldo Jansen)
- Marilene Gomes (Colégio Estadual Padre Arnaldo Jansen)
- Fabíola Pineda Lopes (Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)
- Noemi Thomaz Dalapria (Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)
- Sheila Regina Bagatelli Bozz (Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)

- Wilson José Machado Gomes (Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)
- Ana Paula Milleo Maynardes (Colégio Estadual Professor Becker E Silva)
- Leila Reda Ataya (Colégio Estadual Professor Becker E Silva)
- Marisete do Rocio Kopis (Colégio Estadual Professor Becker E Silva)
- Neli Garcia Catossi (Colégio Estadual Professor Becker E Silva)
- Sergio Rodrigo Batista (Colégio Estadual Professor Becker E Silva)
- Ana Beatriz do Reis (Colégio Estadual Professor Eugenio Malanski)
- Andressa Niele Garcia Gonçalves (Colégio Estadual Professor Eugenio Malanski)
- Carla Cristiane Dal Col de Oliveira (Colégio Estadual Professor Eugenio Malanski)
- Gisele Aparecida Carvalho e Silva (Colégio Estadual Professor Eugenio Malanski)
- Marilda Monteiro Porto (Colégio Estadual Professor Eugenio Malanski)
- Arilei Rodrigues Albach (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Dirceu Eduardo Correa (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Edmir Ferreira Neves (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Maria Ester Senger Schwab (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Marli Ribeiro Maia Slompo (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Simone de Fátima Soltes (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Wladimir Bosca (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Cláudia Almeida Aires (Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres)
- Márcio José Simões (Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres)
- Adriane Boldt (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)

- Ana Claudia Mores (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Andreia Daniele Ferreira Gonçalves (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Antonio Henrique Feld (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Arnold Vinicius Prado Souza (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Cenira Kravutschke Schwab (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Eliane Cristina de Matos (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Eliane Hartmann do Santos (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Michel Floriano Bueno (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Michelly Araujo de Oliveira (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Neide Damo Comel (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Patricia Lima de Andrade (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Suzana de Fátima Schoenk de Mattos (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Ana Paula Zachordenski (Colégio Estadual Professora Sirley Jargas)
- Fabielly Selmara Malinoski (Colégio Estadual Professora Sirley Jargas)
- Liliane Camargo Soares (Colégio Estadual Professora Sirley Jargas)
- Luciane do Reis (Colégio Estadual Professora Sirley Jargas)
- Marlene Holdtke de Abreu (Colégio Estadual Professora Sirley Jargas)
- Sérgio Rodrigo Batista (Colégio Estadual Professora Sirley Jargas)
- Daniele Regina Penteado (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Luciana Blum Rauch (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Silvia Regina Jurasrek Colesel (Colégio Estadual Regente Feijó)

- Valeria Buwai Smaha (Colégio Estadual Regente Feijó)
- André Ferrando (Colégio Estadual Santa Maria)
- Elenice Raimundi (Colégio Estadual Santa Maria)
- Eliane Tulio Xavier (Colégio Estadual Santa Maria)
- Igor Alberto Dantas Abrami (Colégio Estadual Santa Maria)
- Renato Pereira e Silva (Colégio Estadual Santa Maria)
- Sérgio Rodrigo Batista (Colégio Estadual Santa Maria)
- Silmari Oliveira Gomes (Colégio Estadual Santa Maria)
- Simone Daiane Pisnisk (Colégio Estadual Santa Maria)
- Bianca Aparecida Holm de Oliveira (Colégio Integração)
- Juliana Fátima Holm Brim (Colégio Integração)
- Lucas Gicorski (Colégio Integração)
- Elieser dos Santos (Colégio Lobo Ponta Grossa)
- Nicholas Raphael de Almeida Beruski (Colégio Lobo Ponta Grossa)
- Ana Cristina Delinski Stiirmer (Colégio Marista Pio XII)
- Geane Dias de Moura Jorge (Colégio Marista Pio XII)
- Lucia Yukie Shimasaki (Colégio Marista Pio XII)
- Patricia Maria Zaremba de Oliveira (Colégio Marista Pio XII)
- Roseli das Graças Alexandre Martins (Colégio Marista Pio XII)
- Tiago Vieira (Colégio Marista Pio XII)
- Cristiane Aparecida Hauser (Colégio Marista Santa Mônica)
- Francine Concórdia Hauser Santos (Colégio Marista Santa Mônica)
- Marselha Aparecida Wiecheteck (Colégio Marista Santa Mônica)

- Rafael Bruno Ligeski (Colégio Marista Santa Mônica)
- Bianca Aparecida Holm de Oliveira (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Daniela Aparecida Fabricio (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Fernanda Fetzer Valente (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Fernanda Hennipman (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Francine Mayara Gomes (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Juliane de Fátima Fernandes Fidelis (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Roberto Mauro Ramos Mainardes (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Augusto Rangel Selski (Colégio Positivo Master)
- Fabrício Gonçalves do Santos (Colégio Positivo Master)
- Jonatas Carneiro (Colégio Positivo Master)
- Keli Cristina Rodrigues (Colégio Positivo Master)
- Bruna Elizabeth Adamowicz da Luz (Colégio Sagrada Família)
- Edilaine Botão da Silva (Colégio Sagrada Família)
- Elyzandra Maia Cano Perreto (Colégio Sagrada Família)
- Fábio Augusto Souto Rosa (Colégio Sagrada Família)
- Gisele Pacheco (Colégio Sagrada Família)
- Herica Cristina Alves Galante Messias (Colégio Sagrada Família)
- Maria Regina Urban (Colégio Sagrada Família)
- Marina Marra (Colégio Sagrada Família)
- Rita Nerli Antoneli Carvalho (Colégio Sagrada Família)
- Rosilda Aparecida Chociai Scremin (Colégio Sagrada Família)
- Suzane Machado Daer Costa (Colégio Sagrada Família)

- Ana Claudia Adriano de Alvarenga (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Ana Paula Gomes Banho (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Mariana Andrade de Oliveira Vieira (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Michele Vandoski dos Santos (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Vera do Rocio Vanat Prestes (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Willian Thomas Rocha (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Claudia Danielle de França Otoni (Colégio Sant'Ana)
- Daniel Carlos Beusso (Colégio Sant'Ana)
- Idilceia Aparecida Hilgemberg Löderer (Colégio Sant'Ana)
- Luiz Krett (Colégio Sant'Ana)
- Paulo Fernando Zaratini de Oliveira e Silva (Colégio Sant'Ana)
- Luan Elias do Nascimento (Colégio São Francisco)
- Joel Lopes da Silva Júnior (Colégio SESI - Ponta Grossa)
- Joel Lopes da Silva Júnior (Colégio SESI Internacional- Ponta Grossa)
- Karina Rocha (Colégio Estadual 31 de Março)
- Marissol do Rocio Vieira da Rosa (Colégio Estadual 31 de Março)
- Mauricio Kuchinisk (Colégio Estadual 31 de Março)
- Felipe Antônio Machado Fagundes Gonçalves (Colégio Vila Militar Cescage)
- Rodrigo Domingues (Colégio Vila Militar Cescage)
- Anne Catherine Maciel de Oliveira (Escola Bom Pastor)
- Fábio Borges (Escola Bom Pastor)
- Laiane Lima dos Santos (Escola Bom Pastor)
- Paulo Henrique Carvalho (Escola Desafio)

- Michelle Hilbert Dipp de Oliveira (Escola Desafio)
- Daniele Walichinski (Escola Estadual Espirito Santo)
- Osvaldo Thibes Chaves de Oliveira (Escola Estadual Espirito Santo)
- Silvana Zimmermann Maia (Escola Estadual Espirito Santo)
- Sheila Regina Bagatelli Bozz (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Valquiria Glinski (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Adriane de Castro (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Amélia Aparecida Moro (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Danielli Walichinski (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Debora de Lima Moscardi do Santos (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Luciano Gomes Ferreira (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Luzia Gaioski Neneve (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Silvana Vettorazzi (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Cleonice Aparecida Ferreira dos Santos Sachs (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Helen Mari Silvério (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Jeanine Alves de Oliveira (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Karla Adriane Boamorte (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Luiz Fabiano dos Anjos(Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Simone de Fatima Soltes (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Edna Aparecida Fagundes Consul (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Libia Andreia Cosati (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Wladimir Bosca (Escola Estadual Monteiro Lobato)

- Lidiane Porciuncula da Silva (Escola Evangélica Boas Novas)
- Aline Kapp Horizonte da Rosa (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Denise do Rocio Mezzadri Lopes (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Magali Maria Zoldan de Oliveira (Escola Municipal Alda do Santos Rebonato)
- Nilceia do Rocio Suzhlc Ferreira (Escola Municipal Alda do Santos Rebonato)
- Karine Chesine Antunes Avila (Escola Municipal Catarina Miró)
- Simone de Fátima Cordeiro (Escola Municipal Catarina Miró)
- Janete Lourenço de Oliveira Batistek (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- Bernardete Aparecida da Maia (Escola Municipal Deodoro Alves Quintiliano)
- Elaine Aparecida Bendix (Escola Municipal Dep. Djalma de Almeida Cesar)
- Roberta Fernanda Halles (Escola Municipal Dep. Mario Braga Ramos)
- Simone Aparecida Ioungblod (Escola Municipal Dep. Mario Braga Ramos)
- Eryka Maravieski Lipinski (Escola Municipal Dr. Carlos Ribeiro de Macedo)
- Silmara Aparecida Leifeld (Escola Municipal Dr. Carlos Ribeiro de Macedo)
- Vanderleia Cristina Sonego (Escola Municipal Dr. Carlos Ribeiro de Macedo)
- Angelita Antunes dos Santos (Escola Municipal Dr. Edgar Sponholz)
- Cristiane Aparecida Kiel (Escola Municipal Dr. Edgar Sponholz)
- Elisabet Mendes Belo (Escola Municipal Dr. Edgar Sponholz)
- Ana Paula Besten (Escola Municipal Dr. José Pinto Rosas)
- Daniele Batista Galdino Orlovski (Escola Municipal Dr. José Pinto Rosas)
- Fernanda Cristina Ferreira (Escola Municipal Dr. José Pinto Rosas)
- Edna Kapp (Escola Municipal Dr. Leopoldo Pinto Rosas)
- Dalva de Oliveira Silvestre Borges (Escola Municipal Dr. Raul Pinheiro Machado)

- Edivane Fernandes Gaioski (Escola Municipal Dr. Raul Pinheiro Machado)
- Amanda Luzia Matoso Fernandes (Escola Municipal Felicio Francisquiny)
- Adriane de Oliveira Bueno (Escola Municipal Frederico Constante Degraf)
- Vanessa Gasparelo (Escola Municipal Frederico Constante Degraf)
- Paula Adriane Fogiatto (Escola Municipal Fiovarante Slaviero)
- Tatianne dos Santos Andrade (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Zeila de Fátima Lucas (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Maria Rosa da Silva Lazarotto (Escola Municipal Gal. Aldo Bonde)
- Michele Hilbert Dipp de Oliveira (Escola Municipal Gal. Aldo Bonde)
- Susana do Rocio Ossovis Ferreira (Escola Municipal Gal. Aldo Bonde)
- Gisele de Fátima Rosas Costa (Escola Municipal Guaracy Paraná Vieira)
- Lorelay Aparecida Gomes de Almeida (Escola Municipal Guaracy Paraná Vieira)
- Taila Lovato Oliveira Silva (Escola Municipal Guaracy Paraná Vieira)
- Simone Starke (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Rosilane Aires de Araújo (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Adriana Elizabeth Spitzer (Escola Municipal Padre Jose Bugatti)
- Jessica Vysak dos Santos (Escola Municipal Padre Jose Bugatti)
- Marizete Presotto (Escola Municipal Pascoalino Provisiero)
- Elimar Cristina Ferreira da Silva (Escola Municipal Pref. Cel. Claudio Gonçalves Guimarães)
- Tatiana Paula Mazurok Schactae (Escola Municipal Pref. Cel. Claudio Gonçalves Guimarães)
- Zelia Araujo Prado da Silva (Escola Municipal Pref. Cel. Claudio Gonçalves Guimarães)

- Janete Aparecida dos Santos (Escola Municipal Pref. Claudio Mascarenhas)
- José Joana Hamilko (Escola Municipal Pref. Dr. Amadeu Puppi)
- Mariangela da Silva (Escola Municipal Pref. Dr. Amadeu Puppi)
- Renata Wichert (Escola Municipal Pref. Dr. Amadeu Puppi)
- Juliana Trindade Rosa (Escola Municipal Pref. Dr. Elyseu de Campo Mello)
- Kelly Cristina Mazeika (Escola Municipal Pref. Dr. Fulton Vitel Borges de Macedo)
- Suzan Marcela de Oliveira (Escola Municipal Pref. Dr. Fulton Vitel Borges de Macedo)
- Angela Maria Valeranovicz (Escola Municipal Pref. Dr. Othon Mader)
- Rita Valéria Soares (Escola Municipal Pref. Dr. Othon Mader)
- Rosangela Aparecida Colman Broday (Escola Municipal Pref. Dr. Othon Mader)
- Elsa de Oliveira (Escola Municipal Pref. Dr. Plauto Miró Guimarães)
- Luana Patrícia Camargo de Mello (Escola Municipal Pref. Dr. Plauto Miró Guimarães)
- Silvia Regina Tozetto (Escola Municipal Pref. Eng. Cyro Martins)
- Fernanda Aparecida Rodrigues (Escola Municipal Pref. Eng. Eurico Batista Rosas)
- Clelia de Oliveira da Luz (Escola Municipal Pref. Ernesto Guimarães Vilela)
- Roseli Przybycien (Escola Municipal Pref. Ernesto Guimarães Vilela)
- Aline Lourenço Fabrício de Carvalho (Escola Municipal Pref. Jose Bonifácio Guimarães Vilela)
- Sandra Mara do Rocio Guimaraes Santana (Escola Municipal Pref. Jose Bonifácio Guimarães Vilela)
- Flavia Cirila do Rosário (Escola Municipal Pref. Jose Hoffmann)

- Helenise Aparecida de Oliveira Mezadri (Escola Municipal Pref. Maj. Manoel Vicente Bittencourt)
- Angela Maria Lotoski (Escola Municipal Pref. Theodoro Batista Rosas)
- Milena Claudia Oliveira (Escola Municipal Pref. Theodoro Batista Rosas)
- Ivete Eli Micaliski (Escola Municipal Prof. Aristeu Costa Pinto)
- Cassiane Bochne (Escola Municipal Prof. Egdar Zanoni)
- Christiany Chedlovski (Escola Municipal Prof. Egdar Zanoni)
- Jaqueline Malaquias (Escola Municipal Prof. Egdar Zanoni)
- Lais Regina Guerk (Escola Municipal Prof. Egdar Zanoni)
- Thayse Silvielli Brugge (Escola Municipal Prof. Egdar Zanoni)
- Marcia Glap (Escola Municipal Prof. Eloy Avrechack)
- Carlos Augusto Rodrigues Moreno (Escola Municipal Prof. Faris Antonio Michaele)
- Doroteia Deno Bobato Domann (Escola Municipal Prof. Faris Antonio Michaele)
- Jessica Aparecida Prestes (Escola Municipal Prof. Faris Antonio Michaele)
- Vanessa Aparecida Ribas Machado Rodrigues (Escola Municipal Prof. Faris Antonio Michaele)
- Lisiete Tozetto (Escola Municipal Prof. Ivon Zardo)
- Maria Simone da Mota Afynowycz (Escola Municipal Prof. Jorge Dechandt)
- Angela Maria Santana (Escola Municipal Prof. Kamal Tebcherani)
- Cristiane Martins Hilgemberg (Escola Municipal Prof. Kamal Tebcherani)
- Denise Terezinha Ribeiro Pedroso de Oliveira (Escola Municipal Prof. Nelson Pereira Jorge)
- Daniele Fernanda Wutzki (Escola Municipal Prof. Osni Vilaca Mongruel)

- Ediane do Rocio Antunes de Menezes (Escola Municipal Prof. Osni Vilaca Mongruel)
- Elaine Dalzotto Ostrufka (Escola Municipal Prof. Osni Vilaca Mongruel)
- Marines de Fátima Padilha (Escola Municipal Prof. Osni Vilaca Mongruel)
- Larissa Maruim Hohmann (Escola Municipal Prof. Paulo Grott)
- Miriam Abrão (Escola Municipal Prof. Paulo Grott)
- Adriana Aparecida Ferreira (Escola Municipal Prof. Placido Cardon)
- Marilza Aparecida Ghiraldelli Elias (Escola Municipal Prof. Placido Cardon)
- Rosimari do Rocio Gonçalves Reda (Escola Municipal Prof. Rubens Edgard Furstenberger)
- Elaine de Lourdes da Rosa Klosowski (Escola Municipal Prof. Sebastião do Santos E Silva)
- Carla Janaine Kozechen (Escola Municipal Prof. Zair Santos Nascimento)
- Jeniffer Antunes Machado (Escola Municipal Prof. Zair Santos Nascimento)
- Layze Cristine Cordeiro (Escola Municipal Prof. Zair Santos Nascimento)
- Luana Caroline Reina Will (Escola Municipal Prof. Zair Santos Nascimento)
- Eva Turek Staichak (Escola Municipal Profa. Adelaide Thomé Chamma)
- Janete Wilczak Hurko (Escola Municipal Profa. Adelaide Thomé Chamma)
- Marcia Almeida Martins (Escola Municipal Profa. Adelaide Thomé Chamma)
- Glaci Teixeira (Escola Municipal Profa. Agenoridas Stadler)
- Simone do Rocio Lima Krum (Escola Municipal Profa. Agenoridas Stadler)
- Celia Regina Pul (Escola Municipal Profa. Ana de Barros Holzmann)
- Silvana Aparecida Uczak Konofal (Escola Municipal Profa. Ana de Barros Holzmann)

- Adriana Staszczak (Escola Municipal Profa. Armida Frare Gracia)
- Andreia Santos Fernandes (Escola Municipal Profa. Armida Frare Gracia)
- Angela Safraid (Escola Municipal Profa. Armida Frare Gracia)
- Gesane Andrejeski Spinardi (Escola Municipal Profa. Braulina Carneiro de Quadros)
- Daniele Aparecida Mendes dos Santos (Escola Municipal Profa. Dércia do Carmo Noviski)
- Edicleia Aparecida da Silva (Escola Municipal Profa. Dércia do Carmo Noviski)
- Adrieli Josiane Machado da Silva (Escola Municipal Profa. Eclea dos Passos Horn)
- Aline Hildebrant (Escola Municipal Profa. Eclea dos Passos Horn)
- Sérgio Rodrigo Batista (Escola Municipal Profa. Guitil Federmann)
- Solange Evan Maria Malanczen (Escola Municipal Profa. Haydee Ferreira de Oliveira)
- Daiane Antunes de Ávila Fitzhum (Escola Municipal Profa. Idalia Góes)
- Elci Cristina Kruger (Escola Municipal Profa. Judith Macedo Silveira)
- Sandra Aparecida de Oliveira Polesel (Escola Municipal Profa. Kazuko Inoue)
- Cellem Daylane Sansana Ferreira (Escola Municipal Profa. Loise Foltran de Lara)
- Márcia Giovaneti Kintof (Escola Municipal Profa. Maria Antonia de Andrade)
- Rosangela Maria de Freitas Vitorino (Escola Municipal Profa. Maria Antonia de Andrade)
- Tania Mara de Souza (Escola Municipal Profa. Maria Antonia de Andrade)
- Carla Aparecida Blageski Foltran (Escola Municipal Profa. Maria Coutin Riesemberg)

- Gislaine Solarevicz (Escola Municipal Profa. Maria Coutin Riesemberg)
- Inajara Machado Gonçalves (Escola Municipal Profa. Maria Coutin Riesemberg)
- Maycon Hryniewicz de Almeida (Escola Municipal Profa. Maria Elvira Justus Schimidt)
- Dercia Marinho Ferreira (Escola Municipal Profa. Maria Eulina Santos Scheena)
- Alessandra Braga Kachinski Dias (Escola Municipal Profa. Maria Laura Pereira)
- Ana Claudia Krachinski Martins (Escola Municipal Profa. Maria Laura Pereira)
- Aryelle Halat Ayres (Escola Municipal Profa. Maria Vitoria Braga Ramos)
- Luciana Sovinski Tullio de Almeida (Escola Municipal Profa. Maria Vitoria Braga Ramos)
- Claudia Rosana Bonfim Teixeira (Escola Municipal Profa. Marta Filipkowski de Lima)
- Franciele Cristine de Souza Serafim (Escola Municipal Profa. Marta Filipkowski de Lima)
- Cristina Sovek Oyarzabal (Escola Municipal Profa. Minervina França Scudlareck)
- Cintia Aparecida Telles (Escola Municipal Profa. Minervina França Scudlareck)
- Joseane Eleuterio (Escola Municipal Profa. Minervina França Scudlareck)
- Maria Renata Leniar (Escola Municipal Profa. Minervina França Scudlareck)
- Palloma Santos Delgobo (Escola Municipal Profa. Otacilia Hasselmann de Oliveira)
- Ivete Stanislavski da Luz (Escola Municipal Profa. Ruth Holzmann Ribas)
- Mara Beatriz Chaves (Escola Municipal Profa. Ruth Holzmann Ribas)
- Lucila Eurich da Silva (Escola Municipal Profa. Shirley Aggi Moura)

- Denise Busnello Katerenhuk (Escola Municipal Profa. Zahira Catta Preta Mello)
- Giselle Aparecida Gonzaga de Camargo (Escola Municipal Profa. Zahira Catta Preta Mello)
- Karen Marcela Dantas da Silva (Escola Municipal Profa. Zahira Catta Preta Mello)
- Marcela Malaquias (Escola Municipal Profa. Zahira Catta Preta Mello)
- Aroldo Paes de Almeida Junior (Escola Municipal Profa. Zeneida de Freitas Schnirmann)
- Graziela Vaneza de Campos (Escola Municipal Profa. Zeneida de Freitas Schnirmann)
- Andreia Justus Lima Luz (Escola Municipal Profa. Zila Bernadete Bach)
- Debora Alves Pereira (Escola Municipal Profa. Zila Bernadete Bach)
- Leila Domingues da Silva Ribeiro (Escola Municipal Profa. Zila Bernadete Bach)
- Maria Marileia Soistak (Escola Municipal Profa. Zila Bernadete Bach)
- Susane Novacovski Titenis (Escola Municipal Profa. Zila Bernadete Bach)
- Thais Schasiepen (Escola Municipal Profa. Zila Bernadete Bach)
- Damiana Wolski (Escola Municipal Protazio Scheifer)
- Patricia Aparecida Kutax Sampaio (Escola Municipal Protazio Scheifer)
- Elisangela Denck Brigolla (Escola Municipal São Jorge)
- Maristela Vozeniak Martins (Escola Municipal São Jorge)
- Marisol Ribeiro de Souza (Escola Municipal Sen. Flavio Carvalho Guimarães)
- Mariane Cristina Fonseca Nakahara (Escola Municipal Vereador Adelino Machado de Oliveira)
- Silvana Santos (Escola Municipal Vereador Adelino Machado de Oliveira)

- Gisele Fátima Ott Ranzani (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Sonia Aparecida Lopes Gonçalves (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Glaucia de Fátima Colesel (Escola Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha - CAIC)
- Janaina Freitas da Silva (Escola Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha - CAIC)
- Patrícia Bandeira (Escola Rosazul)
- Ana Maria de Carvalho (Escola São Jorge de Ponta Grossa)
- Karine de Fátima Antunes (Escola São Jorge de Ponta Grossa)
- Lana de Cássio (Escola São Jorge de Ponta Grossa)
- Cynthia Cristine Mendes (Escola Santo Ângelo)
- Eliete Francischinelli Freitas (Escola Santo Ângelo)
- Amélia Moro (Instituto de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Ana Cristina Schirlo (Instituto de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Carlos Roberto Schebeliski (Instituto de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Ilbiamara Aparecida Rupel Bobeck (Instituto de Educação Professor César Pietro Martinez)

Escolas Participantes

Abaixo consta a relação de todas as escolas participantes da 7^a OPMat no ano de 2019:

Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa
Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas
Colégio Alfa Plus
Colégio Dynâmico
Colégio Elite Tales de Mileto
Colégio Estadual 31 de Março
Colégio Estadual Colônia Dona Luíza
Colégio Estadual Do Campo Doutor Munhoz da Rocha
Colégio Estadual Dorah Gomes Daitschman
Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas
Colégio Estadual Frei Doroteu de Padua
Colégio Estadual General Antonio Sampaio
Colégio Estadual José Elias da Rocha
Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória
Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças
Colégio Estadual Padre Arnaldo Jansen
Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki
Colégio Estadual Presidente Kennedy
Colégio Estadual Professor Becker e Silva
Colégio Estadual Professor Eugênio Malanski
Colégio Estadual Professor João Von Borell Du Vernay
Colégio Estadual Professor José Gomes do Amaral
Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico
Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres
Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá
Colégio Estadual Regente Feijó
Colégio Estadual Santa Maria
Colégio Estadual Sirley Jagas
Colégio Integração
Colégio Lobo Ponta Grossa
Colégio Marista Pio XII
Colégio Marista Santa Mônica
Colégio Pontagrossense Sepam

Colégio Positivo Master
Colégio Sagrada Família
Colégio Sagrado Coração de Jesus
Colégio Sant'Ana
Colégio São Francisco
Colégio SESI - Ponta Grossa
Colégio SESI Internacional - Ponta Grossa
Colégio Vila Militar Cescage
Escola Bom Pastor
Escola Desafio
Escola Estadual Espírito Santo
Escola Estadual Jesus Divino Operário
Escola Estadual Medalha Milagrosa
Escola Estadual Monteiro Lobato
Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba
Escola Evangélica Boas novas
Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato
Escola Municipal Catarina Miró
Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci
Escola Municipal Deodoro Alves Quintiliano
Escola Municipal Deputado Djalma de Almeida Cesar
Escola Municipal Deputado Mário Braga Ramos
Escola Municipal Doutor Carlos Ribeiro de Macedo
Escola Municipal Doutor Edgar Sponholz
Escola Municipal Doutor José Pinto Rosas
Escola Municipal Doutor Leopoldo Pinto Rosas
Escola Municipal Doutor Raul Pinheiro Machado
Escola Municipal Felício Francisquiny
Escola Municipal Fioravante Slaviero
Escola Municipal Frederico Constante Degraf
Escola Municipal Frei Elias Zulian
Escola Municipal General Aldo Bonde
Escola Municipal Guaracy Paraná Vieira
Escola Municipal Humberto Cordeiro
Escola Municipal João Maria Cruz
Escola Municipal Ludovico Antonio Egg
Escola Municipal Padre José Bugatti

Escola Municipal Pascoalino Provisiero
Escola Municipal Prefeito Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães
Escola Municipal Prefeito Cláudio Mascarenhas
Escola Municipal Prefeito Doutor Amadeu Puppi
Escola Municipal Prefeito Doutor Elyseu de Campos Mello
Escola Municipal Prefeito Doutor Fulton Vitel Borges de Macedo
Escola Municipal Prefeito Doutor Othon Mader
Escola Municipal Prefeito Doutor Plauto Miró Guimarães
Escola Municipal Prefeito Engenheiro Cyro Martins
Escola Municipal Prefeito Engenheiro Eurico Batista Rosas
Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela
Escola Municipal Prefeito Jose Bonifacio Guimarães Vilela
Escola Municipal Prefeito José Hoffmann
Escola Municipal Prefeito Major Manoel Vicente Bittencourt
Escola Municipal Prefeito Theodoro Batista Rosas
Escola Municipal Professor Aristeu Costa Pinto
Escola Municipal Professor Egdar Zanoni
Escola Municipal Professor Eloy Avrechack
Escola Municipal Professor Faris Antonio Michaele
Escola Municipal Professor Ivon Zardo
Escola Municipal Professor Jorge Dechandt
Escola Municipal Professor Kamal Tebcherani
Escola Municipal Professor Nelson Pereira Jorge
Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel
Escola Municipal Professor Paulo Grott
Escola Municipal Professor Plácido Cardon
Escola Municipal Professor Rubens Edgard Furstenberger
Escola Municipal Professor Sebastiao dos Santos E Silva
Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma
Escola Municipal Professora Agenoridas Stadler
Escola Municipal Professora Ana de Barros Holzmann
Escola Municipal Professora Armida Frare Gracia
Escola Municipal Professora Braulina Carneiro de Quadros
Escola Municipal Professora Dercia do Carmo Noviski
Escola Municipal Professora Ecléa dos Passos Horn
Escola Municipal Professora Guitil Federmann
Escola Municipal Professora Haydée Ferreira de Oliveira

Escola Municipal Professora Idalia Goes
Escola Municipal Professora Judith Macedo Silveira
Escola Municipal Professora Kazuko Inoue
Escola Municipal Professora Loise Foltran de Lara
Escola Municipal Professora Maria Antonia de Andrade
Escola Municipal Professora Maria Coutin Riesemberg
Escola Municipal Professora Maria Elvira Justus Schimidt
Escola Municipal Professora Maria Eulina Santos Scheena
Escola Municipal Professora Maria Laura Pereira
Escola Municipal Professora Maria Vitória Braga Ramos
Escola Municipal Professora Marta Filipkowski de Lima
Escola Municipal Professora Minervina França Scudlareck
Escola Municipal Professora Otacália Hasselmann de Oliveira
Escola Municipal Professora Ruth Holzmann
Escola Municipal Professora Shirley Aggi Moura
Escola Municipal Professora Zair Santos Nascimento
Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Schnirmann
Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach
Escola Municipal Protazio Scheifer
Escola Municipal Senador Flávio Carvalho Guimarães
Escola Municipal São Jorge
Escola Municipal Vereador Adelino Machado de Oliveira
Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins
Escola Municipal Zanoni Rogoski
Escola Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha - CAIC
Escola Rosazul
Escola Santo Ângelo
Escola São Jorge de Ponta Grossa
Instituto Estadual de Educação Professor César Pietro Martinez

Nível Júnior

Questões Objetivas

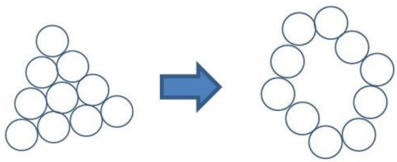
Problema 1. Num cesto haviam 30 amoras. Luíza comeu um quinto das amoras. Das amoras que sobraram no cesto, Cláudio comeu um terço. José comeu metade da quantidade que Cláudio comeu. Portanto, José comeu:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 8

Problema 2. Papai deve $R\$\,120,00$. Ontem, ele pagou 60% dessa dívida. Quantos reais ele ainda deve?

a) $R\$\,40,00$ b) $U\$\,40,00$ c) $R\$\,72,00$ d) $R\$\,48,00$ e) $R\$\,60,00$

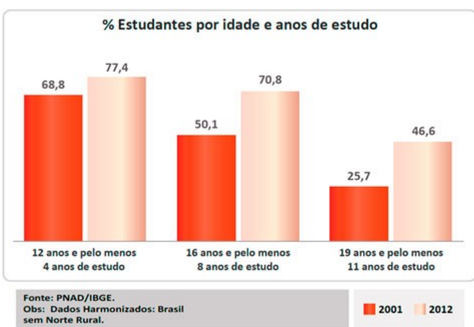
Problema 3. Dez moedas estão sobre a mesa dispostas num formato triangular.



Qual o menor número de moedas que devem ser movidas para obter a figura mostrada acima?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

Problema 4. Analisando o gráfico



Podemos concluir que:

a) Em 2001, $70,8\%$ dos estudantes com 16 anos tinham, pelo menos, 8 anos de estudo.

b) Em 2012, $68,8\%$ dos estudantes com 12 anos tinham, pelo menos, 4 anos de estudo.

c) Em 2001, $50,1\%$ dos estudantes com 19 anos tinham, pelo menos, 8 anos de estudo.

d) Em 2012, $70,8\%$ dos estudantes com 16 anos tinham, pelo menos, 8 anos de estudo.

e) Em 2001, $25,7\%$ dos estudantes com 19 anos tinham, pelo menos, 8 anos de estudo.

Problema 5. $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$ é o mesmo que

a) 2 b) $\frac{11}{14}$ c) $\frac{123}{60}$ d) $\frac{223}{60}$ e) Nenhum dos valores anteriores

Problema 6. Um número dividido por 7 deixa resto 5. O mesmo número dividido por 9 deixa resto 1. Um dos números que tem essa propriedade é:

a) 15 b) 19 c) 26 d) 37 e) Nenhum dos valores anteriores

Gabarito das Questões Objetivas

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
b	d	b	d	d	b

Questões Discursivas

Problema 1. Nos itens abaixo, são propostos dois problemas com veículos motorizados: carros e motocicletas.

a) Um caminhão-guincho é capaz de transportar um carro ou quatro motocicletas em cada viagem. Hoje, ele fez 3 viagens e transportou nove veículos. Quantos carros e quantas motocicletas, o caminhão transportou hoje?

b) Um caminhão-cegonha transporta 10 carros ou 36 motocicletas em cada viagem. Semana passada, o caminhão fez 6 viagens transportando um total de 164 veículos. Quantos carros e quantas motocicletas, o caminhão transportou na semana passada?

Problema 2. Pablo inicia uma corrente, enviando uma mensagem de Feliz Natal no “messenger" do “facebook" para seu amigo Silas, que envia duas mensagens para pessoas distintas. Cada uma dessas pessoas envia duas mensagens para outras duas pessoas distintas e assim por diante. Isto é, cada pessoa que recebe uma mensagem deve enviá-la para duas outras pessoas diferentes de todas que já receberam essa mensagem.

a) Portanto, logo depois da terceira remessa, qual será o número total de pessoas que recebeu a mensagem?

b) Qual será o número total de pessoas que terão recebido a mensagem de Feliz Natal após a décima remessa?

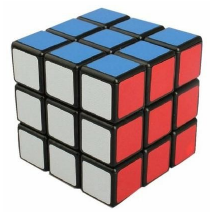
Problema 3. Vamos brincar um pouco com as idades das pessoas.

a) Hoje, a soma das idades de Marcos e Raquel é 20 anos. Após 4 anos qual será a soma das idades dos dois?

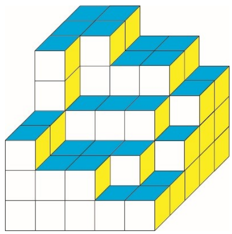
b) Há cinco anos, a soma das idades de João e Carla era 23 anos. Hoje, João tem 15 anos. Dentro de quantos anos Carla terá 23 anos?

Problema 4. Imagine que temos um monte de cubinhos que podemos juntar para formar cubos maiores. Por exemplo, juntando 8 cubinhos podemos formar um cubo $2 \times 2 \times 2$.

a) Quantos cubinhos temos que juntar para formar um cubo $3 \times 3 \times 3$?



b) Quantos cubinhos temos que juntar para formar a figura abaixo?



Gabarito das Questões Discursivas

Problema 1. *(Resolução de Lucas Maeda Kataoka - Colégio Alfa Plus)*

a) Sabemos que o caminhão-gincho só é capaz de transportar um carro ou 4 motos por viagem e que, certo dia, ele transportou 9 veículos. Então, precisamos descobrir quantos veículos de cada tipo ele transportou, sabendo que ele fez 3 viagens. Se considerarmos todas as somas de 3 algarismos que dão 9, a única que usa apenas os algarismos 1 e 4 é: $9 = 1 + 4 + 4$. Então, ele transportou 1 carro; 4 motos e 4 motos nas 3 viagens.

1 carro ou 4 motos
$\downarrow$
1 viagem

9 veículos
$\downarrow$
3 viagem

$9 = 1 + 1 + 7$

$9 = 1 + 2 + 6$

$9 = 1 + 3 + 5$

$\boxed{9 = 1 + 4 + 4}$

b) Sabemos que o caminhão cegonha só é capaz de transportar 10 carros ou 36 motos por viagem e que, certo dia, ele transportou 164 veículos. Então, precisamos descobrir quantos veículos de cada tipo ele transportou, sabendo que ele fez 6 viagens. Se considerarmos todas as somas com os algorismos 10 e 36 que tem 6 parcelas, a única que dá 164 é $164 = 10 + 10 + 36 + 36 + 36 + 36$. Logo, ele transportou 10 carros em duas das viagens, e 36 em quatro delas.

10 carro ou 36 motos
$\downarrow$
1 viagem

164 veículos
$\downarrow$
6 viagem

$10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60$

$10 + 10 + 10 + 36 + 36 + 36 = 138$

$10 + 10 + 36 + 36 + 36 + 36 = 164$

Problema 2. *(Resolução de André Jun Sumikawa - Colégio Pontagrossense Sepam)*

a) $1 + 2 + 4 = 7$. O número total de pessoas que receberam a mensagem foi de 7 pessoas, porque eu somei o envio do Pablo da mensagem, as duas mensagens do Silas e das pessoas distintas.

b) $1+2+4+8+16+32+64+128+256+512 = 1023$. Após a 10^a remessa, 1023 pessoas terão recebido a mensagem, porque a primeira remessa multipliquei por 2, a segunda multipliquei por 2 até chegar na 10^a remessa.

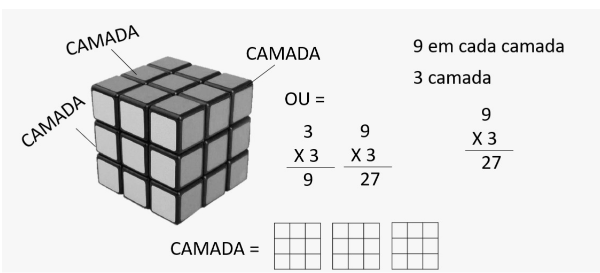
Problema 3. *(Resolução de Izabela Aparecida Lendzion - Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach)*

a) Após 4 anos a soma será 28 anos. Eu pensei que soma é daqui 4 anos cada um envelhecerá 4 anos então da no total 28 anos.

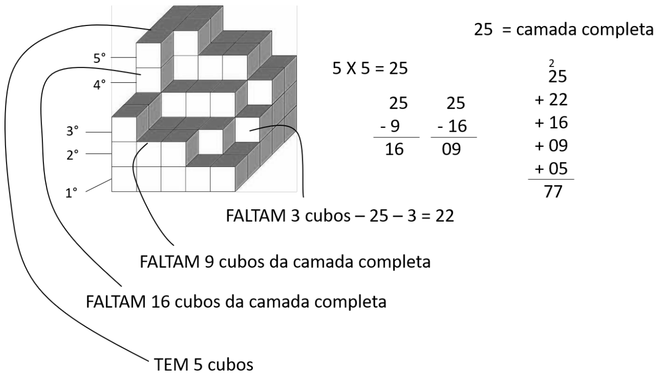
b) Dentro de mais 5 anos, porque a soma de 23 foi a cinco anos atrás então João tinha 10 anos e Carla tinha 13 então como já se passou 5 anos Carla tem 18 então falta 5 anos para Carla completar 23 anos.

Problema 4. *(Resolução de Lucas Ferreira - Colégio Pontagrossense Sepam)*

a) Temos que juntar 27 cubinhos para montar o cubo $3 \times 3 \times 3$.



b) Tem 77 cubos na figura abaixo.


5°
4°
3°
2°
1°
25 = camada completa
5 X 5 = 25
25 - 9 = 16
25 - 16 = 09
2
25
+ 22
+ 16
+ 09
+ 05
77
FALTAM 3 cubos – 25 – 3 = 22
FALTAM 9 cubos da camada completa
FALTAM 16 cubos da camada completa
TEM 5 cubos

Nível 1

Primeira Fase

Problema 1. Seja $N = \frac{1}{2019} + \frac{2}{2019} + \frac{3}{2019} + \frac{4}{2019} + \frac{5}{2019}$. O valor de N pode ser representado pela fração:

a) $\dfrac{14}{2019}$ b) $\dfrac{5}{673}$ c) $\dfrac{15}{673}$ d) $\dfrac{3}{673}$ e) Nenhuma das alternativas anteriores

Problema 2. João tem três irmãs. João e Maria são amigos, mas não são irmãos. O número de irmãos que Maria tem é igual ao dobro do número de irmãs que o João tem. Se todas essas pessoas estiverem juntas dentro de uma sala, quantas pessoas há na sala:

a) 7 b) 9 c) 11 d) 14 e) 15

Problema 3. Uma caixa contém 54 bolas brancas. Raimunda tirou um terço das bolas e colocou numa sacola. Emengardo viu, tirou um terço das bolas que estavam na sacola e devolveu para a caixa. Após esses fatos ficaram:

a) 42 bolas na sacola.

b) 12 bolas na caixa.

c) 42 bolas na caixa.

d) 10 bolas na sacola.

e) 18 bolas na sacola.

Problema 4. A soma de todos os números ímpares entre 0 e 20 ao ser dividida pela quantidade de ímpares que há entre 0 e 20 produz o número:

a) 20 b) 32 c) 100 d) 50 e) 10

Problema 5. Quantos números de 4 algarismos da forma $1a2b$ são múltiplos de 2 e 5?

a) 2 b) 5 c) 1 d) 10 e) 9

Problema 6. O resultado da multiplicação $\frac{2019}{2020} \times \frac{2020}{2021} \times \frac{2021}{2022}$ é:

a) $\dfrac{2018}{2020} + \dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{673}{674}$ c) $\dfrac{2020}{2021}$ d) $\dfrac{674}{673}$ e) 1

Problema 7. João tem 21 carrinhos azuis e verdes numa caixa, sendo que mais da metade deles são azuis e um terço deles são verdes. João está brincando com metade dos seus carrinhos azuis, portanto sobraram na caixa:

a) 7 azuis e 14 verdes

b) 6 azuis e 7 verdes

c) 7 azuis e 7 verdes

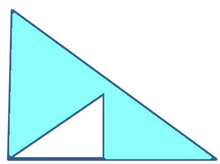
d) 14 azuis e 7 verdes

e) 10 azuis e 2 verdes

Problema 8. A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é:

a) 90^o b) 120^o c) 180^o d) 240^o e) 360^o

Problema 9. Na figura abaixo, ambos os triângulos são retângulos. Os menores lados do maior triângulo medem $8\,cm$ e $7\,cm$. Já os menores lados do outro triângulo medem $4\,cm$ e $3\,cm$.



A área da região pintada é:

a) $44\,cm^2$ b) $33\,cm^2$ c) $22\,cm^2$ d) $20\,cm^2$ e) $11\,cm^2$

Problema 10. Edernaldo tem o dobro da idade de Carmência mais cinco anos. Edernaldo tem metade da idade do seu avô de setenta anos. Qual é a idade de Carmência?

a) 5 anos b) 10 anos c) 15 anos d) 20 anos e) 8 anos

Problema 11. João joga um dado comum, no qual cada face possui uma pontuação distinta, de 1 a 6, e cuja soma dos pontos em faces opostas é 7. A seguir, anota o total de pontos da face superior e da face imediatamente à sua frente. Ao somar esses valores, qual alternativa abaixo apresenta resultados que João poderá obter?

a) 2 e 5 b) 7 e 8 c) 8 e 10 d) 6 e 12 e) 5 e 13

Problema 12. Duas escolas A e B pretendem levar seus alunos formandos para assistir um filme. Coincidentemente, ambas as escolas compraram os ingressos para a mesma sala e sessão. A escola A comprou pacotes promocionais de 3 ingressos cada, enquanto a escola B comprou pacotes de 5 ingressos cada. Ao todo, o cinema vendeu 72 pacotes promocionais para as escolas A e B. A sala escolhida ficou totalmente lotada, com todos os seus 260 assentos ocupados. Todos os alunos formandos das duas escolas assistiram ao filme. Quantos alunos formandos de uma escola tem a mais do que a outra?

a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

Problema 13. Sabe-se que $111 = 3 \times 37$. Quantos algarismos tem o próximo número da forma $11\ldots1$; isto é, cujos algarismos são todos iguais a 1, e que também é divisível por 37?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Problema 14. 2, 3, 5 e 7 são os números naturais primos de um algarismo. Quantos números naturais primos de um algarismo são tais que o sucessor de seu sucessor é um quadrado perfeito?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Nenhum

Problema 15. Qual a soma dos algarismos do menor número natural não nulo, múltiplo de 5 e cujo quadrado é múltiplo de 3?

a) 8 b) 9 c) 10 d) 12 e) 6

Problema 16. André, Bernardo, Caetano e Diadema resolveram fazer um piquenique num parque. Eles combinaram que cada um deles deveria levar pães e um pote de geleia. Ao chegarem, perceberam que um deles esqueceu de levar seu pote de geleia de morango. Então cada um deles afirma o seguinte:

- Foi Diadema quem esqueceu o pote de geleia, diz Caetano;
- Foi Caetano quem esqueceu o pote de geleia, diz André;
- Eu não esqueci meu pote de geleia, diz Bernardo;
- André não tem razão no que disse, diz Diadema.

Sabe-se que apenas um deles não falou a verdade. Quem esqueceu de trazer o pote de geleia de morango ao piquenique?

a) André

b) Bernardo

c) Caetano

d) Diadema

e) As informações não são suficientes para deduzir quem foi.

Problema 17. Se x é o menor número natural que quando dividido por 5, por 4 e por 3 deixa resto 1, então o resto da divisão de x por 7 é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 6

Problema 18. Um tanque de água possui duas torneiras A e B, a torneira A para encher o tanque e a torneira B para esvaziar o tanque. A torneira A, com a torneira B desligada, enche o tanque em 40 min. Com o tanque cheio e a torneira A desligada, a torneira B esvazia o tanque em 60 min. Se o tanque estiver vazio e as duas torneiras forem ligadas simultaneamente, depois de quanto tempo o tanque estará cheio?

a) 50 min b) 60 min c) 80 min d) 90 min e) 120 min

Problema 19. Maria foi a uma loja de brinquedos para comprar uma bola e uma boneca. Analisando os preços, verificou que uma boneca custava o preço de duas bolas mais R\$ $4,00$ e que se comprasse duas bolas e uma boneca pagaria R\$ $36,00$. Logo, quanto Maria pagaria se comprasse apenas uma bola e uma boneca?

a) R\$ $18,00$ b) R\$ $21,00$ c) R\$ $28,00$ d) R\$ $32,00$ e) R\$ $35,00$

Problema 20. Multiplicando os números naturais: $2A$ e $B9$, de dois algarismos, obtemos o número de três algarismos $A1B$. Logo, se adicionarmos os dois números $2A$ e $B9$, obtemos o número:

a) 46 b) 57 c) 62 d) 74 e) 86

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
b	c	c	e	d	b	c	c	c	c
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
b	d	c	b	e	d	Anulada	e	c	b

Segunda Fase

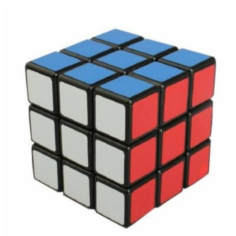
Problema 1. Vamos brincar um pouco com as idades das pessoas.

a) Hoje, a soma das idades de Marcos e Raquel é 20 anos. Após 4 anos qual será a soma das idades dos dois? (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

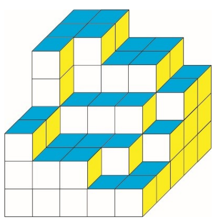
b) Há cinco anos, a soma das idades de João e Carla era 23 anos. Hoje, João tem 15 anos. Dentro de quantos anos Carla terá 23 anos? (Não se esqueça de explicar como você pensou.)

Problema 2. Imagine que temos um monte de cubinhos que podemos juntar para formar cubos maiores. Por exemplo, juntando 8 cubinhos podemos formar um cubo $2 \times 2 \times 2$.

a) Quantos cubinhos temos que juntar para formar um cubo $3 \times 3 \times 3$?



b) Quantos cubinhos temos que juntar para formar a figura abaixo?



Problema 3. Vamos verificar se você é craque em dividir.

a) 61 dividido por sete deixa resto cinco, mas quando dividido por seis, ele deixa resto um. Porém 61 não é o menor número inteiro que tem essa propriedade. Encontre o menor número inteiro positivo que tem a propriedade citada acima.

b) Joãozinho abriu um pacote de balas e observou que quando dividia as balas em seis montes,com quantidades iguais em cada monte, sobravam 3 balas no pacote. Quando dividia em cinco montes, restavam 2 balas no pacote. Quando dividia em quatro montes, sobrava apenas uma bala no pacote. Mas quando dividia em três montes, o pacote ficava vazio. Quantas balas haviam no pacote fechado?

Problema 4. Numa escola, um terço dos alunos gostam somente de Matemática, um quinto gostam somente de História, 300 alunos gostam de ambas as disciplinas e um quinze avos dos alunos detestam ambas as disciplinas.

a) Quantos alunos têm na escola?

b) Quantos alunos gostam de Matemática?

c) Quantos alunos gostam de apenas uma das disciplinas?

Problema 5. Vamos lidar com números decimais.

a) Se transformarmos a fração $\frac{3}{22}$ num número decimal, quantas vezes o 6 aparece nos 100 primeiros algarismos após a vírgula?

b) Se transformarmos a fração $\frac{19}{7}$ num número decimal, qual será o 2019^o algarismo que aparecerá após a vírgula?

Problema 6. Várias cartas iguais, que possuem uma face na cor branca e outra na cor preta, são colocadas lado a lado sob uma mesa, inicialmente todas com a face branca voltada para cima. Uma operação consiste em pegar duas cartas adjacentes (consecutivas) e virá-las.

a) Iniciando com 8 cartas com a face branca voltada para cima, é possível exibir uma sequência de operações que deixe exatamente 3 cartas com a face branca voltada para cima? Se sim, exiba uma; caso contrário, justifique.

b) Iniciando com 2019 cartas com a face branca voltada para cima, é possível fazer com que todas fiquem com a face preta voltada para cima após realizar uma sequência de operações?

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Ana Júlia da Silva - Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)*

a) Hoje: M + R $= 20$ M $= 12+4 = 16$ R $= 8+4 = 12$ $\Rightarrow$ $16+12 = 28$
A soma da idade dos dois daqui a 4 anos será igual a 28, pois se hoje a soma dá 20, daqui a 4 anos cada um terá 4 anos a mais e $20 + 4 + 4 = 28$.

b) J $= 15 - 5 = 10 + 13 = 23$ $13 + 5 = 18 + 5 = 23$
Se hoje João em 15 anos, 5 anos atrás ele tinha 10 e há 5 anos a soma sa idade dele (10) com a de Carla era 23, é só fazer $23 - 10 = 13$. Então, 5 anos atrás, Carla tinha 13 anos e hoje, ela tem 18, pois $13 + 5 = 18$. Como Carla tem 18 anos, faltam 5 anos para ela ter 23 anos de idade.

Problema 2. *(Resolução de Ana Marcela Reis de Freitas - Colégio Pontagrossense Sepam)*

a) Temos que juntar 27 cubinhos. Pois nós temos 3 dimensões largura, altura e comprimento. De largura 3, altura 3 e comprimento 3 também. Logo, devemos multiplicar tudo, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

b) Se estivesse inteiro: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Está faltando 48, pois $125 - 48 = 77$. Precisamos de 77 cubinhos, pois se a figura estivesse inteira, nós precisaríamos 125, mas como está faltando 48 cubos (eu contei), nós devemos subtrair $125 - 48 = 77$.

Problema 3. *(Resolução de Ana Júlia da Silva - Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)*

a) O menor número inteiro é 19, pois se dividido por 7 deixa resto 5 e se dividido por 6 deixa resto 1. Para resolver fui fazendo por tentativa e erro todos os números que não são múltiplos nem de 7, nem de 6 e cheguei na conclusão que é 19.

b) $\dfrac{x}{6}$ deixa resto 3, $\dfrac{x}{5}$ deixa resto 2, $\dfrac{x}{4}$ deixa resto 1, $\dfrac{x}{3}$ deixa resto 0.
Haviam 57 balas no pacote fechado, para descobrir fui efetuando as divisões com todos os múltiplos de 3, que não eram múltiplos nem de 6, nem de 5, nem de 4, o único que funcionou foi o 57.

Problema 4. *(Resolução de Eduardo Dimbarre Ingles - Colégio Alfa Plus)*

a) 750 alunos pois:
$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}+\frac{1}{15}=\frac{9}{15}$, então $\frac{6}{15}=300$.
$\frac{1}{15}=\frac{300}{6}=50$.
$50\cdot 15=x\Rightarrow x=750$.

b) 550 alunos, pois $\frac{5}{15}$ dos alunos gostam de Matemática, e como $\frac{1}{5}=50$, $50\cdot 5$ é o número de alunos que gostam apenas de Matemática, que é 250, mais os alunos que gostam de ambas as matérias (300), é igual a 550.

c) 400 alunos, pois 250 (alunos que gostam apenas de Matemática), pois $\frac{3}{15}=150$ (alunos que gostam somente de História), é igual a 400.

Problema 5. *(Resolução de João Gustavo Verner Eidam - Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)*

a) 49 vezes, pois tirando o número 1 do quociente, restam somente 9 e como começa em 3 terminaria em 3, então aparece 49 vezes.

$30\div 22=0,136363636$.

b) 4, pois são 6 algarismos que se repetem, então $2019\div 6=336$ vezes que terminam em 5, pula três algarismos (resto da divisão) e chega no 4.

$19\div 7=2,714285$ com resto 5 e $2019\div 6=336$ com resto 3.

Problema 6. *(Resolução de Manuella Louize Pasturczaki Schade - Colégio Pontagrossense Sepam)*

a) Não, pois se uma operação consiste em virar 2 cartas e na mesa há 8 cartas, não é possível. Com 1 operação, ficará 6 cartas brancas na mesa, com 2 operações ficará 4 cartas brancas na mesa, com 3 operações ficará apenas 2 cartas brancas em cima da mesa. Além disso, os dois números são pares.

B B B B B B B B

b) Não, pois as operações só são realizadas com duas cartas na mesa. E por 2019 ser um número ímpar, mesmo com o número máximo de operações feitas, irá restar uma carta branca na mesa.

Nível 2

Primeira Fase

Problema 1. Seja N = $\frac{1}{2019} + \frac{2}{2019} + \frac{3}{2019} + \frac{4}{2019} + \frac{5}{2019}$. O valor de N pode ser representado pela fração:

a) $\dfrac{14}{2019}$ b) $\dfrac{5}{673}$ c) $\dfrac{15}{673}$ d) $\dfrac{3}{673}$ e) Nenhuma das frações anteriores.

Problema 2. João tem três irmãs. João e Maria são amigos, mas não são irmãos. O número de irmãos que Maria tem é igual ao dobro do número de irmãs que o João tem. Se todas essas pessoas estiverem juntas dentro de uma sala, quantas pessoas há na sala:

a) 7 b) 9 c) 11 d) 14 e) 15

Problema 3. Uma caixa contém 54 bolas brancas. Raimunda tirou um terço das bolas e colocou numa sacola. Emengardo viu, tirou um terço das bolas que estavam na sacola e devolveu para a caixa. Após esses fatos ficaram:

a) 42 bolas na sacola.

b) 12 bolas na caixa.

c) 42 bolas na caixa.

a) 10 bolas na sacola.

a) 18 bolas na sacola.

Problema 4. A soma de todos os números ímpares entre 0 e 20 ao ser dividida pela quantidade de ímpares que há entre 0 e 20 produz o número:

a) 20 b) 32 c) 100 d) 50 e) 10

Problema 5. Quantos números de 4 algarismos da forma $1a2b$ são múltiplos de 2 e 5?

a) 2 b) 5 c) 1 d) 10 e) 9

Problema 6. O resultado da multiplicação: $\frac{2019}{2020} \times \frac{2020}{2021} \times \frac{2021}{2022}$ é:

a) $\dfrac{2018}{2020} + \dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{673}{674}$ c) $\dfrac{2020}{2021}$ d) $\dfrac{674}{673}$ e) 1

Problema 7. Jacinto tem 21 carrinhos azuis e verdes numa caixa, sendo que mais da metade deles são azuis e um terço deles são verdes. João está brincando com metade dos seus carrinhos azuis, portanto sobraram na caixa:

a) 7 azuis e 14 verdes

b) 6 azuis e 7 verdes

a) 7 azuis e 7 verdes

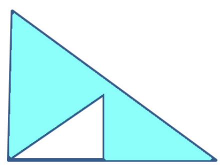
a) 14 azuis e 7 verdes

a) 10 azuis e 2 verdes

Problema 8. A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é:

a) 90^o b) 120^o c) 180^o d) 240^o e) 360^o

Problema 9. Na figura abaixo, ambos os triângulos são retângulos. Os menores lados do maior triângulo medem $8\,cm$ e $7\,cm$. Já os menores lados do outro triângulo medem $4\,cm$ e $3\,cm$.



A área da região pintada é:

a) $44\,cm^2$ b) $33\,cm^2$ c) $22\,cm^2$ d) $20\,cm^2$ e) $11\,cm^2$

Problema 10. Edernaldo tem o dobro da idade de Carmência mais cinco anos. Edernaldo tem metade da idade do seu avô de setenta anos. Qual é a idade de Carmência?

a) 5 anos b) 10 anos c) 15 anos d) 20 anos e) 8 anos

Problema 11. Uma prova de matemática tem no total 20 questões de múltipla escolha. Cada resposta correta vale 15 pontos, e a cada resposta errada o aluno perde 4 pontos. Rafael, Carolina e José responderam todas as perguntas do questionário, e a nota média dos 3 foi 167, que coincidiu com a nota obtida por Carolina. Sabendo que

José tirou a menor nota entre os 3, e que Rafael acertou 4 questões a mais que José, qual foi a porcentagem de acertos de questões de Rafael nessa prova?

a) 55% b) 65% c) 75% d) 80% e) 85%

Problema 12. No planeta Omabcelândia, há duas populações: os alienenses e os etelvinos. Sabendo-se que 83% dos alienenses são pobres e 83% dos pobres são alienenses, pode-se firrmar com certeza que:

a) Há a mesma quantidade de alienenses ricos e de etelvinos ricos.

b) Há a mesma quantidade de alienenses pobres e de etelvinos ricos.

c) Há mais alienenses pobres do que etelvinos ricos.

d) Há a mesma quantidade de alienenses ricos e de etelvinos pobres.

e) Há mais alienenses ricos do que etelvinos pobres.

Problema 13. No campeonato interclasses de futebol do colégio de Marquinhos, os times jogaram no sistema de ida e volta, ou seja, cada equipe enfrentou a outra por duas vezes, e empates não são permitidos (se uma partida termina empatada, é realizada uma disputa de pênaltis para decidir o vencedor). Pelas regras, o vencedor ganha 2 pontos, e o perdedor ganha 1 ponto. Se ao final do campeonato o time de Marquinhos foi campeão e a soma dos pontos obtidos por todas as equipes foi 2019, quantos pontos o time de Marquinhos obteve?

a) 75 b) 81 c) 84 d) 87 e) 91

Problema 14. Quantos números de 100 a 999 contém exatamente dois dígitos que são iguais?

a) 143 b) 162 c) 243 d) 324 e) 343

Problema 15. Seja ABC um triângulo retângulo em C com catetos de medidas $35\,cm$ e $23\,cm$. Seja $ADEF$ o quadrado no qual os vértices B e C estão em EF e em ED, respectivamente. A medida do lado desse quadrado é:

a) $\dfrac{1225}{23}$ b) $\dfrac{1369}{37}$ c) $\dfrac{1369}{35}$ d) $\dfrac{2594}{35}$ e) $\dfrac{1225}{37}$

Problema 16. Na festa de aniversário de Tenório, estão presentes 150 pessoas. Sabe-se que 127 delas comeram brigadeiro, 83 comeram beijinho, 104 comeram cajuzinho e 71 comeram camafeu de nozes. Qual é a quantidade mínima de pessoas que se pode assegurar que comeram os quatro tipos de doce na festa de Tenório?

a) 2 b) 5 c) 8 d) 10 e) 15

Problema 17. Duas escolas A e B pretendem levar seus alunos formandos para assistir a um filme. Coincidentemente, ambas as escolas compraram os ingressos para a mesma sala e sessão. A escola A comprou pacotes promocionais de 3 ingressos cada, enquanto a escola B comprou pacotes de 5 ingressos cada. Ao todo, o cinema vendeu 72 pacotes promocionais para as escolas A e B. A sala escolhida ficou totalmente lotada, com todos os seus 260 assentos ocupados. Todos os alunos formandos das duas escolas assistiram ao filme. Quantos alunos formandos uma escola tem a mais do que a outra?

a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

Problema 18. João tem 21 carrinhos, sendo que mais da metade deles são pretos e um terço dos restantes são amarelos. João brincou com todos os seus carrinhos durante uma semana inteira, utilizando exatamente 3 em cada dia, de modo que ele não usasse mais do que dois carrinhos pretos por dia. Quantos carros de João não são nem amarelos nem pretos?

a) 3 b) 4 c) 6 d) 8 e) 12

Problema 19. Sabe-se que $111 = 3 \times 37$. Quantos algarismos tem o próximo número da forma $11\ldots1$; isto é, cujos algarismos são todos iguais a 1, e que também é divisível por 37?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Problema 20. Gabriel precisa transportar quatro caixas: A, B, C e D para o 7^o andar do prédio em que mora. O elevador de seu condomínio tem capacidade máxima para $380\,kg$. Sabe-se que:

- A caixa A é a mais pesada de todas, e se as outras caixas pesassem tanto quanto ela, Gabriel não poderia levá-las de uma vez, pois ultrapassaria a carga máxima permitida no elevador.
- A caixa B é a mais leve e Gabriel poderia transportar até 6 caixas iguais a ela nesse elevador.
- A caixa C pesa $17\,kg$ a menos do que a caixa A e apenas $3\,kg$ a menos que a caixa D.

- A caixa D pesa $26\,kg$ a mais do que a caixa B e os pesos de A e B são múltiplos de 5.

Qual é o peso total das quatro caixas?

a) $100\,kg$ b) $323\,kg$ c) $343\,kg$ d) $380\,kg$ e) $400\,kg$

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
b	c	c	e	d	b	c	c	c	c
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
c	d	Anulada	c	e	Anulada	d	c	c	Anulada

Segunda Fase

Problema 1. Numa escola, um terço dos alunos gostam somente de Matemática, um quinto gostam somente de História, 300 alunos gostam de ambas as disciplinas e um quinze avos dos alunos detestam ambas as disciplinas.

a) Quantos alunos têm na escola?

b) Quantos alunos gostam de Matemática?

c) Quantos alunos gostam de somente uma das disciplinas?

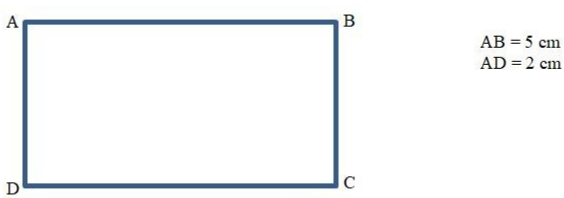
Problema 2. Vamos lidar com números decimais.

a) Se transformarmos a fração $\frac{3}{22}$ em um número decimal, quantas vezes o 6 aparece nos 100 primeiros algarismos após a vírgula?

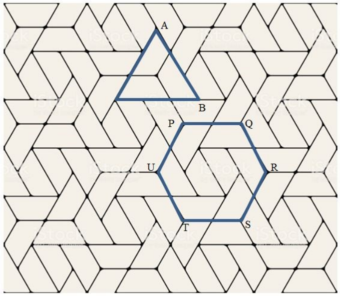
b) Se transformarmos a fração $\frac{19}{7}$ em um número decimal, qual será o 2019º algarismo que aparecerá após a vírgula?

Problema 3. Geometria, sempre ela.

a) Um triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo interno reto, isto é, medindo 90°. Num triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras nos garante que o quadrado do maior lado é a soma dos quadrados dos lados menores. Use essa informação para calcular a medida da diagonal do retângulo abaixo.



b) Na figura abaixo, $AB = 4\,cm$. Calcule a área do hexágono regular $PQRSTU$.



Problema 4. Joãozinho foi à feira para comprar laranjas e bananas para sua mãe levando uma certa quantia em dinheiro. Quando chegou lá, percebeu que havia esquecido quantas dúzias de cada fruta sua mãe pediu para comprar. Fazendo umas continhas rápidas, Joãozinho percebeu que se comprasse duas dúzias de laranjas e três dúzias de bananas sobraria R$1,00 e se comprasse uma dúzia de laranjas e uma dúzia de bananas, sobraria R$7,50. Por fim, Joãozinho, o menino esquecido, acabou lembrando que sua mãe pedira para comprar meia dúzia de laranjas e uma dúzia de bananas. Ele efetuou a compra solicitada. Sem saber a quantia que Joãozinho levou, calcule quanto Joãozinho pagou pela compra?

Problema 5. Um pouco de álgebra.

a) Prove que $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

b) Se $xy = -1$ e $x^{2018}y^{2019} + x^{2019}y^{2018} + x + y = 10$, calcule $x^2 + y^2$.

Problema 6. A milhões de anos-luz do nosso planeta Terra há um gigantesco planeta que possui 6730673067306730674 habitantes. Nesse planeta há um único rei que governa todos os demais habitantes, chamados de súditos. Esse rei possui 20192019201920192019 moedas de ouro.

a) O rei ordenou que todos os súditos fizessem a conta $365 \times 10001000100010001$. Qual é o resultado correto que todos os súditos deviam obter?

b) O rei, num momento de imenso altruísmo, resolveu distribuir todas as suas moedas de ouro igualmente entre os súditos. Quantas moedas de ouro cada súdito recebeu?

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Isabella Yukari Fujita - Escola Estadual Medalha Milagrosa)*

a) Como não sabemos o total de alunos, chamamos o tal de x. Se x equivale a soma de alunos que gostam de Matemática, História, as 2 disciplinas ou nenhuma. Temos:

   $x - \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + 300 + \frac{1}{15}x$ (multiplica ambos os lados por 15 para sumir o denominador)

   $15x = 3x + 5x + 4500 + x$ (isola a letra)

   $6x = 4500$

   $x = \frac{4500}{6}$

   $x = 750$ Portanto, há 750 alunos na escola.

b) De acordo com a letra "a", chegamos ao resultado de 750 alunos no total. Se apenas $\frac{1}{3}$ do total de alunos gosta de Matemática, temos $\frac{1}{3}$ de $750 = 250$ alunos. Mas, temos que considerar os alunos que gostam de ambas disciplinas pois a Matemática está incluída. No caso são 300 alunos. Logo, $250 + 300 = 550$ alunos gostam de Matemática.

c) Se estamos contando os alunos que gostam de apenas uma disciplina, temos duas possibilidades:

   - os que gostam APENAS de Matemática;

   - os que gostam APENAS de História.

   Assim, teremos:

   MATEMÁTICA ($\frac{1}{3}$ dos alunos): $\frac{1}{3}$ de $750 = 250$ alunos

   HISTÓRIA ($\frac{1}{5}$ dos alunos): $\frac{1}{5}$ de $750 = 150$ alunos

   Logo, $250 + 150 = 400$ alunos.

Problema 2. *(Resolução de Vinicius Scremin - Colégio Marista Pio XII)*

a) Primeiramente, devemos fazer a divisão de $\frac{3}{22}$.

   $3/22 = 0,13636...$

Percebe-se que, depois da casa do décimo, repetem-se por diversas vezes 36 nas casas. Como a 1^a casa é 1, há 99 casa a serem ocupadas por essa dízima periódica. Portanto, devemos, para descobrir a quantidade de vezes que 36 aparecerá, fazer $\frac{100-1}{2} = \frac{99}{2} = 49,5$. Como o resultado teve 5 na casa dos décimos, o 1^o número da dízima se repetirá 1 vez a mais que 49, ou seja, o 3 aparecerá 50 vezes e o 6, 49 vezes.

b) Devemos dividir 19 por 7 primeiramente:

$19/7 = 2,71428571...$

Percebemos que a dízima 714285 se repetirá por diversas vezes na equação. Para saber qual será o algarismo que estará na casa x, devemos saber que: (usando a congruência, já que são 6 números que se repetem infinitamente)

Se:

$x \equiv 1(mod\,6)$, o nº da casa é 7.

$x \equiv 2(mod\,6)$, o algarismo da casa é 1.

$x \equiv 3(mod\,6)$, o algarismo da casa é 4.

$x \equiv 4(mod\,6)$, o algarismo da casa é 2.

$x \equiv 5(mod\,6)$, o algarismo da casa é 8.

$x \equiv 6ou0(mod\,6)$, o algarismo da casa é 5.

$2019/6 = 336$ e o resto é 3. Portanto, $2019 \equiv 3(mod\,6)$, o que significa que o algarismo que aparecerá na 2019^a casa após a vírgula é 4.

Problema 3. *(Resolução de Ruan Eneias Ferreira - Colégio Estadual Professor Meneleu de Almeida Torres)*

a) Temos que $AD = BC = 2$ e que $AB = DC = 5$. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$(BC)^2 + (DC)^2 = (BD)^2$, no caso:

$2^2 + 5^2 = n^2$

$4 + 25 = n^2$

$29 = n^2$

$n = \sqrt{29}$ cm.

b) Para o hexágono $PQRSTU$ ser regular, todos os trapézios tem de ser iguais, logo o triângulo contornado em preto mais forte, deve ser equilátero, então teremos, que o lado dele é formado pela base maior do trapézio mais o lado do trapézio, no caso temos que a base do trapézio $2k$ e o lado k:

$2k + 1k = 4$

$3k = 4$

$k = \frac{4}{3}$

Para calcular a área do hexágono regular podemos utilizar a seguinte forma $\frac{6l^2\sqrt{3}}{4}$, substituindo teremos:

$\frac{6(\frac{8}{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\frac{64}{9}\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{64}{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$.

Problema 4. *(Resolução de Ricardo Catapan Fidelis - Colégio Sagrada Família)*

$x = 12$ laranjas $y = 12$ bananas

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = z \\ x + y + 7,50 = z \end{cases}$$

$2x + 3y + 1 = x + y + 7,50$

$x + 2y = 6,50$

$\frac{x}{2} + y = 3,25$

A resposta é $R\$\,3,25$, pois, com as informações dadas, sendo $x = 12$ laranjas e $y = 12$ bananas, sabemos que $2x + 3y + 1 = x + y + 7,50$. Sabemos disso pois com a mesma quantia de dinheiro ele fazia essas compras. Simplificando a conta, temos $x + 2y = 6,50$. Como ele queria metade disso ($\frac{x}{2} + y$), dividimos toda a conta por 2 e encontramos a resposta 3,25.

Problema 5. *(Resolução de Vinicius Scremin - Colégio Marista Pio XII)*

a) Sabemos que $(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$.

$(x + y)(x + y)$ usando a distributiva

$xx + xy + yx + yy$

$x^2 + 2xy + y^2$

Assim está provado que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

b) Sabemos que $xy = -1$ e que $x^n y^n = (xy)^n$.

Desenvolvendo a conta do enunciado para descobrir o valor de x + y:

$x^{2018}y^{2019} + x^{2019}y^{2018} + x + y = 10$

$(x^{2018}y^{2018})y + (x^{2018}y^{2018})x + x + y = 10$

$(xy)^{2018}y + (xy)^{2018}x + x + y = 10$

$(-1)^{2018}y + (-1)^{2018}x + x + y = 10$

$y + x + x + y = 10$

$2x + 2y = 10$

$x + y = 5$

Obs: Se um número negativo é elevado a uma potência par, o número fica positivo. Já se esse número negativo for elevado a uma potência ímpar, o resultado fica negativo.

Agora que descobrimos que $x + y = 5$, devemos fazer $(x + y)^2 = 5^2$, já que podemos descobrir o valor de $x^2 + y^2$ usando $xy = -1$.

$(x + y)^2 = 5^2$

$x^2 + 2xy + y^2 = 25$

$x^2 + y^2 = 25 - 2xy$

$x^2 + y^2 = 25 - 2(-1)$

$x^2 + y^2 = 25 + 2$

$x^2 + y^2 = 27$

Problema 6. *(Resolução de Walter Vieira Neto - Colégio Sagrada Família)*

a) $10001000100010001 \times 365 = 3650365036503650365$

Após multiplicar 10001000100010001 por 365, chegamos ao resultado de

$$3650365036503650365.$$

b) $2019 \div 3 = 673$

Ao dividir o número 2019 por 3, chegamos ao 673. Sendo que, de todos esses habitantes, um é o rei e, por isso, não receberá moedas, serão então 67306730673067306730673 habitantes que receberão as moedas. Como sabemos que o número de moedas é 201920192019201920192019 e que $2019 \div 3 = 673$, então cada habitante receberá 3 moedas.

Nível 3

Primeira Fase

Problema 1. Seja $N = 9 \cdot 19 \cdot 29 \cdot \cdots \cdot 2009 \cdot 2019$ o produto dos números naturais ímpares terminados em 9, de 9 a 2019. Escrevendo N na forma decimal, qual o algarismo das unidades?

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Problema 2. João tem três irmãs. João e Maria são amigos, mas não são irmãos. O número de irmãos que Maria tem é igual ao dobro do número de irmãs que o João tem. Se todas essas pessoas estiverem juntas dentro de uma sala, quantas pessoas há na sala:

a) 7 b) 9 c) 11 d) 14 e) 15

Problema 3. Uma caixa contém 54 bolas brancas. Raimunda tirou um terço das bolas e colocou numa sacola. Emengardo viu, tirou um terço das bolas que estavam na sacola e devolveu para a caixa. Após esses fatos ficaram:

a) 42 bolas na sacola.

b) 12 bolas na caixa.

c) 42 bolas na caixa.

a) 10 bolas na sacola.

a) 18 bolas na sacola.

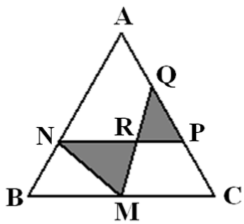
Problema 4. A soma de todos os números ímpares entre 0 e 20 ao ser dividida pela quantidade de ímpares que há entre 0 e 20 produz o número:

a) 20 b) 32 c) 100 d) 50 e) 10

Problema 5. Quantos números de 4 algarismos da forma $1a2b$ são múltiplos de 2 e 5?

a) 2 b) 5 c) 1 d) 10 e) 9

Problema 6. Na figura abaixo, o triângulo ABC é equilátero, M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, o segmento $\overline{NP}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$, os pontos M, R e Q são colineares, $AB = 3m$ e $BN = PQ = 1m$.



Logo, a área da região pintada de cinza na figura é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,m^2$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,m^2$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,m^2$ d) $\dfrac{3}{2}\,m^2$ e) $1\,m^2$

Problema 7. João tem 21 carrinhos azuis e verdes numa caixa, sendo que mais da metade deles são azuis e um terço deles são verdes. João está brincando com metade dos seus carrinhos azuis, portanto sobraram na caixa:

a) 7 azuis e 14 verdes

b) 6 azuis e 7 verdes

c) 7 azuis e 7 verdes

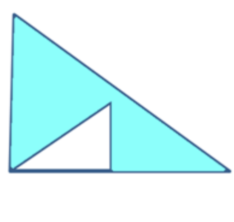
d) 14 azuis e 7 verdes

e) 10 azuis e 2 verdes

Problema 8. O número 1 é solução da equação $x^2 - 5x + c = 0$. A outra solução é:

a) -1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Nenhumas das anteriores

Problema 9. Na figura abaixo, ambos os triângulos são retângulos. Os menores lados do maior triângulo medem 8 cm e 7 cm. Já os menores lados do outro triângulo medem 4 cm e 3 cm.



a) $44\,cm^2$ b) $33\,cm^2$ c) $22\,cm^2$ d) $20\,cm^2$ e) $11\,cm^2$

Problema 10. Edernaldo tem o dobro da idade de Carmência mais cinco anos. Edernaldo tem metade da idade do seu avô de setenta anos. Qual é a idade de Carmência?

a) 5 anos b) 10 anos c) 15 anos d) 20 anos e) 8 anos

Problema 11. De quantas maneiras pode-se escrever 87 como soma de três números inteiros que estão em progressão geométrica?

a) 8 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

Problema 12. Uma prova de matemática tem no total 20 questões de múltipla escolha. Cada resposta correta vale 15 pontos, e a cada resposta errada o aluno perde 4 pontos. Rafael, Carolina e José responderam todas as perguntas do questionário, e a nota média dos 3 foi 167, que coincidiu com a nota obtida por Carolina. Sabendo que José tirou a menor nota entre os 3, e que Rafael acertou 4 questões a mais que José, qual foi a porcentagem de acertos de questões de Rafael nessa prova?

a) 55% b) 65% c) 75% d) 80% e) 85%

Problema 13. No campeonato interclasses de futebol do colégio de Marquinhos, os times jogaram no sistema de ida e volta, ou seja, cada equipe enfrentou a outra por duas vezes, e empates não são permitidos (se uma partida termina empatada, é realizada uma disputa de pênaltis para decidir o vencedor). Pelas regras, o vencedor ganha 2 pontos, e o perdedor ganha 1 ponto. Se ao final do campeonato o time de Marquinhos foi campeão e a soma dos pontos obtidos por todas as equipes foi 2019, quantos pontos o time de Marquinhos obteve?

a) 75 b) 81 c) 84 d) 87 e) 91

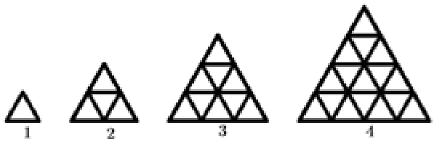
Problema 14. Sabe-se que $111 = 3 \cdot 37$. Quantos algarismos tem o próximo número da forma $11\ldots1$; isto é, cujos algarismos são todos iguais a 1, e que também é divisível por 37?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Problema 15. Na festa de aniversário de Tenório, estão presentes 150 pessoas. Sabe-se que 127 delas comeram brigadeiro, 83 comeram beijinho, 104 comeram cajuzinho e 71 comeram camafeu de nozes. Qual é a quantidade mínima de pessoas que se pode assegurar que comeram os quatro tipos de doce na festa de Tenório?

a) 2 b) 5 c) 8 d) 10 e) 15

Problema 16. Paulo desenhou uma sequência de triângulos equiláteros, como mostra a figura:



Paulo percebeu que em cada figura muitos triângulos equiláteros de vários tamanhos foram formados. Por exemplo, nos quatro primeiros triângulos, Paulo encontrou um total de 1, 5, 13 e 27 triângulos, respectivamente. Quantos triângulos equiláteros Paulo encontrará após fazer o 8^o desenho?

a) 118 b) 127 c) 148 d) 170 e) 235

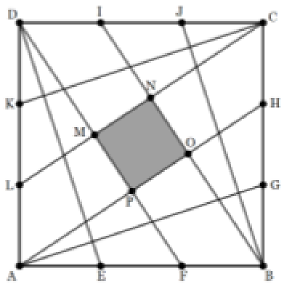
Problema 17. Seja N um número primo de três algarismos cujo resto da divisão por 8 é 7 e o resto na divisão por 5 é 2. A soma dos algarismos de N é um número cujo resto na divisão por 4 é 1 e o resto na divisão por 3 é 2. O valor de N é:

a) 207 b) 287 c) 607 d) 647 e) 727

Problema 18. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - A$, com $A = \{x \in \mathbb{R} | x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, definida por: $f(x) = \dfrac{1 + cos(5x)}{4sen^2x}$. O valor de $f(x)$ para $x = \dfrac{\pi}{7}$ é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{1}{4}$

Problema 19. No quadrado $ABCD$ da figura abaixo, os pontos E, F, G, H, I, J, K e L são tais que dividem cada lado do quadrado em três partes iguais. Considere M o ponto de interseção de DF com CL, N o ponto de interseção de BI com CL, O o ponto de interseção de BI com AH e o ponto de intersecção de AH com DF. A razão entre as áreas do quadrado $ABCD$ e do quadrado $MNOP$ é:



a) 9 b) 12 c) 13 d) 15 e) 17

Problema 20. Joãozinho resolveu fazer uma doação de bolinhas de gude, que ele e seus irmãos juntaram durante muitos anos, para os meninos de uma comunidade pobre. Ao contá-las, verificou que tinham 960 bolinhas azuis, 1080 bolinhas verdes e 1200 bolinhas marrons. Sabendo que Joãozinho preparou o maior número possível de quites iguais, de modo que cada um deles continha a mesma quantidade de bolinhas de cada cor e exatamente 4 bolinhas verdes a mais do que bolinhas azuis, então o número de quites preparados por Joãozinho foi igual a:

a) 10 b) 12 c) 30 d) 60 e) 120

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	c	c	e	d	c	c	d	c	c
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
b	c	Anulada	c	Anulada	d	d	d	c	c

Segunda Fase

Problema 1. Um pouco de álgebra.

a) Prove que $2(x+y)^2 - (x-y)^2 + (x-y)(x+y) = 2x(x+6y)$.

b) Se $xy = -1$ e $x^{2018}y^{2019} + x^{2019}y^{2018} + x + y = 10$, calcule $x^2 + y^2$.

Problema 2. A milhões de anos-luz do nosso planeta Terra há um gigantesco planeta que possui 673067306730673067306730674 habitantes. Nesse planeta há um único rei que governa todos os demais habitantes, chamados de súditos. Esse rei possui 2019201920192019201920192019 moedas de ouro.

a) O rei ordenou que todos os súditos fizessem a conta $365 \times 1000100010001001$. Qual é o resultado correto que todos os súditos deviam obter?

b) O rei, num momento de imenso altruísmo, resolveu distribuir todas as suas moedas de ouro igualmente entre os súditos. Quantas moedas de ouro cada súdito recebeu?

Problema 3. Seja n um número maior que 1:

a) Prove que $n^2 - n$ é sempre par.

b) Determine o menor valor de n tal que $n^4 - 1$ seja divisível por 2019.

Problema 4. Uma empresa comercializa kits variados de canetas nas cores preta, azul, verde ou vermelha. Sabendo que cada kit contém doze canetas, sendo pelo menos uma preta, pelo menos duas azuis, pelo menos duas verdes e pelo menos duas vermelhas, quantos kits diferentes a empresa pode disponibilizar?

Problema 5. Resolva:

a) Prove que $\dfrac{ab+cd}{2} \geqslant \sqrt{abcd}$ para $a = 3, b = 5, c = 2$, e $d = 7$.

b) Para a, b, c e d reais estritamente positivos, prove que $\dfrac{ab+cd}{2} \geqslant \sqrt{abcd}$. (Dica: Lembre-se que o quadrado de qualquer número real é positivo ou nulo).

Problema 6. Seja $S_{(n)}$ a soma dos algarismos de um número natural n. Por exemplo, $S_{(597)} = 5 + 9 + 7 = 21$.

a) Calcule $C = S_{(199)} - S_{(198)} + S_{(197)} - S_{(196)} + \cdots + S_{(189)} - S_{(188)}$.

b) Sejam $A = S^2_{(1921)} + S^2_{(1922)} + S^2_{(1923)} + S^2_{(1924)} + \cdots + S^2_{(2018)} + S^2_{(2019)}$ e $\frac{1}{2}B = S_{(1921)}S_{(1922)} + S_{(1923)}S_{(1924)} + \cdots + S_{(2017)}S_{(2018)}$. Calcule $A - B$.

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Lucas Perondi Kist - Colégio Elite Tales de Mileto)*

a) Sendo $2(x+y)^2-(x-y)^2+(x-y)(x+y)=K$

Resolvendo os produtos notáveis, temos: $2(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)+(x^2-y^2)=K$

Retirando os parênteses e agrupando os termos semelhantes, temos:

$2x^2+4xy+2y^2-x^2+2xy-y^2+x^2-y^2=K$

$2x^2+6xy=K$

Colocando $2x$ em evidência, temos:

$2x(x+3y)=K$

Logo: $K \neq 2(x+6y)$

b) Pelo enunciado, temos que:

$x^{2018}.y^{2019}+x^{2019}.y^{2018}+x+y=10$

Sendo $y^{2019}=y.y^{2018}$ e $x^{2019}=x.x^{2018}$, temos:

$(-1)^{2018}.y+(-1)^{2018}.x+x+y=10$

Como $(xy)^{2018}=x^{2018}.y^{2018}$, então:

$(xy)^{2018}.y+(xy)^{2018}.x+x+y=10$

Como $xy=-1$ e -1 elevado a expoente par é 1, então:

$(-1)^{2018}.y+(-1)^{2018}.x+x+y=10$

$y+x+x+y=10$

Agrupando os termos semelhantes:

$2x+2y=10$

$x+y=5$

Elevando os membros ao quadrado:

$(x+y)^2=5^2$

$x^2+2xy+y^2=25$

Como $xy=-1$ e agrupando os termos semelhantes:

$x^2+2(-1)+y^2=25 \Rightarrow x^2+y^2-2=25 \Rightarrow x^2+y^2=27$

Problema 2. *(Resolução de Leonardo Ferreira - Colégio Marista Pio XII)*

a) Iremos multiplicar 365 por 1000100010001001

Ou seja:

$365 \cdot (10^{15} + 10^{11} + 10^{7} + 10^{3} + 10^{0})$

Note que a diferença entre os expoentes das bases 10 são, respectivamente, 4, 4, 4 e 3. E, como 365 possui 3 algarismos, o resultado será 365036503650365365.

b) Temos que $673 = \frac{2019}{3}$, então podemos representar a quantidade de habitantes da seguinte forma:

$673 \cdot (1000100010001001) + 1 \Rightarrow 673 \cdot K + 1$ onde $K = 1000100010001001$ e o $+1$ seria contando com o próprio rei.

Portanto, a quantidade de súditos é:

$673K \Rightarrow \frac{2019}{3}K$

E como existem $2019 \cdot (1000100010001001) \Rightarrow 2019K$ moedas

Temos que:

$\frac{2019K}{\frac{2019K}{3}} = \frac{2019K}{1} \cdot \frac{3}{2019K} = 3$

Ou seja, cada súdito receberá 3 moedas de ouro.

Problema 3. *(Resolução de Renato Mandalozzo Tebcherani - Colégio Positivo Master)*

a) $n^2 - n = n(n-1)$. Como $n \in \mathbb{N}$, temos dois casos:

n é par: Se n for par, será a multiplicação de n com seu número antecessor $n-1$. Sabemos que, entre dois números Naturais consecutivos, um deles será ímpar e o outro par. E a multiplicação de um número par por um número ímpar resulta em um número par. Portanto, $n(n-1) \Leftrightarrow n^2 - n$ é par.

n é ímpar: Nesse caso, $(n-1)$ é par. Então, de maneira similar à primeira, $n(n-1) \Leftrightarrow n^2 - n$ é par.

Portanto, $n^2 - n$ é sempre par para $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$

b) $n^4 - 1 \Rightarrow (n^2+1)(n^2-1) \Rightarrow (n^2+1)(n+1)(n-1)$ E como $2019 = 3 \cdot 673$, um dos três termos desse produto deve ser múltiplo de 3 e outro de 673.

Para que isso aconteça, e que n seja o menor número possível, (n^2+1) não será o múltiplo de 673.

Supondo que $(n+1)$ seja o múltiplo de 673, temos que $n = 672$. Mas assim, nenhum dos outros termos seria múltiplo de 3.

Considerando $(n-1)$ o múltiplo de 673, temos que $n = 674$. Nesse caso, $(n+1) = 675$ que é múltiplo de 3.

Logo, podemos dizer que $n = 674$ será o menor possível para que o produto $(n^2+1)(n+1)(n-1)$ seja múltiplo de 3 e de 673 e, consequentemente de $3 \cdot 673 = 2019$.

Problema 4. *(Resolução de Thiago Neves de Campos - Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)*

Usando o princípio fundamental da contagem, fixamos as canetas que são obrigatórias nos kits:

$\underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{4} \cdot \underline{4} \cdot \underline{4} \cdot \underline{4} \cdot \underline{4} = 1024$ possibilidades.

Sobrando apenas 5 espaços para que houvessem variações das cores. Como havia a penas 4 cores, a empresa pode disponibilizar 1024 kits diferentes.

Problema 5. *(Resolução de Renato Mandalozzo Tebcherani - Colégio Positivo Master)*

a) Substituindo os valores, temos que:

$\frac{ab+cd}{2} \geqslant \sqrt{abcd} \Rightarrow \frac{3\cdot5+2\cdot7}{2} \geqslant \sqrt{3\cdot5\cdot7\cdot2} \Rightarrow \frac{15+14}{2} \geqslant \sqrt{210} \Rightarrow 14,5 \geqslant \sqrt{210}$.

Sabemos que $14^2 = 196$ e $15^2 = 225$. Portanto $14 < \sqrt{210} < 15$. Como $(14,5)^2 = 210,25$ então $14,5 = \sqrt{210,25}$

Então, temos que $\sqrt{210,25} \geqslant \sqrt{210}$. Portanto, a relação $\frac{ab+cd}{2} \geqslant \sqrt{abcd}$ é verdadeira para os números dados.

b) Podemos elevar os dois lados da expressão ao quadrado:

$\frac{(ab+cd)^2}{2^2} \geqslant abcd \Rightarrow (ab)^2+2abcd+(cd)^2 \geqslant 4abcd \Rightarrow (ab)^2-2abcd+(cd)^2 \geqslant 0 \Rightarrow (ab-cd)^2 \geqslant 0$.

Como $(ab-cd)$ é um número real, e qualquer número real elevado ao quadrado é maior ou igual a zero, $(ab-cd)^2 \geqslant 0$. Então vale a espressão $\frac{ab+cd}{2} \geqslant \sqrt{abcd}$, para a, b, c e d reais estritamente positivos.

Problema 6. *(Resolução de Leonardo Ferreira - Colégio Marista Pio XII)*

a) Perceba que é possível eliminar as somas que resultam em 0:

$C = (1+9+9)-(1+9+8)+(1+9+7)-(1+9+6)+(1+9+5)-(1+9+4)+(1+9+3)-(1+9+2)+(1+9+1)-(1+9+0)+(1+8+9)-(1+8+8)$

$C = 9-8+7-6+5-4+3-2+1-0+9-8$

$C = 1+1+1+1+1+1$

$C = 6$

b) Note que $A-B$ é a soma de vários trinomios perfeitos da forma $m^2-2mn+n^2 = (m-n)^2$, somados a $S^2_{(2019)}$. Assim:

$A-B = (S_{(1921)}-S_{(1922)})^2+(S_{(1923)}-S_{(1924)})^2+...+(S_{(2017)}-S_{(2018)})^2+S^2_{(2019)}$

$A-B = (1+9+2+1-1-9-2-2)^2+(1+9+2+3-1-9-2-4)^2+...+(2+0+1+7-2-0-1-8)^2+(2+0+1+9)^2$

Entretanto, devemos tomar cuidado, pois nem todos os termosn resultarão em $(-1)^2$, ex: $(S_{(1929)}-S_{(1930)})^2 = 8^2$. Mas veja que o próximo termo normaliza: $(S_{(1931)}-S_{(1932)})^2 = (-1)^2$. As anomalias acontecem apenas nas mudanças de dezenas, centenas, milhares ... Entretanto, todas as anomalias em dezenas resultam em 8. E a anomalia centena-milhar é $(S_{(1999)}-S_{(2000)})^2 = 26^2$

Anomalia das dezenas: $S_{(1929)}-S_{(1930)}, ..., S_{(1989)}-S_{(1990)}, S_{(2009)}-S_{(2010)}$

8 anomalias da forma $8^2 = 64$

Anomalia das unidades de milhar: $S_{(1999)}-S_{(2000)}$. 1 Anomalia da forma $26^2 = 676$

Termos comuns: $\frac{2018-1921+1}{2} = \frac{98}{2} = 49$. Descontando as 9 anomalias: $49-9 = 40$

Então $A-B = 40\cdot1+8\cdot64+1\cdot676+S^2_{(2019)} = 40+512+676+144 = 1372.$

Nível 4

Primeira Fase

Problema 1. Seja $N = 9 \cdot 19 \cdot 29 \cdot \cdots \cdot 2009 \cdot 2019$ o produto dos números naturais ímpares terminados em 9, de 9 a 2019. Escrevendo N na forma decimal, qual o algarismo das unidades?

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Problema 2. João tem três irmãs. João e Maria são amigos, mas não são irmãos. O número de irmãos que Maria tem é igual ao dobro do número de irmãs que o João tem. Se todas essas pessoas estiverem juntas dentro de uma sala, quantas pessoas há na sala:

a) 7 b) 9 c) 11 d) 14 e) 15

Problema 3. Uma caixa contém 54 bolas brancas. Raimunda tirou um terço das bolas e colocou numa sacola. Emengardo viu, tirou um terço das bolas que estavam na sacola e devolveu para a caixa. Após esses fatos ficaram:

a) 42 bolas na sacola.

b) 12 bolas na caixa.

c) 42 bolas na caixa.

a) 10 bolas na sacola.

a) 18 bolas na sacola.

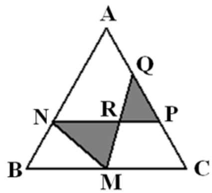
Problema 4. A soma de todos os números ímpares entre 0 e 20 ao ser dividida pela quantidade de ímpares que há entre 0 e 20 produz o número:

a) 20 b) 32 c) 100 d) 50 e) 10

Problema 5. Quantos números de 4 algarismos da forma $1a2b$ são múltiplos de 2 e 5?

a) 2 b) 5 c) 1 d) 10 e) 9

Problema 6. Na figura abaixo, o triângulo ABC é equilátero, M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, o segmento $\overline{NP}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$, os pontos M, R e Q são colineares, $AB = 3m$ e $BN = PQ = 1m$.



Logo, a área da região pintada de cinza na figura é igual a:

a) $\dfrac{3}{2}\,m^2$ b) $1m^2$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}m^2$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}m^2$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}m^2$

Problema 7. João tem 21 carrinhos azuis e verdes numa caixa, sendo que mais da metade deles são azuis e um terço deles são verdes. João está brincando com metade dos seus carrinhos azuis, portanto sobraram na caixa:

a) 7 azuis e 14 verdes

b) 6 azuis e 7 verdes

a) 7 azuis e 7 verdes

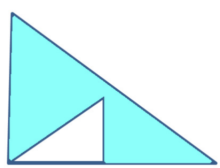
a) 14 azuis e 7 verdes

a) 10 azuis e 2 verdes

Problema 8. O número 1 é solução da equação $x^2 - 5x + c = 0$. A outra solução é:

a) -1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Nenhuma das anteriores

Problema 9. Na figura abaixo, ambos os triângulos são retângulos. Os menores lados do maior triângulo medem $8\,cm$ e $7\,cm$. Já os menores lados do outro triângulo medem $4\,cm$ e $3\,cm$.



A área da região pintada é:

a) $44\,cm^2$ b) $33\,cm^2$ c) $22\,cm^2$ d) $20\,cm^2$ e) $11\,cm^2$

Problema 10. Edernaldo tem o dobro da idade de Carmência mais cinco anos. Edernaldo tem metade da idade do seu avô de setenta anos. Qual é a idade de Carmência?

a) 5 anos b) 10 anos c) 15 anos d) 20 anos e) 8 anos

Problema 11. De quantas maneiras pode-se escrever 87 como soma de três números inteiros que estão em progressão geométrica?

a) 8 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

Problema 12. No campeonato interclasses de futebol do colégio de Marquinhos, os times jogaram no sistema de ida e volta, ou seja, cada equipe enfrentou a outra por duas vezes, e empates não são permitidos (se uma partida termina empatada, é realizada uma disputa de pênaltis para decidir o vencedor). Pelas regras, o vencedor ganha 2 pontos, e o perdedor ganha 1 ponto. Se ao final do campeonato o time de Marquinhos foi campeão e a soma dos pontos obtidos por todas as equipes foi 2019, quantos pontos o time de Marquinhos obteve?

a) 75 b) 81 c) 84 d) 87 e) 91

Problema 13. Seja N um número primo de três algarismos cujo resto da divisão por 8 é 7 e o resto na divisão por 5 é 2. A soma dos algarismos de N é um número cujo resto na divisão por 4 é 1 e o resto na divisão por 3 é 2. O valor de N é:

a) 207 b) 287 c) 607 d) 647 e) 727

Problema 14. Uma prova de matemática tem no total 20 questões de múltipla escolha. Cada resposta correta vale 15 pontos, e a cada resposta errada o aluno perde 4 pontos. Rafael, Carolina e José responderam todas as perguntas do questionário, e a nota média dos 3 foi 167, que coincidiu com a nota obtida por Carolina. Sabendo que José tirou a menor nota entre os 3, e que Rafael acertou 4 questões a mais que José, qual foi a porcentagem de acertos de questões de Rafael nessa prova?

a) 55% b) 65% c) 75% d) 80% e) 85%

Problema 15. Sabe-se que $111 = 3 \times 37$. Quantos algarismos tem o próximo número da forma $11\ldots1$; isto é, cujos algarismos são todos iguais a 1, e que também é divisível por 37?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Problema 16. Foi pedido a João que calculasse a raiz quadrada de 961. Como João não sabia resolvê-la, ele calculou a raiz quadrada do algarismo mais à esquerda ($\sqrt{9} = 3$), a raiz quadrada do algarismo mais à direita ($\sqrt{1} = 1$) e os juntou, obtendo 31, que é justamente a raiz quadrada de $961!$ Para quantos naturais com pelo menos dois algarismos o método de cálculo de João para a extração da raiz quadrada funciona?

a) 7 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

Problema 17. Joãozinho resolveu fazer uma doação de bolinhas de gude, que ele e seus irmãos juntaram durante muitos anos, para os meninos de uma comunidade pobre. Ao contá-las, verificou que tinham 960 bolinhas azuis, 1080 bolinhas verdes e 1200 bolinhas marrons. Sabendo que Joãozinho preparou o maior número possível de quites iguais, de modo que cada um deles continha a mesma quantidade de bolinhas de cada cor e exatamente 4 bolinhas verdes a mais do que bolinhas azuis, então o número de quites preparados por Joãozinho foi igual a

a) 10 b) 12 c) 30 d) 60 e) 120

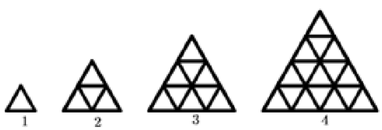
Problema 18. Considere um triângulo retângulo ABC, com $A\hat{B}C = 90°$. Seja H o pé da altura que vai de B até o lado AC. Uma reta paralela ao lado AB que passa pelo ponto C corta a reta BH no ponto D. Uma reta paralela ao lado BC, passando pelo ponto D corta AC em E. Qual é o menor ângulo entre as retas AD e BE?

a) $120°$ b) $90°$ c) $75°$ d) $60°$ e) $45°$

Problema 19. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - A$, com $A = \{x \in \mathbb{R} | x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, definida por: $f(x) = \dfrac{1 + \cos(5x)}{4\,\text{sen}^2 x}$. O valor de $f(x)$ para $x = \dfrac{\pi}{7}$ é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{1}{4}$

Problema 20. Paulo desenhou uma sequência de triângulos equiláteros, como mostra a figura:



Paulo percebeu que em cada figura muitos triângulos equiláteros de vários tamanhos foram formados. Por exemplo, nos quatro primeiros triângulos, Paulo encontrou um total de 1,5,13 e 27 triângulos, respectivamente. Quantos triângulos equiláteros Paulo encontrará após fazer o 8^{o} desenho?

a) 118 b) 127 c) 148 d) 170 e) 235

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	c	c	e	d	e	c	d	c	c
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
b	Anulada	d	c	c	b	c	b	d	d

Segunda Fase

Problema 1. Seja n um número natural maior que 1:

a) Prove que $n^2 - n$ é sempre par.

b) Determine o menor valor de n tal que $n^4 - 1$ seja divisível por 2019.

Problema 2. Resolva:

a) Prove que $\dfrac{ab+cd}{2} \geq \sqrt{abcd}$ para $a = 3$, $b = 5$, $c = 2$ e $d = 7$.

b) Para a, b, c e d reais estritamente positivos, prove que $\dfrac{ab+cd}{2} \geq \sqrt{abcd}$ (Dica: Lembre-se que o quadrado de qualquer número real é positivo ou nulo).

Problema 3. Seja S_n a soma dos algorismos de um número natural n. Por exemplo, $S_{597} = 5 + 9 + 7 = 21$.

a) Calcule $C = S_{199} - S_{198} + S_{197} - S_{196} + \cdots + S(189) - S188$.

b) Sejam $A = S^2_{(1921)} + S^2_{(1922)} + S^2_{(1923)} + S^2_{(1924)} + \cdots + S^2_{(2018)} + S^2_{(2019)}$ e $\dfrac{1}{2}B = S_{1921}S_{1922} + S_{1923}S_{1924} + \cdots + S_{2017}S_{2018}$. Calcule $A - B$.

Problema 4. Sejam A e B matrizes tais que $AB = A + B$.

a) Encontre A e B, ambas de ordem 2, que contenham apenas números inteiros.

b) Sendo I_n a matriz identidade de ordem n, prove que a matriz $C = I_n - A$ tem inversa.

Problema 5. Seja i o número imaginário definido por $i = \sqrt{-1}$.

a) Prove que $-i = \dfrac{1}{i}$.

b) Prove que $\sqrt{2} = \dfrac{i+1}{\sqrt{i}}$.

c) Prove que $\sqrt{6} = (1-i)\sqrt{3i}$.

Problema 6. A milhões de anos-luz do nosso planeta Terra há um gigantesco planeta que possui $6730673067306730\cdots6730674$ habitantes. Sabe-se que nesse número o 6730 repete-se 2018 vezes. Nesse planeta há um único rei que governa todos os demais habitantes, chamados de súditos. Esse rei possui $2019201920192019\cdots20192019$ moedas de ouro. Sabe-se também que esse número contém 2019 vezes o 2019.

a) O rei ordenou que todos os súditos fizessem a conta $365\cdot10001000100010001001$. Qual é o resultado correto que todos os súditos deviam obter?

b) O rei, num momento de imenso altruísmo, resolveu distribuir todas as suas moedas de ouro igualmente entre os súditos. Quantas moedas de ouro cada súdito recebeu?

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução da Pauta)*

a) Dado $n \in \mathbb{R}; n > 1$, notamos que quando n é um número par, n^2 será sempre par, logo a expressão $n^2 - 1$ resulta em um número ímpar. Portanto, não podemos afirmar que $n^2 - 1$ sempre resultará em um número par.

b) Primeiramente fatoramos $n^4 - 1$, chegando e $(n^2 + 1)(n + 1)(n - 1)$.

Notamos que $2019 = 673 \cdot 3$.

O $n^2 + 1$ é o maior fator e deveria ser 2019 ou 673, isto é, $n^2 = 2018$ ou $n^2 = 672$, mas 2018 e 672 não são quadrados perfeitos.

Então vamos igualar 673 ao segundo maior fator, isto é, $n + 1 = 673$.

$n = 672 - 1 = 671$

Já para $n - 1 = 673 \Rightarrow n = 674 \Rightarrow n + 1 = 675$.

Portanto, $n = 674$ é o menor natural que faz $n^4 - 1$ ser divisível por $2019 = 673 \cdot 3$, pois 675 é divisível por 3.

Problema 2. *(Resolução de Rafael Antônio Chinelatto - Colégio Marista Pio XII)*

a) $\dfrac{ab + cd}{2} \geq \sqrt{abcd}$, substituindo os valores;

$\dfrac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 7}{2} \geq \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7}$, elevando ambos os lados ao quadrado;

$(14,5)^2 \geq (\sqrt{210})^2 \Rightarrow 210,25 \geq 210$

Como 210,25 é maior que 210, então concluímos que vale $\dfrac{ab + cd}{2} \geq \sqrt{abcd}$ para $a = 3$, $b = 5$, $c = 2$ e $d = 7$.

b) Elevando ambos os lados ao quadrado, temos que:

$(\dfrac{ab + cd}{2})^2 \geq (\sqrt{abcd})^2 \Rightarrow \dfrac{(ab)^2 + 2(abcd) + (cd)^2}{4} \geq abcd$

$(ab)^2 + 2ab + cd + (cd)^2 \geq 4abcd \Rightarrow (ab)^2 - 2abcd + (cd)^2 \geq 0$

Como $(ab)^2 - 2abcd + (cd)^2$ é um trinômio quadrado perfeito, ele pode ser escrito na forma $(ab-cd)^2$, e considerando que o quadrado de qualquer número real é positivo ou nulo, a expressão $(ab - cd)^2 \geq 0$ será sempre verdadeira, portanto, a expressão $\dfrac{ab+cd}{2} \geq \sqrt{abcd}$ será sempre correta para a, b, c e d reais positivos.

Problema 3. *(Resolução da Pauta)*

a) Como $S_{(597)} = 5+9+7 = 21$, isso significa que $S_{(597)}$ é igual a soma dos algarismos do índice de S. Portanto, para encontrarmos o valor de $C = S_{(199)} - S_{(198)} + S_{(197)} - S_{(196)} + \cdots + S_{(189)} - S_{(188)}$ partimos do princípio de que: $S_{(199)} - S_{(198)} = (1+9+9) - (1+9+8) = 19-19 = 1$, $S_{(197)} - S_{(196)} = 1$ e assim por diante, para todos os pares, até $S_{(195)} - S_{(194)} = 1$.

Percebemos que há 12 funções $S_{(n)}$, então há 6 pares que resultam 1. Por isso, $C = 6 \cdot 1 = 6$.

b) $A - B = S^2_{(1921)} - 2S_{(1921)}S_{(1922)} + S^2_{(1922)} + \cdots + S^2_{(2017)} - 2S_{(2017)}S_{(2019)} + S^2_{(2018)} + S^2_{(2019)}$

$A - B = (S_{(1921)} - S_{(1922)})^2 + \cdots + (S_{(2017)} - S_{(2018)})^2 + S^2_{(2019)}$

Vemos que há $2019 - 1920 = 99$ funções S_n das quais 98 formam quadrados de diferença. Portanto, há $\dfrac{98}{2} = 49$ diferenças.

A maioria delas resulta em -1. Vamos achar as que diferem desse valor:

$S_{(1929)} - S_{(1930)} = 21 - 13 = 8$

$S_{(1939)} - S_{(1940)} = 22 - 14 = 8$

$S_{(1949)} - S_{(1950)} = 8$

$S_{(1959)} - S_{(1960)} = 8$

$S_{(1969)} - S_{(1970)} = 8$

$S_{(1979)} - S_{(1980)} = 8$

$S_{(1989)} - S_{(1990)} = 8$

$S_{(1999)} - S_{(2000)} = 28 - 2 = 26$

$S_{(2009)} - S_{(2010)} = 11 - 3 = 8$

Portanto,

$A + B = 40 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot 8^2 + 1 \cdot 26^2 + S^2_{(2019)} \to A + B = 40 \cdot 1 + 8 \cdot 64 + 1v676 + (2+0+1+9)^2$

$A + B = 40 + 512 + 676 + 144$

$A + B = 1372$

Problema 4. *(Resolução da Pauta)*

a) Precisamos encontrar $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{Z}$ tal que;

$A * B = A + B$

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}$, daí;

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_1 + a_4b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{vmatrix}$$

Vamos supor um formato simples e fácil para a matriz B, que seja distinto da matriz identidade. Suponhamos $B = [b_1b_2b_3b_4] = [0110]$

Substituindo esses valores, teríamos um sistema de equações que resultaria em:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \\ a_1 = a_2 + 1 \\ a_4 = a_3 + 1 \\ a_3 = a_4 \end{cases}$$

Mas como $a_3 = a_4$ e $a_4 = a_3 + 1$, torna-se impossível.

Vamos supor agora $B = [b_1b_2b_3b_4] = [0111]$. Nesse caso:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \\ a_1 + a_2 = a_2 + 1 \\ a_4 = a_3 + 1 \\ a_3 + a_4 = a_4 + 1 \end{cases}$$

Onde, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ e $a_4 = 2$.

Portanto, temos duas matrizes que satisfazem o problema: $A = [1112]$ e $B = [0110]$.

Fazendo a prova real, temos:

$A \cdot B = A + B$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, e $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

Portanto, de fato as matrizes $A = [1112]$ e $B = [0110]$ satisfazem as condições.

b) Temos que $AB + A + B$. Adicionando I_n e subtraindo A e B dos dois lados da igualdade, obtemos;

$I_n + AB - A - B = I_n$

$I_n - AI_n - I_nB + AB = I_n$

$(I_n - A)(I_n - B) = I_n$

Portanto, a matriz $I_n - A$ tem como inversa a matriz $I_n - B$.

Problema 5. *(Resolução de Cassiano José Kounaris Fuziki - Colégio Marista Pio XII)*

a) Seja $i = \sqrt{-1}$, elevando ambos os lados ao quadrado;

$i^2 = -1$, dividindo ambos os lados por i;

$\frac{i^2}{i} = -\frac{1}{i} \Rightarrow i = -\frac{1}{i} \Rightarrow -i = \frac{1}{i}$.

b) Seja $i = \sqrt{-1}$, então;

$i = \sqrt{-1}$, elevando ambos os lados ao quadrado;

$i^2 = -1 \Rightarrow i^2 + 1 = 0$, somando $2i$ em ambos os termos, temos:

$i^2 + 2i + 1 = 2i$, agora temos um produto notável;

$(i+1)^2 = 2i \Rightarrow \frac{(i+1)^2}{i} = 2$, extraindo a raíz de ambos os membros;

$\sqrt{\frac{(i+1)^2}{i}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{i+1}{\sqrt{i}} = \sqrt{2}$.

c) Partindo do princípio de que $2 = 2$, e que $i^3 = -1$, temos que:

$2 = 2 \Rightarrow 2 = -2i^2 \Rightarrow 2 = -2i^2 + i + i^3$, multiplicando ambos os lados por 3;

$6 = -6i^2 + 3i + 3i^3 \Rightarrow 6 = 3i(1 - 2i + i^2) \Rightarrow 6 = 3i(1-i)^2 \Rightarrow \sqrt{6} = (1-i)\sqrt{3i}$.

Problema 6. *(Resolução de Bruno Vieira Harmatiuk- Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)*

a) $365 \cdot 10001000100010001001$:

I - $5 \cdot 10001000100010001001 = 50.005.000.500.050.005.005$;

II - $60 \cdot 1000100010001001001 = 600.060.006.000.600.060.060$;

III - $300 \cdot 1000100010001001001 = 3.000.300.030.003.000.300.300$.

Daí, $I + II + III$ resulta $3.650.365.036.503.650.365.365$.

b) A - número de súditos, B - número de moedas e n - sequência de multiplicação por 1000 que aparece 2018 vezes.

$\dfrac{Bn}{An} = \dfrac{2019 \cdot n}{673 \cdot n} = 3$

Cada súdito receberá 3 moedas.

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Artigos

Uma Aplicação da Análise Combinatória ao Processo de Composição Musical

Leonardo Pires [1]

Resumo: Neste artigo faremos uma aplicação da Análise Combinatória no processo de composição e improvisação musical. A aleatoriedade de nosso processo permitirá compor um trecho musical de três compassos utilizando o princípio fundamental da contagem.
Palavras-chave: Análise Combinatória; Música; Composição; Improvisação Musical.

Introdução

As semelhanças entre matemática e música são conhecidas desde o desenvolvimento de ambas, tanto que, creditam-se a Pitágoras grandes descobertas na Matemática e Música. Tais semelhanças ficam mais evidentes quando se colocam lado a lado um teorema matemático e uma partitura musical. Alguns teoremas se parecem com obras de artes ao passo que algumas partituras assemelham-se a teoremas em suas simetrias e métricas. No entanto as relações entre matemática e música ultrapassam o ponto de vista estético e adentram o ponto de vista prático. Uma vez que o processo de composição e improvisação musical torna-se muitas vezes um processo de escolhas de modos e notas musicais, observamos um procedimento aleatório, sobretudo no processo de improvisação. É neste contexto que a Análise Combinatória se mostra interessante, apresentado todas as possibilidades de arranjos e combinações que temos quando compomos ou improvisamos uma música. No que segue faremos uma aplicação da análise combinatória no processo de composição e improvisação musical. Várias simplificações na teoria musical serão feitas e até mesmo tratadas de maneira informal, visando o entendimento de leitores sem conhecimento musical. O único

[1] Professor do Departamento de Matemática e Estatística (DEMAT) da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), lpires@uepg.br

pré-requisito para este texto é o conhecimento de matemática básica em nível escolar destacando-se a Análise Combinatória.

Música e Matemática

Uma nota musical pode ser tocada por um instrumento musical, pode ser resultado de atritos entre objetos, pode ser um pulso elétrico; o som do pulso do telefone vibra igual à nota Lá, ou até mesmo pode ser cantada. Quando ordenadas em uma sequência as notas musicais constituem uma escala musical, por exemplo, a ordenação a seguir representa uma escala musical conhecida como escala de Dó maior.

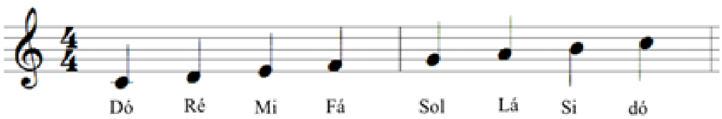


Figura 1. Escala Musical.

As cinco linhas horizontais paralelas são chamadas pentagrama, as duas linhas verticais paralelas dividem o pentagrama em dois compassos, o símbolo & no início do pentagrama é chamado clave de sol indicando que a segunda linha de baixo para cima corresponde a nota Sol e a fração 4/4 indica que cada compasso pode ser preenchido com quatro tempos, observe que cada compasso foi preenchido com quatro notas. Observe também que na Figura 1 acima apresenta as notas Dó e dó, informalmente entendemos como notas diferentes, pois representam sons diferentes. A nota Dó representa um som mais grave do que a nota dó (uma oitava acima).

Modos Gregos

No processo de composição e improvisação seguimos algumas regras inicialmente estabelecidas assemelhando-se a um processo aritmético. Entre esses processos utilizaremos aqui o que é conhecido como os modos gregos. Basicamente, os modos gregos consistem em dividir sua composição em sete modos (ou graus) e cada modo é composto da escala da Figura 1 acima acrescentando ou retirando algumas notas musicais. Por simplicidade, somente retiraremos as notas musicais. Os modos gregos podem ser descritos na tabela a seguir.

I	Iônico	Dó Ré Mi Fá Sol Lá Si dó	8 notas
II	Dórico	Dó Ré - Fá Sol Lá - dó	6 notas
III	Frígio	Dó - - Fá Sol - - dó	4 notas
IV	Lídio	Dó Ré Mi - Sol Lá Si dó	6 notas
V	Mixolídio	Dó Ré Mi Fá Sol Lá - dó	7 notas
VI	Eólio	Dó Ré - Fá Sol - - dó	5 notas
VII	Lócrio	Dó - - Fá - - - dó	3 notas

Figura 2. Modos Gregos.

O próximo passo consiste em escolher os ritmos musicais que, informalmente, entendemos como figuras (que restringimos) possuir zero, uma, duas, três ou quatro notas musicais. Com o objetivo de tornar o texto elementar, juntamente com a tabela acima, utilizaremos somente os seguintes ritmos musicais abaixo. Destacamos que tais ritmos são utilizados na música brasileira tal como o samba-choro.

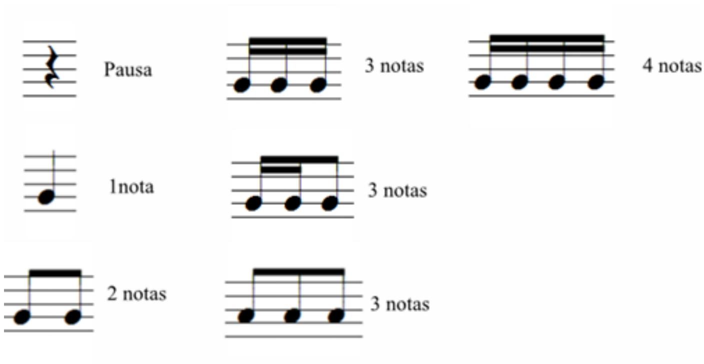


Figura 3. Ritmos Musicais.

Análise Combinatória

Finalmente utilizaremos a Análise Combinatória para compor uma música praticamente de modo aleatório. Faremos um exemplo na composição de uma música exemplificando como o processo pode ser utilizado.

Nossa composição consiste de preencher os 3 compassos abaixo combinando as notas da Figura 2 com os ritmos da Figura 3.

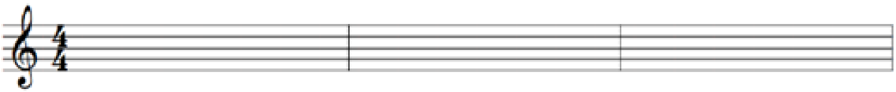


Figura 4. Três Compassos.

Inicialmente temos que escolher 3 modos gregos para preencher os 3 compassos e é permitido ocorrer repetições, portanto utilizaremos o Princípio Fundamental da Contagem.

"Se uma decisão D_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada à decisão D_1, a decisão D_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões D_1 e D_2 é xy."

Como temos 7 modos gregos, o total de possibilidades para completar os 3 compassos é $7 \times 7 \times 7 = 343$ possibilidades. Escolhemos aleatoriamente uma das possibilidades, suponhamos II, V e I.

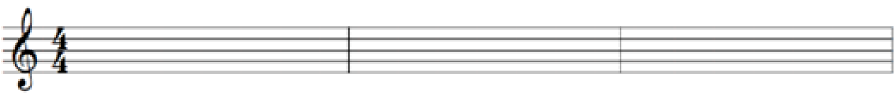


Figura 5. Primeira Escolha.

Agora precisamos escolher os ritmos na Figura 3. Cada compasso deve ser completado com 4 figuras. Para esta etapa podemos utilizar combinações simples.

"De quantos modos podemos escolher 4 ritmos musicais distintos entre 7 ritmos musicais distintos dados."

Sendo assim temos um total de 35 possibilidades para cada compasso, pois

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4!)} = \frac{5040}{24 \cdot 6} = 35.$$

Portanto para completarmos os 3 compassos temos um total de $35 \cdot 35 \cdot 35 = 42875$ possibilidades. Novamente escolhemos aleatoriamente os ritmos, ou seja, supomos escolhida a seguinte combinação.

Figura 6. Segunda Escolha.

Agora deveremos escolher as notas da Figura 2 correspondentes aos modos II, V e I escolhidos. No primeiro compasso temos o modo Dórico com ritmos que necessitam de 7 notas que devem ser escolhidas entre as 6 notas da segunda linha da Tabela da Figura 2. Aqui é permitido repetições, assim utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, temos $6^7 = 279936$ possibilidades para as notas do primeiro compasso. Supomos escolhidas as notas: Ré Dó Fá Sol - Lá - Lá Lá.

Já para o segundo compasso temos o modo Mixolídio com ritmos que necessitam de 8 notas que devem ser escolhidas entre as 7 da quinta linha da Figura 2, portanto um total de $7^8 = 5764801$ possibilidades para o segundo compasso. Supomos escolhidas as notas: Mi Fá Sol - Lá - Dó Lá Mi Ré.

Finalmente, para o terceiro compasso temos o modo Iônico com ritmos que necessitam de 6 notas entre as 8 notas da primeira linha da Figura 2, portanto um total de $8^6 = 262144$ possibilidades para o terceiro compasso. Supomos escolhidas as notas: Dó Ré Dó - Lá - Lá Mi.

Pronto! Escrevendo no pentagrama temos a seguinte composição musical:

Figura 7. Composição Musical.

Conclusão

A Figura 7 é somente uma escolha dentre as milhões de possibilidades descritas acima. Os valores obtidos nos cálculos e a aleatoriedade de nossas escolhas mostram quão criativo pode ser o processo de composição musical e com o auxílio da Análise Combinatória vemos que de fato, Música e Matemática possuem relações que ultrapassam o campo estético. A composição da Figura 7 pode ser ouvida em:

`www.youtube.com/watch?v=YllPuuA4Vaw&feature=youtu.be`

Referências

[1] Chediak, A. Harmonia e improvisação, Vol. 2, Lumiar Editora.

[2] Morgado, A.C.O., Carvalho, J.B.P., Carvalho P.C.P., Fernadez, P. Análise Combinatória e Probabilidade, Coleção do Professor de Matemática-SBM.

A Resolução de um Problema da OBMEP com o Auxílio do GeoGebra

Daniel Silveira Salamucha [1]

Keyti Alyne Francisco de Souza [2]

Núbia Aline Lutke [3]

Elisangela dos Santos Meza [4]

Resumo: Cada vez mais os professores têm utilizado tecnologias para suas aulas. Entre as tecnologias matemáticas, o software GeoGebra se apresenta com grande potencial para o ensino da matemática, em especial, da Geometria. A Geometria, por sua vez, é de grande importância para os alunos, pois está presente em nosso dia a dia. Desta forma, buscamos através deste artigo explorar conceitos geométricos a partir de um problema da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP, com o auxílio do GeoGebra, realizando a sua resolução completa, além de estudar outras possibilidades que o problema apresenta.

Introdução

O uso de tecnologias no âmbito educacional tem-se expandido, onde professores contam com diversos softwares educacionais que podem ser trabalhados em todos os níveis de ensino. Na área da matemática, os softwares educacionais são úteis para

[1]Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), daniss121@gmail.com

[2]Acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), keytyalynef@gmail.com

[3]Acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), nubialutke@gmail.com

[4]Professora do Departamento de Matemática e Estatística (DEMAT) da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), emeza@uepg.br

promover atividades dinâmicas, onde é possível experimentar construções e descobrir conceitos manipulando gráficos de funções, figuras geométricas, entre outros.

Dentre os softwares de Matemática, o GeoGebra oportuniza inúmeras utilizações em várias áreas da matemática, entre elas, geometria, álgebra, cálculo e estatística e probabilidade. Tais ferramentas podem ser exploradas na resolução de problemas. De acordo com [1], o GeoGebra é um software didático e possui interface agradável, é fácil de usar e permite a realização de simples construções e também de visualizações mais complexas.

Segundo [2], a Geometria está presente no cotidiano das pessoas, tanto no desenvolvimento de atividades como na arte, em atividades lúdicas, entre outros. Por esse motivo seu ensino é de extrema importância para os alunos. Destaca-se que os problemas de geometria presentes nas olimpíadas de matemática são muito atraentes e permitem boas reflexões tanto para os alunos, quanto para os professores.

No mundo e no Brasil existem dezenas de olimpíadas de matemática, sendo a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP [3] a maior olimpíada de matemática do mundo, com mais de 18 milhões de alunos da educação básica em 2019. A OBMEP tem como o objetivo estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área e é dividida em três níveis, contemplando os alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e as três séries do Ensino Médio.

Conforme [4] os conteúdos abortados nas questões da OBMEP são: Álgebra, Combinatória, Geometria e Teoria dos Números. Ainda segundo o autor, em geometria são trabalhados assuntos presentes na educação escolar, porém de forma mais aprofundada e com diferentes tipos de abordagens.

Tendo em vista a importância do ensino da Geometria e a relevância da OBMEP para o desenvolvimento da educação no Brasil, buscou-se estudar um problema desta olimpíada que envolva conceitos geométricos e possa ser explorado no GeoGebra.

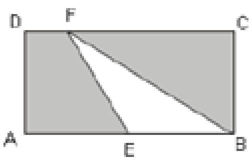
Objetivo

Nesse artigo, temos como objetivo discutir a resolução da Questão 4 do Nível 2 da 1ª Fase da 2ª OBMEP. Para isso, utilizamos o software GeoGebra não só como uma ferramenta de auxílio da resolução, mas também para propor novas reflexões sobre o problema, isto é, aprofundar as ideias que este problema olímpico apresenta.

Metodologia

Apresentamos abaixo a Questão 4 do Nível 2 da 1ª Fase da 2ª OBMEP, problema olímpico que motiva este artigo.

(2006 - N2Q4 - 1a fase) No retângulo da figura temos AB = 6 cm e BC = 4 cm. O ponto E é o ponto médio do lado AB. Qual é a área da parte sombreada?



a) 12 cm^2 b) 15 cm^2 c) 18 cm^2 d) 20 cm^2 e) 24 cm^2

Como podemos resolver este problema? O que é preciso saber para chegarmos à sua solução? Utilizaremos a sequência proposta por Polya, em seu livro A Arte de Resolver Problemas [5] para a resolução deste problema: (i) primeiro, temos que compreender o problema; (ii) depois de compreender o problema, elaboramos um plano para resolvê-lo; (ii) em seguida, executamos o plano elaborado e (iv) por fim, revemos e discutimos a solução encontrada, o retrospecto da solução.

Inicialmente, devemos compreender o que o problema nos apresenta. Queremos calcular a área sombreada. Para calculá-la, podemos: (a) calcular a área do retângulo ABCD e subtrair da área do triângulo EBF; (b) calcular a área do trapézio AEFD e a área do triângulo BCF e somar essas duas áreas. Qual é o caminho mais fácil? Em ambos os caminhos precisamos calcular duas áreas. Vamos adotar a primeira estratégia, isto é, calcular as áreas do retângulo ABCD e do triângulo EBF e subtrair a área do triângulo da área do retângulo.

Então, segundo a estratégia proposta por Polya, devemos executar o plano, isto é, colocar em prática os passos planejados. A área do retângulo ABCD é calculada multiplicando-se a base pela altura. Como a base do retângulo é AB e a altura AD, a área do retângulo é 24 cm^2. Para calcular a área do triângulo precisamos determinar a base e a altura relativa à essa base. Lembramos que a altura de um triângulo é um segmento de reta que parte de um vértice e é perpendicular ao lado oposto a esse vértice. Deste modo, um triângulo possui 3 alturas: cada uma relativa à um dos lados do triângulo.

Portanto, se considerarmos a base EB (que mede 3 cm) do triângulo, qual é a sua altura? Prolongando o segmento EB em direção ao ponto A, obtemos a altura FG. Note que foi criado o retângulo AGFD e FG é paralelo ao segmento AD. Logo, concluímos que FG = AD = 4 cm.

Retomando o nosso problema, já determinamos a altura e a base do triângulo EBF, logo, podemos calcular sua área: $\dfrac{3 \times 4}{2} = \dfrac{12}{2} = 6\ cm^2$. Como queremos calcular a área sombreada, temos que a área sombreada é igual a: $24\ cm^2 - 6\ cm^2 = 18\ cm^2$. Para analisarmos a nossa resposta, isto é, fazermos o retrospecto, vamos construir a figura no GeoGebra e usa as ferramentas desse software para calcularmos a área do triângulo e a área sombreada.

Para construir a figura no GeoGebra, seguiremos os seguintes passos:

1º) Inicie o GeoGebra e na Janela de Visualização, oculte a malha e os eixos;

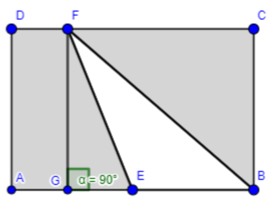
2º) Construa o retângulo ABCD com as dimensões dadas e o ponto E, ponto médio do segmento AB;

3º) Plote o ponto F sobre o segmento DC conforme a figura;

4º) Construa os polígonos AEFD e BCF e mude sua cor para cinza e o polígono EBF, cuja cor deve ser a branca;

5º) Construa uma reta perpendicular a EB por F e crie o segmento FG, onde G é o pé da perpendicular.

Veja como sua construção no GeoGebra deve ficar:



Utilize a ferramenta área para calcular a área do triângulo EBF e dos polígonos AEFD e BCF (que correspondem a área sombreada). Com a construção no GeoGebra, podemos verificar que a área do triângulo é 6 cm^2 e a área cinza é 18 cm^2. Ou seja, refizemos o problema no GeoGebra e encontramos a mesma resposta (fase do retrospecto, segundo Polya).

Vamos estudar um pouco mais nosso problema através das duas perguntas abaixo:

(1) Se movermos o ponto F sobre o segmento DC, a área do triângulo muda?

(2) Agora, se movermos o ponto E sobre o segmento de reta AB, a área do triângulo muda?

Para respondermos à pergunta (1), na construção no GeoGebra abra uma nova Janela de Visualização e nela, crie o ponto Q = (EB, Área(t2)), onde t2 é o polígono EBF. Agora, quando movemos o ponto F sobre DC, o que acontece com o ponto Q? Ele permanece inalterado, isto é, a área não muda. Mas por quê? Note que a altura permanece a mesma ao mudarmos o ponto F. Então, se a base continua a mesma (veja que não mudamos o segmento EB) e se a altura FG não muda também, a área permanece a mesma. Algo interessante é que qualquer triângulo EBF, com a base EB e o ponto F no segmento DC têm a mesma área: 6 cm^2.

A pergunta (2) agora está bem mais fácil de ser resolvida: pois, se quando movemos o E a base muda, então a área do triângulo também muda. Aliás, perceba que a variação da área acompanha a variação da base: a altura permanece a mesma e a base aumenta, então a área aumenta; se a base diminui, então a área diminui. Você pode mover o ponto E sobre AB e verificar que o ponto Q tem sua coordenada alterada.

Para terminar o estudo do problema, se o ponto F permanece sobre o segmento DC e movimentarmos E sobre AB, qual é a maior área do triângulo EBF? Já concluímos que a área do triângulo EBF aumenta se a base aumenta. Portanto, a nossa questão agora é: qual é a maior base possível? Isto é, quando o segmento EB é o maior possível, onde este segmento está em AB?

No GeoGebra, movimente o ponto E. Em que lugar o ponto E gera a área máxima? Podemos perceber que, quando A=E, ou seja, quando o ponto E coincide com o ponto A, encontramos a área máxima do triângulo. Nesse caso, temos que EB = AB = 6 cm e a área do triângulo EBF é 18 cm^2.

Outra forma de verificar nossa solução é utilizar a estratégia apresentada no item (b). Neste caso, calculamos diretamente a área sombreada, através do cálculo das áreas dos polígonos AEFD e BCF. Tente utilizar esta estratégia, buscando confirmar sua solução com o auxílio do GeoGebra. Nos conte sua experiência.

Aponte a câmera do seu celular para o QR Code ao lado para acessar a construção da figura proposta neste artigo no GeoGebra ou `https://www.geogebra.org/m/mmagzsrt`.

Considerações Finais

A partir do presente trabalho podemos refletir sobre alguns pontos importantes no processo de ensino e aprendizagem de Geometria, sendo eles: a relevância do estudo de Geometria, a utilização de tecnologias no ensino e a utilização da metodologia de resolução de problemas em questões olímpicas.

Assim, destacamos que ensinar Geometria é de grande importância para o processo de ensino aprendizagem para o aluno, pois contribui para o desenvolvimento das habilidades cognitivas visuais, de desenho e construção, bem como de aplicação ou transferência, de comunicação e de lógica ([6], p. 123).

Por sua vez, o software GeoGebra contribuiu para a visualização da resolução da questão escolhida da OBMEP, permitindo dinamizar o processo flexibilizado a partir do enunciado, uma vez que esses ambientes oportunizam a construção conceitual da geometria, pois o software permite diferentes configurações de uma representação o que leva refletir e encontrar propriedades novas.

Referências

[1] SÁ, I. P. de *Primeiros passos com o software livre geogebra*. Centro Universitário da Serra dos Órgãos: Curso de Matemática, 2010. Disponível em `https://pt.slideshare.net/Franbfk/passos-para-o-geogebra`. Acesso em 09 de setembro 2020.

[2] BALDINI, L. A. F.; PÓLA, M. C. R *Construção do conceito de área e perímetro: uma sequência didática com auxílio de software de geometria dinâmica*. Londrina: UEL, 2004.

[3] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. *Apresentação 2020*. Disponível em `www.obmep.org.br`. Acesso em 18 de agosto de 2020.

[4] FERREIRA, J. A *A geometria como instrumento de aprendizagem e sucesso na OBMEP. 2016.48 f. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática)*. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó, 2016.

[5] POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro. Interciência, 2006.

[6] MANOEL, W. A. *A importância do ensino de geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: razões apresentadas em pesquisas brasileiras.* 2014. 131 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: `www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253950`. Acesso em 20 de agosto de 2020.

O Problema de “Monty Hall”

Scheila Valechenski Biehl [1]

Gabriel da Silva Lima [2]

Anderson Luís Soares de Lima[3]

Rodrigo Santiago Biasio [4]

Resumo: O problema de Monty Hall é um problema matemático que surgiu nos Estados Unidos, na década de 70, a partir de um concurso televisivo chamado *Let's Make a Deal*. Nesse concurso, Monthy Hall (o apresentador) pede que o participante escolha entre três portas, uma das quais esconde um automóvel e as outras duas um bode cada. O convidado escolhe uma das portas e, em seguida, o apresentador, que sabe o que as portas escondem, escolhe uma das duas restantes mostrando um bode. Ele então pergunta ao convidado: você quer trocar de porta? Nesse artigo apresentamos o problema de Monty Hall e sua interpretação no contexto das probabilidades, indicando como uma proposta de ensino que pode ser abordada no ensino médio, explorando os aspectos lúdicos do jogo. Qual a melhor estratégia? O participante deve permanecer com a porta escolhida inicialmente? Ou deve trocar?

Introdução

O desenvolvimento das teorias da probabilidade e os avanços dos cálculos probabilísticos são atribuídos a grandes matemáticos, como Pierre de Fermat e Blaise Pascal, que desenvolveram as primeiras considerações em torno da teoria do cálculo das

[1]Professora do Departamento de Matemática e Estatística (DEMAT) da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), svbiehl@uepg.br

[2]Acadêmico(a) do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), limagabrielpg@gmail.com

[3]Acadêmico(a) do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), andersonluissoares@hotmail.com

[4]Acadêmico(a) do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), naruihina1234@gmail.com

probabilidades e da análise combinatória, e o brilhante matemático Karl Friedrich Gauss quando desenvolveu o método dos mínimos quadrados e a lei das distribuições das probabilidades.

Pensando em disponibilizar uma metodologia para auxiliar os professores em sala de aula, na temática de probabilidade e formalizar alguns conceitos teóricos, apresentamos aqui uma sugestão do uso do *Problema de Monty Hall* como uma metodologia de ensino. Em Santos (2015) é apresentada a solução do problema utilizando conceitos de probabilidade condicional e o Teorema de Bayes, sugerindo um plano de aula para introdução do conteúdo de Probabilidade Condicional para turmas do 2º ano do Ensino Médio.

Nos anos 1990, houve uma grande polêmica a respeito de um desafio que ficou conhecido como Problema de Monty Hall. O apresentador do *Let's Make a Deal* apresentava as três portas a um jogador, sendo que atrás de uma delas havia um carro e que atrás das outras havia bodes. O jogador começava escolhendo uma das portas. Antes de abri-la, o apresentador abria uma das duas outras portas não escolhidas pelo jogador, mostrando um bode dentro dela. Em seguida, ele pergunta ao jogador se este deseja manter a escolha anterior ou mudar para a outra porta. Sabendo que o jogador ganhará o prêmio que está atrás da porta que escolher, pergunta-se: qual escolha lhe dá maior probabilidade de ganhar o carro?

Um problema que aparentemente parecia simples, com um enunciado interessante e enigmático, tornou-se um marco nas discussões sobre probabilidade desde leigos até profissionais qualificados. "Para a surpresa dos idealizadores do programa, mesmo após a transmissão de 4500 episódios ao longo de 27 anos, essa questão sobre probabilidade acabou sendo seu principal legado." (Mlodinow, 2011, p.62). Monty Hall declarou em uma entrevista que sempre sabia onde o prêmio principal se encontrava e que se utilizava de armadilhas psicológicas para que o candidato trocasse de porta ou não, e de fato, "a porta que o apresentador abre depende de qual porta o concorrente escolheu originalmente, e essa escolha não é arbitrária." (Scheinerman, 2011, p.306)

A probabilidade de o prêmio estar atrás da porta escolhida originalmente pelo concorrente é de 1/3, mas depois que o apresentador abre uma das portas, uma análise informal e incorreta é pensar que a probabilidade de o prêmio estar atrás de uma delas é de 1/2, não importando se o concorrente opta pela outra porta. Veremos nas próximas seções porque é duas vezes mais provável o concorrente ganhar o grande prêmio trocando de portas do que permanecendo com a escolha original.

Noções de Probabilidade

A Teoria das Probabilidades é um ramo da Matemática que cria, desenvolve e pesquisa modelos que podem ser utilizados no estudo da incerteza, derivado de experimentos e fenômenos aleatórios. Esse modelo sempre possui os mesmos elementos, mas se adaptam a complexidade de cada problema. Os experimentos podem ser: determinísticos ou aleatórios. Experimentos determinísticos acontecem quando, repetidos inúmeras vezes e em condições semelhantes, conduzem a um resultado sempre igual. Por exemplo, as leis da Física e da Química. Já um experimento aleatório ocorre quando, repetido inúmeras vezes e em condições semelhantes, conduzem a um resultado diferente. Por exemplo, o lançamento de uma moeda ou um dado.

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado de **espaço amostral** (Ω) e pode conter um número finito ou infinito de pontos. Os **eventos** são um subconjunto de resultado de um experimento aleatório. Existem dois tipos de eventos: os **eventos complementares** (se sua intersecção é vazia e sua união o espaço amostral) e os **eventos disjuntos** (quando não têm elementos em comum). Além disso, podemos realizar operações com esses subconjuntos, as principais são: **união** $(A \cup B)$, representa a união dos pontos amostrais dos eventos A e B, **interseção** $(A \cap B)$, representa os pontos amostrais em comum dos eventos A e B, e **complemento** (A^C), representa o conjunto de pontos do espaço amostral que não está no evento A.

Existem basicamente três *axiomas da probabilidade*, desenvolvidos pelo matemático russo Andrei Komogorov (1903-1987), são eles:

I) $0 \leq P(A) \leq 1$, ou seja, a probabilidade é um número não negativo;

II) $P(\Omega) = 1$, ou seja, o espaço amostral contém todos os possíveis resultados do experimento;

III) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se, e somente se $A \cap B = \emptyset$, ou seja, a união de dois eventos disjuntos (ou mutuamente exclusivos) é a soma dos eventos;

Pela definição clássica de probabilidade, consideramos um espaço amostral denotado por Ω, com $n(\Omega)$ eventos simples, onde supomos que cada evento tem a mesma probabilidade de acontecer. Se pensarmos em um evento M que pertence ao espaço amostral, composto de $n(M)$ eventos simples, pela definição temos que a probabilidade de M ocorrer será: $P(M) = \dfrac{n(M)}{n(\Omega)}$.

Assim, para encontrar um modelo probabilístico, basta descrever o conjunto total dos resultados possíveis e atribuir pesos a cada resultado, e então refletir as chances de ocorrência de um certo evento. A seguir, apresentamos dois exemplos onde podemos aplicar esses conceitos:

1) **(OBMEP 2019, nível 3, questão 3a)** As amigas Ana, Beatriz, Cláudia e Diana têm uma bola cada uma. Quando toca um sinal, cada menina escolhe, ao acaso, uma de suas três amigas para jogar sua bola. Qual é a probabilidade de que Ana receba três bolas?
Resolução: percebemos que são 4 amigas, ou seja, para que Ana receba três bolas, todas as suas amigas devem jogar a bola para ela. Então, basta calcular a probabilidade de que cada amiga jogue a bola para Ana. Beatriz tem três escolhas, por isso, a probabilidade de que ela jogue a bola para Ana é $\frac{1}{3}$, o mesmo vale para Claudia e Diana. Como cada evento é independente, a probabilidade de que Ana receba as três bolas é $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$.

2) **(CANGURU 2017, nível J, questão 22)** Num dado cúbico especial, os números escritos nas faces são $-3, -2, -1, 0, 1, 2$. Se o dado for lançado duas vezes e os números obtidos multiplicados, qual é a probabilidade que o produto seja negativo?
Resolução: queremos saber a probabilidade de que, após os dois lançamentos o produto desses números seja negativo. Para isso, dividimos em duas ocasiões;
I - o primeiro lançamento resulta num número negativo e o segundo num número positivo.
II - o primeiro lançamento resulta num número positivo e o segundo num número negativo.
Perceba que descartamos a possibilidade de multiplicação de dois números positivos e dois números negativos, pois ambos resultariam em um número positivo.
Para I temos $\frac{3}{6}$(3 números negativos dentre as 6 opções)x $\frac{2}{6}$ (2 números positivos e não nulos dentre as 6 opções), ou seja, $\frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$. Para II temos $\frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$.
Portanto, a probabilidade de que após os dois lançamentos o produto dos resultados seja um número negativo é $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Há também o chamado *Teorema de Bayes* que relaciona informações, com a probabilidade de ocorrência, para gerar uma nova probabilidade quando os fatos acontecem de maneira relacionada ou são dependentes. Em situações de decisão é altamente recomendável o uso do Teorema de Bayes, pois ele contribui para geração do cenário em conjunto com as probabilidades.

Considerando que estamos interessados em um determinado evento A e que E represente alguma nova informação relevante à avaliação de A. Então, o Teorema de Bayes estabelece que a probabilidade do evento A dado a nova evidência (dados) E é proporcional ao produto entre a probabilidade do evento A antes de obtermos a nova informação E, e a probabilidade de observar a evidência E caso o evento A ocorresse, ou seja,

$$P(A|E) = \frac{P(E \cap A)}{P(E)} = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)}$$

onde

- $P(A)$ é conhecida como a probabilidade a priori de A, i.e., antes de tomarmos conhecimento de E;

- $P(E|A)$ é a probabilidade de que a evidência E seja observada se A é realmente verdadeiro (ocorre);

- $P(A|E)$ é a probabilidade a posteriori de A, isto é, após termos obtido a nova informação representada por E.

Logo, $P(A|E)$ representa a nossa probabilidade atualizada sobre o evento A uma vez que obtemos a informação adicional E relevante a A.

O Problema de Monty Hall

O problema de Monty Hall surgiu a partir do programa de auditório *Let's Make a Deal*, que foi exibido na televisão americana entre as décadas de 60 e 70 e apresentado por Monte Halperin (Monty Hall), ilustrado na Figura 1. O jogo se baseia em três portas que eram disponibilizadas aos participantes, sendo que atrás de uma delas estava um bom prêmio, um carro por exemplo, e que as outras tinham prêmios sem valor, como por exemplo bodes. O participante escolhe uma porta e, em seguida, Monty abre uma das portas que o participante não escolheu e que ele sabia que o prêmio não estava ali. Depois, restando duas portas para escolher, pois uma que não tinha o prêmio já foi aberta, e sabendo que o prêmio está atrás de uma delas, o participante pode escolher se continua com a porta que escolheu no início do jogo ou se troca para a outra porta que ainda está fechada.

Figura 1. Cenário do programa televisivo: *"Let's make a deal"*.

A grande dúvida acontece quando o apresentador, ciente da porta onde está o carro, abre uma porta que esconde um bode e pergunta se o participante quer fazer um negócio: "quer trocar de porta?". O participante deve permanecer com a porta escolhida inicialmente? Ou deve trocar?

Esse problema ficou notável em setembro de 1990, quando Marilyn Vos Savant escrevia para a revista Parede Magazine em uma coluna chamada Ask Marylin, na qual resolvia desafios e perguntas de seus leitores. Nessa coluna ela escreveu sobre o problema de Monty Hall e disse que a chance de ganhar o prêmio ao trocar de porta aumentaria para aproximadamente 66%.

Esta resposta de Vos Savant gerou um debate nacional sobre o problema. Mais de 10 mil cartas foram escritas à colunista argumentando contra a sua opinião, inclusive por matemáticos, físicos e estatísticos, garantindo que o correto seria não trocar. O problema de Monty Hall é conhecido por ser um daqueles problemas que, inicialmente, confundem a sua cabeça. Uma vez apresentado o problema, intuitivamente, você tem a resposta em mãos e continua com ela até o fim, revelando uma certa irracionalidade envolvida pois naturalmente a primeira percepção de escolha seria não trocar de porta porque teríamos uma chance em duas de ganhar o prêmio.

É vantajoso trocar de porta então? Bom, se você tentar responder essa pergunta levando em consideração as 3 portas, fica meio difícil de visualizar a solução. Porém, como Vos Savant explicou: "[...] Suponha que há um milhão de portas, e você escolha a porta de número 1. Então o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta e sempre irá evitar a que tem o prêmio, abre todas elas exceto a porta de número 777.777. Você trocaria para aquela porta bem rápido, não?"

Após uma indagação do matemático Robert Sachs da Universidade de George

Mason, alegando que ela estaria errada, a escritora deu uma solução mais clara: "[...] Minha resposta está correta. Mas primeiro, deixe-me explicar o porque de suas respostas estarem erradas. As chances de ganhar de 1/3 na primeira escolha não podem subir para 1/2 apenas porque o apresentador abre uma porta sem o prêmio. Os benefícios de trocar de porta já estão provados pelos 6 jogos que esgotam todas as possibilidades. Nos primeiros três jogos você escolhe a porta número 1 e "troca" toda vez, nos três segundos jogos, você escolhe a porta número 1 e "não troca" toda vez, e o apresentador sempre abre uma porta sem o prêmio. Aqui estão os resultados:"

	Porta 1	**Porta 2**	**Porta 3**	
Jogo 1	**Carro**	Cabra	Cabra	Troque e você perde
Jogo 2	Cabra	**Carro**	Cabra	Troque e você ganha
Jogo 3	Cabra	Cabra	**Carro**	Troque e você ganha
Jogo 4	**Carro**	Cabra	Cabra	Não troque e você ganha
Jogo 5	Cabra	**Carro**	Cabra	Não troque e você perde
Jogo 6	Cabra	Cabra	**Carro**	Não troque e você perde

Tabela 1. Seis decisões do Problema de Monty Hall.

Em geral, é comum que as pessoas pensem inicialmente que as chances de ganhar são de 50%, afinal, ou o prêmio está na porta que você escolheu, ou está na outra porta que sobrou. O problema é que, geralmente, pensamos na solução de uma maneira errada, descartando a informação de que o apresentador do programa, após a nossa escolha, sempre irá nos revelar uma porta sem o prêmio, e essa porta é, simplesmente esquecida por nós onde passamos a considerar apenas duas portas.

Pela Tabela 1 vemos que quando você troca, você ganha 2/3 das vezes e perde 1/3, mas quando você não troca, você somente vence 1/3 das vezes e perde 2/3. Após essa resposta de Vos Savant aos seus leitores, a visualização da solução do problema ficou muito mais clara. Mas claro, estamos falando somente de probabilidades, isso quer dizer que o participante terá mais chances de ganhar o prêmio se ele optar por "trocar", mas não, necessariamente, irá ganhar o prêmio.

Mas essa resposta não é correta, pois a porta que o apresentador abre depende da porta que o concorrente escolher inicialmente, e vemos então que a probabilidade de você ganhar caso mude de porta é $2/3 = 66,66\%$.

Do público geral de Vos Savant, em torno de 92% das cartas recebidas eram contra a sua resposta. E a única resposta que ela deu que o público finalmente entendeu, foi quando ela pediu para que professores de matemática fizessem o teste em suas classes, sendo um aluno o apresentador e outro aluno o participante, e escrevessem de volta para ela com os resultados. Em sua última coluna sobre o problema, ela mostrou os resultados destes ensaios, onde quase 100% deles concluíram que ela estava certa e que o competidor devia mudar de porta. Toda essa história com detalhes é mais tarde contada por Vos Savant no livro The Power of Logical Thinking (SAVANT, 1996).

Proposta de Ensino com Diagrama de Árvores e Probabilidades condicionais

Uma possibilidade de se trabalhar essa temática no Ensino Médio é realizar na prática o experimento do paradoxo de Monty Hall, onde os alunos podem assumir os papéis de apresentador e participante do programa. Pode-se explorar os aspectos lúdicos do problema, através de simulações do jogo, proporcionando desenvolver no aluno habilidades como experimentação, abstração e modelagem matemática do problema.

Em seguida, o professor pode elaborar conjuntamente a construção do diagrama de árvores com as probabilidades condicionais, como mostra a Figura 2. Para a primeira decisão, existem três possibilidades (três portas). Para a segunda decisão, existem três possibilidades de novo (mais uma vez três portas). Para a terceira decisão há duas possibilidades, mudar de porta (representada pela letra Y) ou não mudar (representada pela letra N). Assim, existem $3 \times 3 \times 2 = 18$ resultados possíveis, os quais podem ser visualizados na figura abaixo. O primeiro passo, onde os produtores escolhem uma porta para ocultar o prêmio, não é observável pelo competidor, representado pela linha tracejada do diagrama.

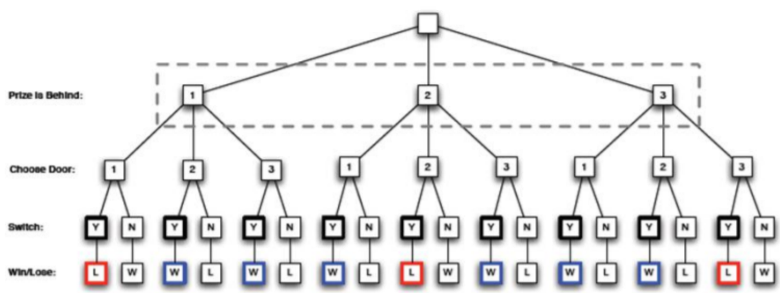


Figura 2. Diagrama de árvores para o Problema de Monty Hall.

Analisando exclusivamente os resultados provenientes da mudança de porta ou não, os quais aparecem em negrito, com bordas coloridas. Este é o evento definido por T. Suponha que o evento G consiste dos resultados em que o competidor ganha. (Isso é mostrado na linha inferior do diagrama com um W.) Estamos interessados em $P(G|T)$. Ou seja, quais são as chances de ganhar, visto que optamos em trocar de porta? Em T, há precisamente seis resultados nos quais o jogador irá ganhar. Se cada um desses resultados, mutuamente exclusivos, tem probabilidade 1/18, então:

$$P(T \cap G) = 6\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{1}{3},$$

e quando há troca em 9 das 18 possibilidades, temos

$$P(T) = 9\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$P(G|T) = \frac{P(T \cap G)}{P(T)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Assim, observamos que se usarmos a estratégia de trocar de porta temos 2/3 de probabilidade de ganhar o prêmio, e se não trocar de porta, 1/3 de probabilidade de ganhar o prêmio. Portanto, trocar de porta é melhor. Outra explicação pode ser identificada considerando apenas os resultados quando ocorrer troca. Observe que há 9 resultados quando há troca da porta original para a outra. Em 6 dessas 9 trocas, o jogador ganha o prêmio, enquanto que em 3 não ganha. Assim, as chances de ganhar o prêmio quando há troca de porta é 6/9 ou 2/3. Mais detalhes da solução, pela definição e pelo Teorema de Bayes, pode ser encontrada em Santos (2015).

Considerações Finais

Vemos que o problema de Monty Hall quando apresentado pela primeira para as pessoas provoca uma forte tendência em assumirmos que cada porta tem uma probabilidade igual e o que as fazem concluir que a mudança de porta não importa, uma vez que aberta uma porta, sobram duas e há 50% de chance de se escolher entre uma ou outra porta.

As razões dessas percepções iniciais, desta contradição lógica, são questões estudadas até por economistas e filósofos, com relatos de que quando o jogo é replicado em experimentos, a maioria dos participantes prefere continuar com a escolha original e uma das hipóteses é de que, ao decidir, focamos em nossas hipóteses iniciais e nos agarramos a ela, similar ao mecanismo dos custos irrecuperáveis, por exemplo, quando as pessoas insistem em alguns investimentos mesmo quando estão tendo prejuízo.

O "Paradoxo de Monty Hall" é um problema de decisão cuja solução depende do conceito de probabilidade condicional e onde assume-se que os prêmios são escondidos aleatoriamente para as portas, e este processo não pode ser visto. O participante deve escolher primeiro uma porta e por último decidir se quer ou não mudar de porta tendo sido mostrada uma porta incorreta (com um bode escondido atrás dela).

Em resumo, se mantiver a sua escolha original, ele ganha se originalmente escolheu o carro (com probabilidade de 1/3), enquanto que se mudar, ganha se escolheu originalmente uma das duas cabras (com probabilidade de 2/3). Portanto, o participante precisa mudar a sua escolha se quiser maximizar a probabilidade de ganhar o carro.

Um paradoxo é uma ideia estranha oposta ao que normalmente é considerado verdadeiro à luz da opinião geral. Assim, o paradoxo de Monty Hall é o contraditório que surge quando dizemos que trocar de porta dobram as chances de encontrar o prêmio, e este pensamento paradoxal pode ajudar a mudar as atitudes das pessoas.

Podemos ver também que o problema de Monty Hall pode ser usado como um elemento motivador da discussão em torno do conceito de probabilidade condicional, ou seja, pode ser adotado como uma estratégia pedagógica em sala de aula para o ensino de probabilidades, possibilitando ao professor diversificar o material didático para que os estudantes possam interagir, simular, desenvolver suas percepções cognitivas e suas habilidades individuais.

Referências

[1] MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. Noções de Probabilidade e Estatística. 6 Ed. São Paulo: Editora USP, 2004.

[2] MLODINOW, L. *O Andar do Bêbado*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

[3] SANTOS, L. G. O Problema de Monty-Hall: uma abordagem introdutória para o estudo da probabilidade condicional. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis/SC, 2015.

[4] SCHEINERMAN, E. *Matemática Discreta: uma introdução*. 2 Ed, Cengage Learning, 2011.

[5] VOS SAVANT, M. *The Power of Logical Thinking*. New York. Editora St. Martin's Press, 1996.

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Entrevistas

Nas duas entrevistas a seguir, os professores doutores *Jocemar de Quadros Chagas* (coordenador do curso de Licenciatura em Matemática na modalidade a distância) e *Marcos Calçada* (coordenador do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG conversam sobre as particularidades de cada curso.

Entrevista com a coordenador Prof. Jocemar de Quadros Chagas

1. **Você poderia fazer uma breve apresentação da sua formação acadêmica e das suas atribuições como coordenador(a) do curso?**
   Sou licenciado em Matemática pela Universidade de Passo Fundo, onde concluí minha graduação em 2001, no Campus Carazinho. Em 2005 concluí o mestrado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina, e em 2015 o doutorado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Em ambos os cursos, minha área de concentração foi Análise Matemática, onde estudei Equações Diferenciais. Como coordenador do curso de Licenciatura em Matemática EaD da UEPG (ofertado em convênio com a UAB - Universidade Aberta do Brasil), minhas principais atribuições são fazer o acompanhamento do(a)s aluno(a)s e de suas necessidades, desde a entrada no curso até a conclusão; organizar a distribuição das disciplinas no calendário acadêmico; e orientar as atividades dos professores formadores de todas as disciplinas do curso; sempre zelando pelo bom funcionamento do curso como um todo.

2. **Como é o funcionamento do curso de Licenciatura em Matemática à Distância?**
   O curso tem duração de 4 anos, dividido em 8 períodos. Em cada período, as disciplinas são oferecidas trimestralmente, ou seja, a cada dois/três meses o(a) aluno(a) se dedica a estudar o conteúdo de três a quatro disciplinas, utilizando uma plataforma virtual que chamamos de AVA - Ambiente Virtual de Aprendizagem. Durante este período o(a) aluno(a) percorre o roteiro de estudo elaborado pelo professor formador de cada disciplina, tem o auxílio de um tutor on-line para tirar as dúvidas que tiver durante seu estudo, participa de webconferências com o professor formador, e realiza atividades avaliativas no próprio AVA. Todo esse estudo pode ser realizado em casa, mas as estruturas dos polos de apoio presencial estão disponíveis para quem desejar utilizar. Ao final de cada trimestre são realizadas provas presenciais das disciplinas estudadas no período, sempre no polo de matrícula do(a) aluno(a), e uma vez por semestre ocorre um seminário presencial no polo, cujo objetivo é integrar os conheci-

mentos adquiridos. Nos últimos dois anos do curso as disciplinas de Estágio Curricular Supervisionado possibilitam vivenciar o campo de trabalho em escolas, não mais como aluno(a) e sim iniciando sua atuação como docente, com a orientação de um professor experiente da UEPG.

3. **Existe algum tipo de requisito para um(a) candidato(a) que pretende cursar Licenciatura em Matemática à distância? Qual(ais)?**
   Gostar de Matemática (risos). Não há um pré-requisito específico, mas normalmente quem se interessa pelo curso apresenta facilidade com a Matemática, e/ou interesse por raciocínio lógico e resolução de problemas, e/ou vontade de se tornar professor(a).

4. **Quais dicas você daria para um(a) interessado(a) em cursar Licenciatura em Matemática à Distância?**
   A primeira dica é "Leia, leia muito. Livros, reportagens, HQs, textos de matemática ...", A natureza de um curso à distância exige que a comunicação entre alunos, professores e tutores seja eficiente, então as habilidades de interpretação de texto e de expressão oral e escrita são essenciais, e a leitura é a melhor maneira de desenvolver estas habilidades. Outra habilidade necessária é ser disciplinado ao estudar, então a segunda dica é que o interessado já procure desenvolver hábitos e rotinas de estudo ainda durante o Ensino Básico e seus estudos de preparação para o vestibular.

5. **Qual o perfil do profissional que faz o curso de Licenciatura em Matemática à Distância?** São professores com conhecimentos sólidos em Matemática e capazes de enfrentar os desafios e as mudanças no âmbito educacional. Têm habilidades de estabelecer relações entre a Matemática e outras ciências e fazer uso de tecnologias educacionais, e costumam ser críticos e conscientes da realidade, estando aptos a atuar de forma responsável e relevante em seu trabalho a favor do desenvolvimento de seus alunos e da sociedade em que estão inseridos.

6. **Qual é o mercado de trabalho para o profissional formado na área?**
   Concluir um curso de Licenciatura em Matemática (à distância ou presencial) habilita a lecionar Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, então o mercado de trabalho imediato são escolas do Ensino Básico (municipais, estaduais e particulares).

7. **É possível continuar estudando em programas de pós-graduação? A UEPG oferece programas na área? Quais?**

Sim, o licenciado pode continuar estudando em cursos de Pós-Graduação, tanto na área da Matemática quanto na área da Educação. Na UEPG, excelentes opções oferecidas são o PROFMAT ? Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, com áreas de estudo como Análise Matemática, Ensino de Matemática, Geometria e Matemática Aplicada; e o PPGECEM - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, com foco em Ensino de Ciências, Educação Matemática e Formação de Professores. Além destes dois programas, é comum os graduados em Matemática buscarem na UEPG o Mestrado em Ciências ? Física e o Mestrado em Educação. O PROFMAT funciona em regime semi-presencial, onde os alunos têm aulas em Ponta Grossa apenas nas sextas-feiras e sábados, e os demais programas são presenciais, ou seja, o aluno precisa estar em Ponta Grossa em tempo integral.

8. **Onde é possível obter mais informações sobre o curso de Licenciatura em Matemática à Distância da UEPG?**
   Existem duas páginas para se obter informações sobre o curso: do NUTEAD: `ead.uepg.br/site/` e do do DEMAT/UEPG: `www2.uepg.br/demat/` Além disso, é sempre bom o interessado visitar regularmente os sites da UEPG `uepg.br` e do NUTEAD em busca de notícias sobre vestibular. É necessário ficar atento, pois o vestibular para os cursos à distância pode ocorrer em períodos diferentes dos vestibulares para os cursos presenciais da UEPG.

Entrevista com o coordenador Prof. Marcos Calçada

1. **Você poderia fazer uma breve apresentação da sua formação acadêmica?**
   Fiz minha graduação em Matemática e Computação Científica na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Também nesta instituição fiz mestrado em Matemática com área de concentração em Geometria e Topologia. O doutorado foi realizado no Instituto de Física Teórica que pertence à Universidade Estadual de São Paulo (UNESP). Recentemente, realizei um pós-doutorado na Leeds University no Reino Unido.

   Iniciei como coordenador do Profmat em março de 2019. Tenho várias atribuições como coordenador, mas em essência devo dirigir e coordenar todas as atividades do Profmat-UEPG.

2. **Qual é o perfil dos alunos ingressantes no Programa de Mestrado?**
   O Profmat visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercí-

cio na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência.

3. **Como é o funcionamento do programa de mestrado (entrada, duração, disciplinas, dissertação)?**
O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat é um programa de mestrado semipresencial na área de Matemática com oferta nacional. É formado por uma rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil/Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). O Profmat surgiu mediante uma ação induzida pela CAPES junto à comunidade científica da área de Matemática, representada e coordenada pela SBM. O Profmat foi recomendado pela CAPES, reconhecido pelo Conselho Nacional de Educação - CNE e validado pelo Ministério da Educação com nota 5 (nota máxima para programas de mestrado). O Profmat realiza seleções anuais, regulamentadas em edital que descrevem orientações e informações necessárias para a realização do Exame Nacional de Acesso (ENA) ao programa. O prazo mínimo de duração do Curso será de 12 (doze) meses, sendo que a duração regular do Curso é de 24 (vinte e quatro) meses. Os estudantes deverão completar todos os requisitos do Curso no prazo máximo de 36 (trinta e seis) meses, impreterivelmente.

   A seguir descrevemos brevemente a rotina acadêmica. Inicialmente, o discente deve cursar as Disciplinas Básicas do Profmat. Elas são disciplinas obrigatórias ofertadas nacionalmente durante os 02 (dois) primeiros semestres regulares do programa. São elas:

   MA 11 - Números e Funções Reais

   MA 12 - Matemática Discreta

   MA 13 - Geometria

   MA 14 - Aritmética

   No verão do segundo ano deve ser cursada a disciplina

   MA 21 - Resolução de Problemas

   Nos dois semestres do segundo ano devem ser cursadas as disciplinas

   MA 22 - Fundamentos de Cálculo

MA 23 - Geometria Analítica

Eletiva 1

Eletiva 2

As disciplinas eletivas são escolhidas pelas turmas dentro de um rol de várias disciplinas presentes na matriz curricular. Após o término das Disciplinas Básicas do primeiro ano, os discentes estão aptos a fazer o Exame de Qualificação que consiste numa única avaliação escrita, ofertada 02 (duas) vezes por ano, versando sobre o conteúdo das Disciplinas Básicas. A dissertação deve versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula. O verão do terceiro ano é utilizado para finalizar a dissertação.

4. **Quais as perspectivas de área de atuação no mercado de trabalho para o egresso do Programa de Mestrado?**
   Os egressos do Profmat atuam principalmente na Educação Básica. De fato, a meta do Profmat é qualificar tais profissionais e assim contribuir com o desenvolvimento da Educação Básica no país.

5. **Onde é possível obter mais detalhes ou informações sobre o curso?**
   Na página do Profmat-UEPG: `https://www2.uepg.br/profmat/` e na página do Profmat nacional `https://www.profmat-sbm.org.br/`.

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática

UEPG

Curiosidades

Quem disse que Matemática não dá dinheiro?

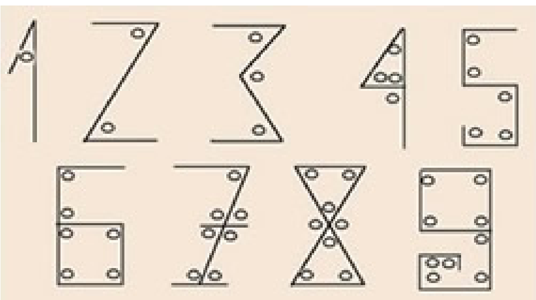
Em 2000, o Clay Mathematics Institute anunciou um prêmio de 1 milhão dólares a cada matemático que fosse capaz de resolver os chamados “problemas do milênio”: Sete problemas bolados durante vários séculos e que nunca haviam sido resolvidos.

O prêmio é bom, mas isso não significa que ele sairia tão facilmente. Demorou dez anos para a fundação desembolsar o primeiro dos sete pagamentos, feito ao russo Grigori Perelman, que resolveu a chamada “conjectura de Poincaré”, uma série de cálculos abstratos envolvendo esferas tridimensionais. Mas pasmem! Ele rejeitou o prêmio.

O traço no meio do sete

Muitas pessoas, ao escreverem o número 7, ainda colocam um pequeno traço no meio do número. Oficialmente, este pequeno traço não existe, como podemos perceber nos teclados dos computadores ou calculadoras. Mas qual é a origem deste costume?

Para melhor entender as diferentes grafias do número 7, deve-se lembrar que nosso sistema é originário do sistema indo-arábico. Existe a teoria de que o formato destes números está relacionado à quantidade de ângulos que possuem, como mostra a figura abaixo (o 1 possui 1 ângulo, o 2 possui 2 ângulos ...). Assim, o traço seria necessário para realizar a diferenciação.



O traço do sete ainda é um recurso utilizado nas escolas para que os alunos das séries iniciais possam diferenciar sua forma da escrita do número 1. O mesmo recurso é utilizado em atividades relacionadas à informática, para orientar os digitadores na diferenciação do zero em relação à letra O. No zero, é colocado um traço interno na diagonal.

O que é mais firme: uma cadeira de 3 pés ou uma cadeira de 4 pés?

Pode ser que você pense que, quanto maior o número de pés, mais firme é a cadeira. Mas é aí que você se engana. As cadeiras com 4 pés tendem a ficar bambas com mais facilidade, do que as que têm apenas 3 pés. A matemática ajuda a entender melhor isso. Em Geometria Plana, são necessários 3 pontos não alinhados (não colineares) para determinar um único plano, e quando temos 4 pontos, é possível determinar até quatro planos diferentes. Dessa forma, se a cadeira tiver 4 pés, ela pode se apoiar em qualquer um deles, e assim ficar dançando. Mas calma! Não precisa se livrar das suas cadeiras quadrúpedes, já que um simples calço pode ajudar a conter todos os pés no mesmo plano.

O gênio precoce e indomável

Adolescentes da atualidade jogam videogame ou praticam algum esporte como distração, mas Galois foi diferente; seu hobby era o estudo. O matemático Evariste Galois é um dos destaques dessa ciência por seu conhecimento elevado ainda na adolescência. Ele chegou a questionar os professores e abandonar as aulas para estudar por livros de gênios já consagrados, pois se considerava um nível acima daquilo tudo.

Mas, tal como um cometa, desapareceu tão rápido como tinha aparecido. O que se sabe é que, em 1832, Galois foi defender sua honra. Escolheu uma das pistolas, deu 25 passos, virou-se e morreu, sem saber que, deixando um legado de apenas 60 páginas de garranchos, viria a ser considerado não só um dos mais criativos pensadores que a ciência já teve, mas uma das pedras fundamentais na evolução da Matemática.

Conjectura de Goldbach

Em matemática, uma conjectura é uma proposição que muitos matemáticos acreditam ser verdadeira, com base em presunções, evidências, pressentimentos, hipóteses, porém ainda não conseguiram prová-la.

A famosa conjectura de Goldbach é um dos problemas mais antigos não resolvidos da matemática. Foi proposta no dia 7 de junho de 1742 pelo matemático prussiano Christian Goldbach, em uma carta escrita para Leonhard Euler.

A conjectura diz o seguinte: Todo número par maior que 2 pode ser representado pela soma de dois números primos. Por exemplo: $4 = 2 + 2$; $6 = 3 + 3$; $8 = 3 + 5$; $10 = 3 + 7 = 5 + 5$; $12 = 5 + 7$, etc.

Esta proposição parece muito simples, certo? Mas o fato é que até hoje ninguém conseguiu demonstrá-la! Diversas verificações por computador já confirmaram a conjectura de Goldbach para os mais variados números. No entanto, a demonstração matemática nunca ocorreu.

Em 1995, o matemático francês Olivier Ramaré chegou ao resultado mais próximo apresentado até agora, provando que todo número par é a soma de, no máximo, seis números primos. Existe uma variação chamada conjectura "fraca" de Goldbach, que diz o seguinte: Todos os números ímpares maiores que 7 são a soma de três primos ímpares.

Ela recebe o nome de “fraca” porque a original (conhecida como conjectura “forte” de Goldbach), se demonstrada, demonstraria automaticamente a conjectura fraca de Goldbach. Enquanto a conjectura fraca de Goldbach parece ter sido provada em 2013 pelo matemático peruano Harald Helfgott, a conjectura mais forte permanece sem solução.

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Soluções dos Problemas Propostos

1. (Proposto na Revista da OPMat, volume 1) Em cada quadradinho de um tabuleiro 3×3 é colocado um dos números -1, 0 ou 1. Prove que entre todas as somas das linhas, colunas e diagonais do tabuleiro há duas que são iguais. Por exemplo, no tabuleiro abaixo a soma da segunda linha é 2, que coincide com a soma da terceira coluna:

-1	-1	1
1	0	1
0	-1	0

SOLUÇÃO (apresentada por Lucas Perondi Kist)

Para calcular a soma de uma linha, coluna ou diagonal desse tabuleiro 3×3, devemos somar exatamente três números, já que em cada um deles há três espaços para preenchermos com um número. Dessa forma, sabendo que podemos colocar apenas os números -1, 0 ou 1 em cada espaço, temos que a menor soma possível é a soma do menor número três vezes, ou seja,

$$(-1) + (-1) + (-1) = -1 - 1 - 1 = -3.$$

Da mesma forma, a maior soma possível é a soma do maior três vezes, ou seja, $1 + 1 + 1 = 3$. Agora basta calcular as outras somas possíveis, as quais são menores que $+3$ e maiores que -3 (sem realizar todas as adições possíveis), que são:

- -2 (obtido pela soma $-1 + (-1) + 0 = -2$)
- -1 (por exemplo, $-1 + (-1) + 1 = -1$)
- 0 (por exemplo, $-1 + 1 + 0 = 0$)
- 1 (por exemplo, $1 + 0 + 0 = 1$)
- 2 (obtido pela soma $1 + 1 + 0 = 2$)

Assim, percebemos que há sete somas possíveis. Entretanto, no tabuleiro 3×3, há três linhas, três colunas e duas diagonais, ou seja, vamos realizar $3+3+2 = 8$ adições. Como vamos realizar 8 adições e temos apenas 7 somas possíveis, pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos duas dessas adições terão o mesmo resultado, como queríamos provar.

2. (Proposto na Revista da OPMat, volume 1) No triângulo isósceles ABC tem-se $AB = AC$. Os pontos M, N e P dos lados AB, BC e CA são tais que $PM = PN$. Sendo $\angle PMA = \alpha$, $\angle NPC = \beta$ e $\angle MNB = \theta$ mostre que

$$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

SOLUÇÃO (apresentada por Lucas Perondi Kist)

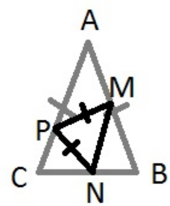


Figura 1. Possível representação do enunciado.

Seja $\angle PMN = \sigma$, como $PM = PN$, então $\angle PNM = \angle PMN = \sigma$. Além disso, seja $\angle ABC = \omega$, como $AB = AC$, então $\angle ACB = \angle ABC = \omega$. Já que os ângulos $\angle AMP$, $\angle PMN$ e $\angle NMB$ são suplementares, temos que $\alpha + \sigma + \angle NMB = 180$ [1]. Pelo $\triangle MBN$, temos que $\omega + \theta + \angle NMB = 180$ [2]. Igualando [1] e [2], temos:

$\alpha + \sigma + \angle NMB = \omega + \theta + \angle NMB$

$\alpha + \sigma = \omega + \theta$ [3]

Pelo $\triangle PNC$, temos que $\omega + \beta + \angle PNC = 180$ [4]. Como os pontos C, N e B são colineares, temos que $\theta + \sigma + \angle PNC = 180$ [5]. Igualando [4] e [5], temos:

$\omega + \beta + \angle PNC = \theta + \sigma + \angle PNC$

$\omega + \beta = \theta + \sigma$ [6]

Somando [3] e [6], temos:

$\alpha + \sigma + \omega + \beta = \omega + \theta + \theta + \sigma$

$\alpha + \beta = 2\theta$

$\theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$, como queríamos mostrar.

3. (Proposto na Revista da OPMat, volume 1) O número $1\underbrace{000\ldots00}_{2006 \text{ zeros}}1$ é composto? Argumente.

   SOLUÇÃO (apresentada por Lucas Perondi Kist)

   No número 1000...001, com 2006 zeros entre os dois 1s, o 1 à esquerda é o 1° algarismo do número, ou seja, ocupa uma posição ímpar. O 1 à direita é o 2008° algarismo, pois há 2006 zeros e o 1 à esquerda dos zeros antes dele. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, todo número natural maior que 1 ou é primo ou pode ser escrito como produto de números primos (composto).

   Como esse número termina em 1, ou seja, não é par, nem termina em 0 ou 5, segue que não é divisível por 2 nem por 5; a soma de seus algarismos é $1 + 0 + \cdots + 0 + 1 = 2$, logo, não é divisível por 3. Como ele possui 2008 algarismos, também possui $\frac{2008}{3} = 669, 3\cdots = 670$ classes (agrupamento dos algarismos de três em três), sendo $\frac{670}{2} = 335$ ímpares e $670 - 335 = 335$ pares. Um dos critérios de divisibilidade por 7 é que um número é divisível por sete se a diferença entre a soma das classes ímpares e a soma das classes pares é divisível por 7. De acordo com os cálculos acima, podemos concluir que o 1 da esquerda compõe sozinho a 335^a classe par, e 001 à direita é a 1^a classe ímpar. Como as demais classes são nulas, a soma das classes ímpares é 1 e a soma das classes pares é 1. Fazendo a diferença, temos $1 - 1 = 0$, que é divisível por 7.

   Além disso, de acordo com o critério de divisibilidade por 11, um número é divisível por 11 quando a diferença entre a soma dos algarismos em posição par e a soma dos algarismos em posição ímpar é múltipla de 11. Nesse caso, a soma dos algarismos em posição par é 1, já que o único algarismo não nulo em posição par é o 1 à direita, e a soma dos algarismos em posição ímpar é 1, já que o único algarismo não nulo em posição ímpar é o 1 à esquerda. Como $1 - 1 = 0$, e zero é múltiplo de 11, o número $1000\ldots001$, com 2006 zeros entre os dois 1s é composto, pois também é múltiplo de 11. Além disso, como é múltiplo de 7 e 11, é, portanto, múltiplo de 77.

   Portanto, o número 1000...001, com 2006 zeros entre os dois 1's é composto.

4. (Proposto na Revista da OPMat, volume 1) Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}^*$ tal que

   $$f(x + y) \cdot f(x - y) = [f(x) \cdot f(y)]^2 \text{ e } f(1) \neq 1.$$

   Prove que, para todo $x \in \mathbb{Z}$,

   $$\log_{f(1)} f(x)$$

é um quadrado perfeito.

SOLUÇÃO (apresentada por Leonardo Ferreira)

O logaritmo de $f(x)$ na base $f(1)$ é igual a k. Então na verdade temos que provar que k é um quadrado perfeito na igualdade $f(x) = f(1)^k$.

Consideremos $y = 0$:

$$\begin{aligned} f(x+0)\cdot f(x-0) = [f(x)\cdot f(0)]^2 \quad &\Rightarrow \quad f(x)\cdot f(x) = f(x)^2\cdot f(0)^2 \\ &\Rightarrow \quad f(x)^2 = f(x)^2\cdot f(0) \\ &\Rightarrow \quad f(0) = 1, \end{aligned}$$

utilizaremos isso posteriormente.

Agora, consideremos $y = 1$:

$$f(x+1)\cdot f(x-1) = [f(x)\cdot f(1)]^2 \Rightarrow I) f(x+1)\cdot f(x-1) = f(x)^2\cdot f(1)^2,$$

chamemos de equação “I)”, que será também utilizada posteriormente.

Tendo esses dados anotados, prosseguiremos para a estratégia principal: utilizar a ferramenta de indução matemática finita, com uma pequena mas considerável diferença: em vez de “provar que: se funciona para n, então funcionará também para $n+1$” "provar que: se funciona pra n, então funcionará também para $n+1$ E para $n-1$”.

Agora, usando a equação "I)", calculemos alguns valores para nossa base:

Para $x = 1$:

$$f(2)\cdot f(0) = f(1)^2\cdot f(1)^2 \Rightarrow f(2) = f(1)^4.$$

Para $x = 3$:

$$f(3)\cdot f(1) = f(2)^2\cdot f(1)^2 \Rightarrow f(3) = (f(1)^4)^2\cdot f(1) \Rightarrow f(3) = f(1)^9.$$

A minha hipótese h de indução analisando esses dados é de que $f(n) = f(1)^{n^2}$ funciona pra todo $n \in \mathbb{Z}$. Como se pode ver acima, nossa afirmação é válida para os valores da base. Então partiremos para a indução: segundo h, $f(n) = f(1)^{n^2}$, obtemos $f(n+1) = f(n)\cdot f(1)^{(2n+1)}$ e $f(n-1) = f(n)\cdot f(1)^{(-2n+1)}$. Multiplicando essas duas equações membro a membro, chegamos na equação

"I" demonstrada anteriormente, sendo assim, provamos a veracidade da nossa hipótese de indução.

Portanto $f(x) = f(1)^k$ é da forma $f(n) = f(1)^{n^2}$, logo k é da forma n^2 (ou seja, um quadrado perfeito).

5. (Proposto na Revista da OPMat, volume 1) Encontre todos os números palíndromos de cinco algarismos que são quadrados de números palíndromos (Observação: um número é dito *palíndromo* quando lido da esquerda para a direita e da direita para a esquerda resulta no mesmo número: por exemplo, 16761 é um palíndromo de cinco algarismos, e 2332 é um palíndromo de quatro algarismos).

   SOLUÇÃO (apresentada por Isabella Yukari Fujita)

   Realizando os quadrados dos números, temos que o número 100 é o primeiro número cujo seu quadrado é de 5 algarismos: 10.000, mas ambos não são palíndromos. Também temos o número 316 que é o último número cujo seu quadrado (99856) é de 5 algarismos, mas também ambos não são palíndromos. Porém, a partir disso, pode-se estabelecer o seguinte, os números palíndromos que devemos achar estarão entre $100 < x < 316$ (x são as possibilidades). De acordo com o enunciado, é visto que um número palíndromo é aquele que lido da esquerda pra direita, ou da direita para a esquerda é o mesmo. Seja então, os números palíndromos entre $100 < x < 316$: 101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191, 202, 212, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292, 303, 313. Fazendo o quadrado de cada um, temos alguns números cujos quadrados não são palíndromos, portanto devem ser retirados. São eles:

   $101 \Longrightarrow 101^2 = 10201$

   $111 \Longrightarrow 111^2 = 12321$

   $121 \Longrightarrow 121^2 = 14641$

   $131 \Longrightarrow 131^2 = 17161$

   $141 \Longrightarrow 141^2 = 19881$

   $151 \Longrightarrow 151^2 = 22801$

   $161 \Longrightarrow 161^2 = 25921$

   $171 \Longrightarrow 171^2 = 29241$

   $181 \Longrightarrow 181^2 = 32761$

$191 \Longrightarrow 191^2 = 36481$

$202 \Longrightarrow 202^2 = 40804$

$212 \Longrightarrow 212^2 = 44944$

$222 \Longrightarrow 222^2 = 49284$

$232 \Longrightarrow 232^2 = 53824$

$242 \Longrightarrow 242^2 = 58564$

$252 \Longrightarrow 252^2 = 63504$

$262 \Longrightarrow 262^2 = 68644$

$272 \Longrightarrow 272^2 = 73984$

$282 \Longrightarrow 282^2 = 79524$

$292 \Longrightarrow 292^2 = 85264$

$303 \Longrightarrow 303^2 = 91809$

$313 \Longrightarrow 313^2 = 97969$

Assim, teremos apenas:

$101 \Longrightarrow 101^2 = 10201$

$111 \Longrightarrow 111^2 = 12321$

$121 \Longrightarrow 121^2 = 14641$

$202 \Longrightarrow 202^2 = 40804$

$212 \Longrightarrow 212^2 = 44944$

Logo, 10201, 12321, 14641, 40804, 44944 são números palíndromos de 5 algarismos quadrados de outros números palíndromos (101, 111, 121, 202, 212, respectivamente).

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Problemas Propostos

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos. As melhores soluções serão publicadas na próxima edição e os autores receberão certificação de congratulação e um exemplar da mesma (Veja "Informações Gerais").

1. Encontre todas as soluções reais para a equação:

$$(x^2 - 7x + 11)^{x^2-13x+42} = 1.$$

2. Em um quadrado $ABCD$, marque o ponto P no lado AB tal que $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{3}{2}$ e marque o ponto Q na diagonal AC tal que $\dfrac{AQ}{QC} = 4$. Quais são as medidas dos ângulos do triângulo PDQ?

3. Quatro amigos viajam para Caiobá - PR: Zeca está dirigindo um carro, Tom pilota uma moto, Juca está de caminhão e Manuel de bicicleta. Cada meio de transporte está mantendo velocidade constante. Zeca estava ao lado de Juca ao meio dia, estava ao lado de Manuel às 14h e estava ao lado de Tom às 16h. Já Tom estava ao lado de Juca às 17h e estava ao lado de Manuel às 18h. Em qual instante Manuel estava ao lado de Juca?

4. Considere $a, b, c \in \mathbb{N}$. Quantas soluções existem para a equação: $a! + b! = c!$?

5. Os três zeros da função: $f(x) = x^3 - 3x^2 + \alpha x + 1$ estão em progressão aritmética. Qual o valor de α?

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Informações Gerais

Envio de Artigos e Soluções

Os **Artigos** podem ser submetidos nas próximas edições da Revista da OPMat. Os documentos devem ser, preferencialmente, redigidos em LaTeX. As **Soluções** para os desafios encontrados na seção "Problemas Propostos" devem ser claras e submetidas juntamente com o nome do participante e o número da respectiva questão.

As submissões de artigos e soluções podem ser feitas pelo e-mail:

revistaopmat@gmail.com.

Como Adquirir a Revista

Todos os alunos premiados com medalhas na 8^a OPMat receberão uma cópia física da Revista. A versão eletrônica será disponibilizada em link próprio divulgado nas redes sociais da Olimpíada Pontagrossense de Matemática.

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, apresentar sugestões ou fazer correções através dos contatos:

Comitê Editorial
revistaopmat@gmail.com

Olímpiada Pontagrossense de Matemática
opmat@uepg.br - (42) 3220-3048
www2.uepg.br/opmat/
facebook.com/olimpiada.pontagrossensedematematica
Instagram: @opmat_uepg

Departamento de Matemática e Estatística da
Universidade Estadual de Ponta Grossa
Campus Uvaranas - Bloco L - Uvaranas
Avenida General Carlos Cavalcanti, 4748
Ponta Grossa - Paraná - CEP 84030-000
demat@uepg.br - (42) 3220-3050
www2.uepg.br/demat/

Realização:

Universidade Estadual de Ponta Grossa

PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO E ASSUNTOS CULTURAIS

Departamento de Matemática e Estatística

Apoio:

Olimpíada Brasileira de Matemática

impa

Informações:

www2.uepg.br/opmat **E-mail: opmat@uepg.br**

www.facebook.com/olimpiada.pontagrossensedematematica

Fones: 99831-1222 / 3220-3048