3
2021

Revista OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

"Promovendo a inclusão social e ajudando a mudar o cenário da educação."

Universidade Estadual de Ponta Grossa,
Setor de Ciências Exatas e Naturais
Departamento de Matemática e Estatística

Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

v.3 (2021)

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Reitor: Miguel Sanches Neto
Vice-Reitor: Everson Augusto Krum

PRÓ-REITORIA DE ASSUNTOS ADMINISTRATIVOS - PROAD

Pró-Reitor: Ivo Mottin Demiate

PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO - PROEX

Pró-Reitora: Edina Schimanski

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO - PROGRAD

Pró-Reitor: Carlos Willians Jaques Morais

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Chefe: Deyse Márcia Pacheco Gebert
Chefe Adjunto: Fabiano Manoel de Andrade

Apoio:

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA - IMPA

CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática - OPMat/ Universidade Estadual de Ponta Grossa. Departamento de Matemática e Estatística. v.1 (2019). Ponta Grossa: UEPG/ DEMAT, 2021.

Anual
v.3, 2021

1. Matemática – competições. 2. Matemática – questões problemas. 3. Matemática – exercícios. I. Universidade Estadual de Ponta Grossa. II. Departamento de Matemática e Estatística. III. T.

CDD: 510

Ficha Catalográfica elaborada por Maria Luzia Fernandes Bertholino dos Santos – CRB9/986

Comissão da Olimpíada Pontagrossense de Matemática: Alessandra Cardozo, Carmen Lucia Valgas, Elisangela dos Santos Meza, Jorge Valgas, José Trobia, Josnei Francisco Peruzzo, Olinda Thomé Chamma e Scheila Valechenski Biehl

Coordenadora da OPMat: Elisangela dos Santos Meza

Coordenador da Revista da OPMat: Marcos Teixeira Alves

Supervisores da Revista OPMat: Marcos Teixeira Alves e Scheila Valechenski Biehl

Comitê Editorial da Revista:
Daniel Silveira Salamucha
Elisangela dos Santos Meza
Hugo Gielamo Próspero
José Rafael Bueno dos Santos
Karine Moreira dos Santos
Keyti Alyne Francisco de Souza
Marcos Teixeira Alves
Núbia Aline Lutke
Rodrigo Santiago Biasio
Scheila Valechenski Biehl
Talia Haas

Editoração Eletrônica:
Daniel Silveira Salamucha
Elisangela dos Santos Meza
Emelyn Souza Cezar
Hugo Gielamo Próspero
José Rafael Bueno dos Santos
Karine Moreira dos Santos
Keyti Alyne Francisco de Souza
Marcos Teixeira Alves
Núbia Aline Lutke
Rodrigo Santiago Biasio
Scheila Valechenski Biehl
Talia Haas

Arte da Capa:
CCOM - Coordenadoria de Comunicação Social

Postagem:
Segundo semestre de 2021

Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática v.3 (2021)

Sumário

Apresentação

Caro Leitor,

A *Revista da Olímpiada Pontagrossense de Matemática* é resultado do projeto de extensão: *Olímpiadas de Matemática: Promovendo a Inclusão Social e ajudando a mudar o cenário da Educação*, desenvolvido pelo Departamento de Matemática e Estatística da UEPG. Tem periodicidade anual, sendo este o seu 3° volume.

O principal objetivo da Revista é compor um material robusto em conteúdos matemáticos com vista a ser utilizado como recurso pedagógico ao letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e como fonte de estudo e treinamento para olimpíadas de matemática.

Encorajamos todos os leitores a nos enviar soluções para os desafios encontrados na seção "Problemas Propostos", bem como submeter artigos, que serão publicados na próxima edição, desde que sejam aprovados pelo Comitê Editorial da Revista.

Para ficar por dentro das notícias da Olimpíada Pontagrossense de Matemática, próximas edições, fotos e resultados, acompanhe-nos pelas nossas redes sociais:

`facebook.com/olimpiada.pontagrossensedematematica`

`instagram.com/opmat_uepg/`

e pela homepage:

`www2.uepg.br/opmat/revista-da-opmat/`

Ponta Grossa, 06 de dezembro de 2021.

Comitê Editorial

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

4ª OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

"Promovendo a inclusão social e ajudando a mudar o cenário da educação."

Premiados

A Cerimônia de Premiação da *4ª Olimpíada Pontagrossense de Matemática* ocorreu no dia 01 de abril de 2016, no Cine Teatro PAX, em dois horários distintos: às 9 horas para os alunos do Nível **Júnior** (5º ano do Ensino Fundamental I) e às 14 horas para os alunos dos Níveis **1** (6º e 7º anos do Ensino Fundamental II), **2** (8º e 9º anos do Ensino Fundamental II), **3** (1ª e 2ª séries do Ensino Médio) e **4** (3ª e 4ª séries do Ensino Médio e aqueles estudantes que tenham concluído Ensino Médio há menos de um ano e não tenham ingressado em nenhum curso superior, quando da realização da primeira fase da OPMat).

No período da manhã, a Cerimônia de Premiação contou com a presença das seguintes autoridades:

- Prof. Carlos Luciano Sant'Ana Vargas - Reitor da Universidade Estadual de Ponta Grossa
- Profa. Sandra Mara Dias Pedroso - Coordenadora de Matemática do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa
- Profa. Esméria de Lourdes Saveli - Secretária Municipal de Educação de Ponta Grossa
- Profa. Annaly Schewtschik - Assessora Pedagógica da Secretaria Municipal de Educação e Coordenadora de Matemática da Rede Municipal de Educação de Ponta Grossa
- Prof. Luiz Alexandre Gonçalves Cunha - Diretor do Setor de Ciências Exatas e Naturais da UEPG
- Profa. Margarete Aparecida dos Santos - Chefe do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG
- Prof. João Luiz Domingues Ribas - Representando o colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPG
- Profa. Elisangela dos Santos Meza - Coordenadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática
- Profa. Carmen Lúcia Valgas - Membro da comissão organizadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Nessa Cerimônia foram premiados 141 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 15,78% dos alunos que participaram do Nível Júnior da 4ª OPMat): 2 alunos com troféus; 5 com medalhas de ouro; 12 com medalhas de prata; 54 com medalhas de bronze e 70 com medalhas de menção honrosa.

Também foram entregues troféus para as escolas e para os professores dos alunos que obtiveram a maior pontuação na 4ª OPMat da rede particular e da rede pública. Todos os professores cujos alunos foram premiados receberam certificados de congratulações, assim como todas as escolas participantes da 4ª OPMat.

No período da tarde, a Cerimônia de Premiação contou com a presença das seguintes autoridades:

- Profa. Marilisa do Rocio Oliveira representando a reitoria - Pró-Reitora de Extensão e Assuntos Culturais da UEPG
- Profa. Sandra Mara Dias Pedroso - Coordenadora de Matemática do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa
- Prof. Wanderley Aparecido Cerniauskas - Chefe Adjunto do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG
- Prof. João Luiz Domingues Ribas - Representando o colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPG
- Profa. Elisangela dos Santos Meza - Coordenadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática
- Profa. Carmen Lúcia Valgas - Membro da comissão organizadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática
- Prof. Josnei Francisco Peruzzo - Membro da Comissão Organizadora da Olimpíada Pontagrossesnse de Matemática

Na ocasião foram premiados 240 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 32,38% dos alunos que participaram da segunda fase da 4ª OPMat): 8 estudantes com troféus; 16 com medalhas de ouro; 37 com medalhas de prata; 87 com medalhas de bronze e 100 com medalhas de menção honrosa.

Foram entregues troféus para as escolas e para os professores dos dois alunos que obtiveram a maior pontuação em cada nível (1, 2, 3 e 4) da 4ª OPMat, sendo um de escola particular e um de escola pública. Além disso, todos os professores cujos alunos foram premiados receberam certificados de congratulações, assim como todas as escolas participantes da 4ª OPMat.

Nível Júnior

Troféu

- Christian Gutknecht Baba (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lariane Antunes de Araujo (Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)

Ouro

- Christian Gutknecht Baba (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lorenzo Bazeggio Licodiedoff (Colégio Marista Pio XII)
- Eduardo Pazini Sari (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Rafael Garcia Nicolau (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Rodrigo Catto Menin (Escola Desafio)

Prata

- Lariane Antunes de Araujo (Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)
- Alice Sangalli Saito (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Bruno Rodrigues Di Mario (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Pedro Henrique de Souza (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Raul Alexandre Soares Lao (Colégio Sagrada Família)
- Thomas Lankszner Bach (Colégio Marista Pio XII)
- Maria Eduarda Vosgerau Ferreira Ribas (Colégio Pontagrossense Sepam)

- Calebe Streisky de Quadros (Colégio Sagrada Família)
- Helena Carneiro Madureira (Colégio Marista Pio XII)
- Jarede Metnek (Escola Municipal Professora Dércia do Carmo Noviski)
- Larissa Rodrigues (Escola Municipal Professora Maria Laura Pereira)
- Miguel Antonio Schuler Zoni (Colégio Marista Pio XII)

Bronze

- Leonardo de Freitas Faisst (Colégio Marista Pio XII)
- Leonardo Henrique Bonfanti (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gustavo Scarpim Schraier (Colégio Marista Pio XII)
- João Vitor Simões Cipolari (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Laura Borsato Farias (Colégio Sagrada Família)
- Taynara Sozim de Camargo (Colégio Integração)
- Pedro Elias Alves (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Geovana Ehlert Rosa (Colégio Marista Santa Mônica)
- Henrique Franzini Ozorio (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lyara Vitoria Vicente (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Camila Isis Felicio de Oliveira (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Denis Rauch (Colégio Integração)
- Eduardo Franzon Mosconi (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Emanuel Caetano Chemin Goulart (Colégio Sagrada Família)
- Felipe Chede Buffara Bezusko (Colégio Sagrada Família)
- Gabriel Natan Fuentes Stadler (Colégio Marista Pio XII)

- Hugo Salvadori (Colégio Marista Pio XII)
- João Ricardo Albuquerque (Colégio Sagrada Família)
- Rafael Caetano Chemin Goulart (Colégio Sagrada Família)
- Allana Vitoria Gomes (Colégio Neo Master)
- Gabriel Rolim de Moura Rodrigues (Colégio Marista Pio XII)
- George Dimitre Rybu (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Henrique Kravchychyn Rodrigues (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lorenzo Rupel Bobeck (Colégio Neo Master)
- Marcio Jose Primor Junior (Colégio Neo Master)
- Alvaro Ivanski Sabedotti (Colégio Neo Master)
- Enzo Christoforo Tavarnaro (Colégio Marista Pio XII)
- João Vitor Koliky (Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Schnirmann)
- Jefferson Luis Namur Junior (Escola Municipal Prefeito Theodoro Batista Rosas)
- Matheus Maksemiv Lichinski (Escola Municipal Felício Francisquiny)
- Anelize Vitoria Belniak (Escola Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha - CAIC)
- Bernardo de Lima da Silva (Escola Municipal São Jorge)
- Christian Lemes da Luz (Escola Municipal Professora Maria Laura Pereira)
- Raylan Pedroso (Escola Municipal Professora Maria Antonia de Andrade)
- Carlos Henrique da Silva Leal (Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Schnirmann)
- Gabriel Lazarine e Silva (Escola Municipal Professor Ivon Zardo)
- Giovanna Pesck de Alvarenga Freire (Escola Municipal Professor Plácido Cardon)

- Roberta Gorski (Escola Municipal Doutor Leopoldo Pinto Rosas)
- Gabriel Tamagno de Paula (Escola Municipal Professor Nelson Pereira Jorge)
- Gustavo Leandro Hilgemberg (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Ingrid do Prado Meira (Escola Municipal General Aldo Bonde)
- Kaua Jesus Cipriano Franca (Escola Municipal Doutor Leopoldo Pinto Rosas)
- Kauane Davila Souza Santos (Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel)
- Lorena Grollmann (Escola Municipal Professora Ecléa dos Passos Horn)
- Rayane de Lara Gonçalves (Escola Municipal Vereador Adelino Machado de Oliveira)
- Enzo Szimonek (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Mateus Henrique Gutierrez Alves (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- Matheus Korobinski de Sousa (Escola Municipal Senador Flávio Carvalho Guimarães)
- Natalia Dolgan (Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Schnirmann)
- Julia Oliveira Nascimento (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Luis Eduardo Faustin (Escola Municipal Prefeito Theodoro Batista Rosas)
- Nicolly Gabriele Assunção Barbosa (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Paulo Eduardo de Lara (Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Ruan Eneias Ferreira (Escola Municipal Professora Minervina França Scudlareck)

Menção Honrosa

- João Pedro Nery Zanetti Leal (Colégio Neo Master)
- Mariana Celano Menzes de Almeida (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Guilherme Cruz Skoretzky (Colégio Neo Master)
- João Vitor Fernandes da Silva (Colégio Marista Santa Mônica)
- Yasmin de Oliveira Ribeiro (Colégio Marista Pio XII)
- Artur Beira Marques (Escola Desafio)
- Geovana Benhuk dos Santos (Escola Municipal Prefeito Engenheiro Cyro Martins)
- Laura Nadal (Colégio Marista Pio XII)
- Leonardo Martins Nascimento (Escola Municipal Professora Haydêe Ferreira de Oliveira)
- Rafael Jovanaci da Silva (Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)
- Raissa Ferreira Machado (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Rhuan Bueno Zaniolo (Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Ricardo Vivaldi de Almeida (Colégio Marista Pio XII)
- Walter Vieira Neto (Colégio Sagrada Família)
- Ana Luiza Glowacki Zardo (Colégio Marista Pio XII)
- Bruno Ribeiro Graciano (Escola São Jorge de Ponta Grossa)
- Daniel dos Santos Pereira Rodrigues (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Diego Schanhuk (Escola Municipal Professora Maria Vitória Braga Ramos)
- Gabriel Pedrozo de Almeida (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Isabelli Caroline Lotoski (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Isadora da Luz (Escola Municipal Humberto Cordeiro)

- Laura Telo de Freitas Torres (Colégio Marista Pio XII)
- Marcela Nabozny Fagundes (Colégio Sagrada Família)
- Mauricio Pedroso Filho (Escola Municipal Catarina Miró)
- Natalia Ieker Catarossi (Colégio Sagrada Família)
- Sarah Vilas Boas Fontana (Colégio Marista Pio XII)
- Vitor Camargo dos Santos (Colégio Marista Santa Mônica)
- Adrian Juan Lara da Silva (Escola Municipal Professora Dércia do Carmo Noviski)
- Antonio Rocha Devicchi (Colégio Marista Pio XII)
- Diogo Mailane Gonzalez (Escola Municipal Doutor José Pinto Rosas)
- Eduarda Staichak (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)
- Fernanda Silvestre Moreira (Colégio Sagrada Família)
- Hadassa Vitoria Moraes de Almeida (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Hayne Eduarda Correia (Escola Municipal Professor Kamal Tebcherani)
- Henrique Cesar de Souza (Escola Municipal Frederico Constante Degraf)
- Jane Cristine de Moraes (Escola Municipal Professor Eloy Avrechack)
- João Vitor Mendes de Menezes (Escola Municipal Professor Kamal Tebcherani)
- Luiz Eduardo do Nascimento (Escola Municipal Professora Armida Frare Gracia)
- Maria Eduarda Souza Batista (Escola Municipal Professora Maria Laura Pereira)
- Mellany Webber (Escola Municipal São Jorge)
- Rafael Trentin Weigert (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Sofia Dariola Peres (Colégio Neo Master)

- Vitoria Hauagge (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Bryan Lemes Ferreira (Escola Municipal Doutor José Pinto Rosas)
- Camily Vitoria de Franca Maichak (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Felipe Marochi Schmidt (Escola Municipal Catarina Miró)
- Hewerson Scheifer (Escola Municipal Professora Haydêe Ferreira de Oliveira)
- Igor Vinicios Lemes (Escola Municipal Professora Dércia do Carmo Noviski)
- João Mateus Borges (Escola Municipal Doutor Edgar Sponholz)
- João Vitor Pereira Kramek (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Juliana Aparecida Cararo (Escola Municipal Deputado Djalma de Almeida Cesar)
- Kawan Cordeiro Gonsalves (Escola Municipal Professor Sebastião dos Santos e Silva)
- Marcela Beatriz Bueno (Escola Municipal Professora Idália Góes)
- Maria Eduarda Nunes Cabral (Escola Municipal Prefeito Doutor Amadeu Puppi)
- Maria Vitoria de Camargo Dubiel (Escola Municipal Doutor José Pinto Rosas)
- Samuel Henrique da Rosa Correia (Escola Municipal Professora Judith Macedo Silveira)
- Silvionei Ponciano da Rocha (Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Schnirmann)
- Alex Kauan Chila (Escola Municipal Professora Shirley Aggi Moura)
- Ana Lia Silva (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Anthony Guilherme Prioto Valerio (Escola Municipal Senador Flávio Carvalho Guimarães)
- Calebe Alves (Escola Municipal Prefeito Doutor Fulton Vitel Borges de Macedo)

- Emily Thauani dos Santos (Escola Municipal Professora Ruth Holzmann)
- João Gustavo Ribeiro Braga (Escola Municipal Professora Maria Eulina Santos Scheena)
- Kamila Nunes (Escola Municipal Professora Zahira Catta Preta Mello)
- Luan Matheus Emiliano Moraes (Escola Municipal Professora Loise Foltran de Lara)
- Maria Eduarda Aparecida Ribeiro (Escola Municipal Prefeito Doutor Elyseu de Campos Mello)
- Maria Eduarda Kaspchak (Escola Municipal Prefeito Engenheiro Eurico Batista Rosas)
- Muriele Sampaio Schmidt (Escola Municipal Doutor Raul Pinheiro Machado)
- Renata Ferreira Fogaca (Escola Municipal Professor Ivon Zardo)
- Victor Hugo Almeida de Camargo (Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira)

Nível 1

Troféu

- Renato Mandalozzo Tebcherani (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Antonio Henrique Vicente (Escola Estadual Medalha Milagrosa)

Ouro

- Renato Mandalozzo Tebcherani (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Renata Nadal Baier (Colégio Marista Pio XII)
- Vitor Brandelero (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Augusto Philippus Lack (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Vitor Rafael Linhares de Macedo (Colégio Pontagrossense Sepam)

Prata

- Isabela Alberti Fischer (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Roger Arima Dechandt (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Vinícius Scremin (Colégio Marista Pio XII)
- Pablo Dias Schechtel (Colégio Sagrada Família)
- Rita Flora Silva Bellicanta (Colégio Sagrada Família)
- Antônio Henrique Vicente (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Matheus de Freitas Zanellato (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Luiz Henrique Bahls (Colégio Integração)
- Herick Gabriel dos Santos (Colégio Estadual Ana Divanir Boratto)
- Isabella Aparecida de Matos (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)

Bronze

- Mariana Cosseti Correia (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Adriana Pereira de Souza e Silva (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Gabriel França Ferreira (Colégio Marista Pio XII)
- Gustavo Henrique Teixeira Wiechaz (Colégio Integração)
- Letícia Schebelski (Colégio Neo Master)
- Luiz Felipe Krzesinski Jaretz (Escola Bom Pastor)
- Pedro Ramos Pereira (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Sofia Nascimeno Czelusniak (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Alanys Piontek da Luz (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Arthur Junichiro Gaspar Sato (Colégio Sant’Ana)

- Bernardo Estevam Krzyuy (Colégio Sagrada Família)
- Danilo Gonçalves dos Santos (Colégio Integração)
- Giovana Kuan (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Maria Vitoria Castro de Araújo (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Brendha Maria de Oliveira dos Santos (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- Allan Roberto Lugo (Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell Du Vernay)
- André Luiz Rodrigues (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Erik Eduardo Tsalikis (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Amanda Rodrigues (Colégio Sant'Ana)
- Ariadne Dechandt Damasio (Colégio São Francisco)
- Gabriele Seidl (Colégio Neo Master)
- Geovanna Ferraz Costa Siqueira (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Gybson Gian Ferreira Batista (Escola Bom Pastor)
- Isabelly de Oliveira (Colégio Estadual Sirley Jagas)
- Massimos Delgobo Alvarez (Colégio Marista Pio XII)
- Alex Bidas (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Alison dos Santos (Colégio Marista Santa Mônica)
- Ana Flávia Lacerda (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Beatriz Vieira Harmatiuk (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- Eduardo Kossar Van Thienen da Silva (Colégio Estadual Professor Becker e Silva)
- Geovane Muller (Colégio Estadual Sirley Jagas)

- Hemily Kanclarovicz Lopes (Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Andrey Eduardo Molinoscky (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Pedro Henrique Camargo dos Santos (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Jordana Tinin (Colégio Estadual Professor Eugênio Malanski)

Menção Honrosa

- Gabriela Brasil Silva (Colégio Marista Pio XII)
- Gustavo Burgath (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Ian Amatnecks Mainginski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Mariana Zagotto Pereira (Colégio Marista Pio XII)
- Sofia Silveira Debtil (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Bruna Schmidt Leal (Colégio Neo Master)
- Luiz Eduardo Ferreira Ribas (Colégio Sant'Ana)
- Matheus Alves Galvão (Colégio Sagrada Família)
- Thiago Konafal da Silva (Colégio Sagrada Família)
- Ana Julia Pereira de Souza e Silva (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Anna Luisa Thiem (Colégio Marista Pio XII)
- Leonardo Hisao Herai Borges (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Melanie Wisniewski Bevervanso (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Murilo Silveira Debtil (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Pedro Moreno de Castro Francisquini (Escola Desafio)
- Sofia Silva de Freitas (Colégio Marista Santa Mônica)
- Alana Camile Gualdezi (Escola Estadual Jesus Divino Operário)

- Fillipe Czajka Prestes Braz (Colégio Estadual 31 de Março)
- Maria Luiza da Silva (Colégio Marista Santa Mônica)
- Nicoly Cristina Amaral (Colégio Estadual 31 de Março)
- Pedro Toledo Gomes (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Rubens Antonio Amaro Neto (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Welinton Murilo Camargo (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Anthony Panaggio (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Arthur Cordeiro Dias de Souza (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Felipe Antonio Wengzynski Urbano (Colégio Marista Pio XII)
- Gabriel Henrique Orchanheski (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Leonardo Michalak Savi (Colégio Integração)
- Nicolas de Paula Santos (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Osvaldo de Souza Prystupa (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Heloisa Stadler Ribas (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Jucimar Mateus Matoso de Oliveira (Colégio Estadual Ana Divanir Boratto)
- Yves Figueiredo Artmam (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Emili Viana dos Santos (Colégio Estadual 31 de Março)
- Gabrieli dos Santos Rodrigues (Colégio Estadual Ana Divanir Boratto)
- Gustavo Rodrigues de Moura (Colégio Estadual Professor José Gomes do Amaral)
- João Elias Annes de Assis (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Luciano Turski Bida (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Nathalia Slivinski Hoffmann (Colégio Neo Master)

- Otávio Silveira (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- Rian Gustavo Ribeiro Partica dos Santos (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Davi Willian Souza de Lima (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Eloisa dos Santos (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Gabriel Sobczak (Colégio Marista Santa Mônica)
- Mateus Oliveira Polizeli (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Nathalia Bueno Luz (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Nilson Gonçalves Machado Junior (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Pedro Henrique Guimarães da Silva (Colégio Integração)
- Tamires de Fátima Soares (Escola Estadual Monteiro Lobato)

Nível 2

Troféu

- Cassiano José Kounaris Fuziki (Colégio Marista Pio XII)
- Leonardo Ferreira (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)

Ouro

- Cassiano José Kounaris Fuziki (Colégio Marista Pio XII)
- Danilo Beltrame (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lucas Perondi Kist (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Davi Moreira dos Santos Junior (Colégio São Francisco)
- Gabriel Dalzoto Salles (Colégio Sagrada Família)

Prata

- João Vitor Pisnisk Barbosa (Colégio Neo Master)
- Leonardo Ferreira (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Elaine Cristina Margraf Martins (Colégio Sant'Ana)
- Leonardo Viatrowski (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Gabriel de Oliveira (Colégio Neo Master)
- Moreno Yves Martins dos Santos (Colégio São Francisco)
- Lívia Maria Mayer (Colégio Integração)
- Ana Paula Gomes (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Jhon Victor Messias Rosa (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Maria Luiza Lippel (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Rafael Adriano Ferreira Elesbão (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Rafael Antonio Chinelatto (Colégio Marista Pio XII)
- Rhuan Kleber Gonçalves (Colégio Integração)

Bronze

- Allan Nabozny (Colégio Neo Master)
- Lana Evelyn Barboza (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Aléxia Liz Narok Stevan (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Daniela Turek (Colégio Marista Santa Mônica)
- Heric Bruno Fontana (Colégio Marista Pio XII)
- Dellesie Amanda Semczik (Colégio Marista Pio XII)
- Gabriel Leme Campos (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Heric Henrique Pereira Klazura (Escola Estadual Medalha Milagrosa)

- Leonardo Henrique Nascimento Martins (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Amanda Franczak da Silva (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- João Vitor Urban da Costa (Escola Bom Pastor)
- Cesar Jeremias dos Santos Junior (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Henrique Thiago da Silva (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Bárbara de Rezende Attab (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Bárbara Zappe Rupel (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Adriele de Jesus dos Santos (Colégio Estadual Professor Eugênio Malanski)
- Isabella Maria Emiliano Moraes (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Loren Victoria Klaus (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Manuela Vieira da Rocha (Colégio Integração)
- Hemilly da Rocha Wenglarek (Escola Bom Pastor)
- Kalyane Alinne Gasparetto (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Lucas Eduardo Delfrate (Colégio São Francisco)
- Gabriel dos Santos (Colégio Integração)
- Hillary Kanclarovicz Lopes (Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Luis Gustavo Schnaider da Silva (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Maria Fernanda Oyama (Colégio Integração)
- Matheus Filip de Oliveira (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Mônica Gonçalves Cordeiro (Colégio Estadual Senador Correia)
- Natália Sanches (Colégio Sagrada Família)
- Pedro Nunes de Lara Neto (Colégio Sagrada Família)
- Vanessa Caroline Belo (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Varnava Sanarov Rusakoff (Escola Estadual Francisco Pires Machado)

Menção Honrosa

- Alessandra de Oliveira Pacheco (Colégio Neo Master)
- Alessandra Fredo (Colégio Marista Santa Mônica)
- Andre Luis de Matos Santos (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Eduarda Banach Nunes (Escola Desafio)
- Fernanda Beatriz Marques (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Gabriel Augusto do Nascimento (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Guilherme Augusto Woyciechovski Rodrigues (Colégio Estadual Senador Correia)
- Isabele Lopatko Correia (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- Josiane Fabieli Borcz (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Luiza Carvalho Pauzer (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Maria Izabel Scudlarek do Nascimento (Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell Du Vernay)
- Murillo Almeida Busnello (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Ramon Henrique Pituya Degraf (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Raphael Shimoyama (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Thamires do Nascimento Costa (Colégio Estadual Professor Eugênio Malanski)
- Alana Letícia Coelho (Colégio Integração)
- Alana Tramontin (Colégio Sant'Ana)
- Ana Carolina Martins Senes (Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell Du Vernay)
- Ana Julia Baleeiro de Paiva (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)

- Anna Carolina da Silva (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Augusto Luis Mayer (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Cristian Gabriel de Jesus dos Santos (Colégio Estadual Professor Eugênio Malanski)
- Davi Absalão Biscaia (Colégio Sagrada Família)
- Emanuele Mendes Bricailo (Colégio Sant'Ana)
- Fernando César de Oliveira Junior (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Giovanna Rafaela Leoncio Torres Pereira (Colégio Estadual Professor José Gomes do Amaral)
- João Victor Waldeck de Oliveira (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Julia Eyherabid Araujo Silva (Escola Bom Pastor)
- Julia Portela Lorencet (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Laura Dhiely dos Santos Przepiura (Colégio Sagrada Família)
- Leonardo Alexandre Leal do Valle (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Leonardo Kauã de Lara (Colégio Estadual 31 de Março)
- Letícia Andreata (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Lourenço Ferezin Trelinski (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Luan Rodrigo Jensen (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Luana Caroline Iltchechen Rocha (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Lucas Matsuo Antunes (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Luis Guilherme Fioravante (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Luiz Daniel Fabricio (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Marcelo Ricardo Junior (Escola Estadual Jesus Divino Operário)

- Maria Eduarda Noumam (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Maria Luíza Pinto Rios (Colégio Sant'Ana)
- Mateus Gonçalves dos Santos (Colégio Estadual Professor Eugênio Malanski)
- Mateus Stadler (Colégio Estadual Professor Eugênio Malanski)
- Natalia Kalugin (Escola Estadual Francisco Pires Machado)
- Oziel dos Santos Martins (Colégio Estadual 31 de Março)
- Sabrina Alves de Lara (Colégio Estadual Ana Divanir Boratto)
- Sabrina Machado (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Sandro Gutierrez Alves (Colégio Estadual Professor José Gomes do Amaral)
- Thiago Portella (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Wesli Gonçalves da Rosa (Colégio Marista Santa Mônica)

Nível 3

Troféu

- Vitória Scheffel Dias (Colégio Sant'Ana)
- Elizane Verônica Pereira dos Santos (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)

Ouro

- Vitória Scheffel Dias (Colégio Sant'Ana)
- Larissa Almeida Busnello (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Elizane Veronica Pereira dos Santos (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Gabriel Vilas Bôas (Colégio Neo Master)
- Gustavo Marenda de Lima (Colégio SESI - Ponta Grossa)

Prata

- Ana Carolina Dorado Gaertner (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Nathan Nabozny (Colégio Neo Master)
- Daniel Silveira Salamucha (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Isis Fernandes do Carmo (Colégio Sant'Ana)
- Rafaela Penteado Gomes (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Emilin Regina Gomes Dobrovolski (Colégio Neo Master)
- Júlia Matoso Martins (Colégio Sagrada Família)
- Guilherme José de Lima Manique Barreto (Colégio SESI - Ponta Grossa)
- Jeniffer Lauber (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Guilherme Betenheuser Barbosa (Colégio Sagrada Família)

Bronze

- Gustavo Fonseca Coppla (Colégio Marista Pio XII)
- Camilla Gelinski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lucas dos Santos Pereira Mariano (Colégio Marista Santa Mônica)
- Mathias Gabriel Alves da Silva (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Pedro Victor Pereira (Colégio Integração)
- Robson da Silveira (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Eduarda Grobe Alberti (Colégio Sagrada Família)
- Vitor Hugo Moro Pironatto (Colégio São Francisco)
- Ana Cláudia Goulart (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Pedro Eduardo Redivo (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)

- Rafael Strack (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Amanda Priscilla Soistak (Colégio Sagrada Família)
- Dayane Bravos de Oliveira (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)

Nível 4

Troféu

- Elias Estevão Pereira dos Santos (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Francielle Nocera Wiechineski (Colégio Pontagrossense Sepam)

Ouro

- Elias Estevão Pereira dos Santos (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)

Prata

- Francielle Nocera Wiechineski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Carlos Andrei Nahm Gross (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Isabelly Pedroso Hilgemberg (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- João Pedro Herche Cavasotti (Colégio Pontagrossense Sepam)

Bronze

- Aline Pissaia (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Daniel José Schulmeister (Instituto Estadual de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Marcelo Henrique Lopes da Silva (Colégio SESI - Ponta Grossa)
- Giovani Colodel (Colégio Estadual 31 de Março)
- Isabella Hofman (Colégio SESI - Ponta Grossa)
- Leonardo Prestes (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Lucas Machado Ferreira (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)

Professores Premiados

Abaixo consta a relação de todos os professores que receberam troféus nos respectivos níveis:

Nível Júnior - Troféu:

- Professora Francine Mayara Gomes (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Professora Célia Lima Emiliano (Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)

Nível 1 - Troféu:

- Professora Jeanine Alves de Oliveira (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Professora Fernanda Fetzer (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Professora Sheila Regina Bagatelli Bozz (Colégio Pontagrossense Sepam)

Nível 2 - Troféu:

- Professora Geane Dias de Moura Jorge (Colégio Marista Pio XII)
- Professor Rodrigo França Pleis (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)

Nível 3 - Troféu:

- Professor Daniel Carlos Beusso (Colégio Sant'Ana)
- Professora Silmari Oliveira Gomes (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)

Nível 4 - Troféu:

- Professor Marcos Sant'anna Modrow (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Professor Luciano Gomes Ferreira (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Professor Rubens Edgard Fustemberg Filho (Colégio Pontagrossense Sepam)

A seguir consta a relação de todos os professores que tiveram alunos participantes da 4ª OPMat no ano de 2016:

- Carla Cristiane Dal'Col de Oliveira (Colégio Estadual Professor Eugenio Malanski)
- Marilda Volerte Cano Cordeiro (Colégio Estadual Professor Eugenio Malanski)
- Angela Maria da Silva Guarnieri (Escola Municipal Professor Ivon Zardo)
- Silmari Oliveira Gomes (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Marcos Sant'anna Modrow (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Ingrid da Silva Milléo (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Alzenir Virgínia Ferreira Soistak (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Alisson Lima Emiliano (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Vanize Aparecida Noimann (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Arlene Cristiane Martins de Lima (Colégio Estadual 31 de Março)
- Roseli Niedjevski Dambrovisk (Colégio Estadual 31 de Março)
- Marisol do Rocio Vieira da Rosa (Colégio Estadual 31 de Março)
- Valéria Buwai Smaha (Colégio Estadual 31 de Março)
- Sandra Antunes (Colégio Estadual 31 de Março)
- Maurício Gurgel Kuchininski (Colégio Estadual 31 de Março)
- Andressa Niele Garcia (Colégio Estadual Ana Divanir Boratto)
- Ana Paula Zachordenski (Colégio Estadual Ana Divanir Boratto)
- Maurício Fernandes (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Carlos Adolfo Weckerlin (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)

- Sheila Sayuri Yono Ohi (Colégio Estadual Francisco Pires Machado)
- Luciano Roque Leite (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Iolanda Gebeluka Mauda (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Amélia Eponina da Luiz Ruivo (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Dalvane Ferreira Martins (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Rafaela Souza (Colégio Estadual José Gomes do Amaral)
- Marilia Andrade Marcondes (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Emilene Conceição Marins Silva Bochnek (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Libia Andréia Silva (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Roseli Niedjevski Dambrovisk (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Willians Fernandes (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)
- Lilian Tereza Christina Voltolini (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)
- Rodrigo França Pleis (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)
- Mayrha Caobianco (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)
- Simone Dayane Pisnisk (Colégio Estadual Nossa Senhora Das Graças)
- Neli Garcia Catossi (Colégio Estadual Professor Becker e Silva)
- Irene Terezinha Burkot (Colégio Estadual Professor João Von Borell Du Vernay)
- Patricia Lima Andrade (Colégio Estadual Professor João Von Borell Du Vernay)
- Marli Ribeiro Maia Slompo (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Daniele Regina Penteado (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Glaci Bettes (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)

- Eliane Hartmann dos Santos (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Antonio Henrique Feld (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Cenira Kravutschke Schulab (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Augusto Rangel Selski (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Luciana Blum Rauch (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Maristel do Nascimento (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Andriely Desselmann (Colégio Estadual Senador Correia)
- Luciane dos Reis (Colégio Estadual Sirley Jagas)
- Liliane Camargo Soares (Colégio Estadual Sirley Jagas)
- Juliana de Fátima Holm Brim (Colégio Integração)
- Camila Nunes (Colégio Integração)
- Bianca Aparecida Holm de Oliveira (Colégio Integração)
- Lucas Gicorski (Colégio Integração)
- Lucia Yukie Shimasaki (Colégio Marista Pio XII)
- Geane Dias de Moura Jorge (Colégio Marista Pio XII)
- Jeferson Müller (Colégio Marista Pio XII)
- Ana Cristina Delinski Stiirmer (Colégio Marista Pio XII)
- Roseli Alexandre Martins (Colégio Marista Pio XII)
- Patricia Maria Zaremba de Oliveira (Colégio Marista Pio XII)
- Karina Martins (Colégio Marista Santa Mônica)
- Marselha Aparecida Wiecheteck (Colégio Marista Santa Mônica)

- Rafael Bruno Ligeski (Colégio Marista Santa Mônica)
- Nicholas Raphael de Almeida Beruski (Colégio Neo Master)
- Simone Daiane Pisnisk (Colégio Neo Master)
- Fabrício Gonçalves dos Santos (Colégio Neo Master)
- Francine Auer Santos (Colégio Neo Master)
- Sheila Regina Bagatelli Bozz (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Maurício Gurgel Kuchininski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Fernanda Fetzer (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Luciana Gomes (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Fernanda Gomes (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Sheila Bueno (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Daniela Fabricio (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Francine Mayara Gomes (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gisele do Rocio Soares Pacheco (Colégio Sagrada Família)
- Elyzandra Maia Cano Perreto (Colégio Sagrada Família)
- Rita Nerli Antoneli Carvalho (Colégio Sagrada Família)
- Suzane Machado Daer Costa (Colégio Sagrada Família)
- Rosilda Aparecida Chociai Scremin (Colégio Sagrada Família)
- Herica Cristina Alves Galante Messias (Colégio Sagrada Família)
- Marina Marra (Colégio Sagrada Família)
- Bruna Elizabeth Adamowicz (Colégio Sagrada Família)
- Maria Regina Urban (Colégio Sagrada Família)
- Roberto Mauro Ramos Mainardes (Colégio Sagrado Coração de Jesus)

- Willian Thomas Rocha (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Vera do Rocio Vanat Prestes (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Claudia Danielle de França Otoni (Colégio Sant'Ana)
- Paulo Fernando Zaratini de Oliveira e Silva (Colégio Sant'Ana)
- Daniel Carlos Beusso (Colégio Sant'Ana)
- Gilvan Aparecido Tratch (Colégio Sant'Ana)
- Tiago Vieira (Colégio São Francisco)
- Izabelle Cristiane Matkovski (Colégio SESI-Ponta Grossa)
- Bianca Aparecida Holm de Oliveira (Escola Bom Pastor)
- Paulo Henrique Carvalho (Escola Desafio)
- Michelle Hilbert Dipp de Oliveira (Escola Desafio)
- Sheila Regina Bagatelli Bozz (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Valquiria Glinski (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Regiane Aparecida Auer (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Débora de Lima Moscardi dos Santos (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Amélia Aparecida Moro (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Adnilson Ribeiro Montuani (Escola Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Jeanine Alves de Oliveira (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Elisabete Feld (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Tiago Vieira (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Josiane Deschk (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Helen Mara Silverio (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Simone de Fátima Soltes (Escola Estadual Medalha Milagrosa)

- Rosni Troyner (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Líbia Andréia Cosati (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Luciano de Oliveira (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Edna Aparecida Fagundes Consul (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Maria Lenira Silveira (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Maria Joaquina do Pilar Domingues (Escola Municipal Catarina Miró)
- Sandra Mara Schechtel (Escola Municipal Catarina Miró)
- Angela Cristine Rocha (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- Helena Ragailo Cunhanski (Escola Municipal Deputado Djalma de Almeida Cesar)
- Andréia de Jesus da Silva (Escola Municipal Doutor Edgar Sponholz)
- Silviane Baninski Martins (Escola Municipal Doutor José Pinto Rosas)
- Patrícia de Fátima Czaika Carvalho (Escola Municipal Doutor Raul Pinheiro Machado)
- Luciana Bernadete Maior Chavez (Escola Municipal Doutor Leopoldo Pinto Rosas)
- Cassiana Guimarães Ferreria (Escola Municipal Fioravante Slaviero)
- Patricia Goes (Escola Municipal Frederico Constante Degraf)
- Joseli Ribeiro da Costa (Escola Municipal General Aldo Bonde)
- Denise do Rocio Mezzadri Lopes (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Mary Almerinda Cordova de Oliveira (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Silvia Cunha (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Thaissa Paraguaçu Branco (Escola Municipal Prefeito Doutor Elyseu de Campo Mello)

- Sandra Ribeiro (Escola Municipal Prefeito Doutor Amadeu Puppi)
- Estela Maria de Oliveira (Escola Municipal Prefeito Doutor Fulton Vitel Borges de Macedo)
- Maria Gisele Goba Coutinho (Escola Municipal Prefeito Engenheiro Cyro Martins)
- Gilmara Matoso (Escola Municipal Prefeito Engenheiro Eurico Batista Rosas)
- Célia Lima Emiliano (Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)
- Jucionar Cristina Ribeiro (Escola Municipal Prefeito Theodoro Batista Rosas)
- Marcia Glap (Escola Municipal Professor Eloy Avrechack)
- Ariadne Antunes da Silva (Escola Municipal Professor Nelson Pereira Jorge)
- Elisangela de Fátima Celis (Escola Municipal Professor Sebastião dos Santos e Silva)
- Patricia Maria Zaremba de Oliveira (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)
- Maristela Batista Carvalho Barboza (Escola Municipal Professora Armida Frare Gracia)
- Rosimere Aparecida Eidan Teixeira (Escola Municipal Professora Ecléa dos Passos Horn)
- Daniele Aparecida Mendes dos Santos (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Sérgio Rodrigo Batista (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Adriana Priscila dos Santos (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Carla Cristine Just Guarnieri (Escola Municipal Professora Judith Macedo Silveira)
- Joselma Aparecida Machado (Escola Municipal Professora Loise Foltran de Lara)

- Ana Claudia Chaves (Escola Municipal Professora Ruth Holzmann Ribas)
- Aline Tizon Brizola (Escola Municipal Professora Shirley Aggi Moura)
- Elizandra Aparecida Bartko de Moraes (Escola Municipal Professor Kamal Tebcherani)
- Arlete Terezinha Voski Stachuk (Escola Municipal Professor Kamal Tebcherani)
- Silmara Pasa (Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel)
- Vera Lúcia da Silva (Escola Municipal Professor Plácido Cardon)
- Maria Rosangela Lazarotto (Escola Municipal Professora Dércia do Carmo Noviski)
- Sonia Maria Pistune Bonamente (Escola Municipal Professora Haydêe Ferreira de Oliveira)
- Karin Souza (Escola Municipal Professora Idália Góes)
- Rosangela Maria de Freitas Vitorino (Escola Municipal Professora Maria Antonia de Andrade)
- Mariane Elisa Wernert (Escola Municipal Professora Maria Coutin Riesemberg)
- Tatiana Marques (Escola Municipal Professora Maria Coutin Riesemberg)
- Dercia Maria Ferreira (Escola Municipal Professora Maria Eulina Santos Scheena)
- Cleide de Oliveira (Escola Municipal Professora Maria Vitória Braga Ramos)
- Sionara Carla Pitella Viana (Escola Municipal Professora Minervina França Scudlareck)
- Dione Wociechowski Lopes (Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Denise Busnello Katerenhuk (Escola Municipal Professora Zahira Catta Preta Mello)
- Marilia Iuskow (Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Schnirmann)

- Mariane Oberg (Escola Municipal São Jorge)
- Maristela Martins (Escola Municipal São Jorge)
- Regiane Terezinha Demétrio (Escola Municipal Senador Flávio Carvalho Guimarães)
- Tania Mara Jansen (Escola Municipal Vereador Adelino Machado de Oliveira)
- Graziella Ferreira de Souza (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Sonia Gonçalves (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Maria Elisabete Mann (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Suely Terezinha de Andrade e Silva (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Andréia Siqueira Hass (Escola Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha - CAIC)
- Karina Martins Barbosa (Escola São Jorge de Ponta Grossa)
- Marcelo Jose Ricci Jacob (Instituto Estadual de Educação Professor César Pietro Martinez)

Escolas Participantes

Abaixo consta a relação de todas as escolas participantes da 4^a OPMat no ano de 2016:

Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa
Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas
Colégio Elite Tales de Mileto
Colégio Estadual 31 de Março
Colégio Estadual Ana Divanir Boratto
Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas
Colégio Estadual Francisco Pires Machado
Colégio Estadual General Antonio Sampaio
Colégio Estadual José Elias da Rocha
Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória
Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças
Colégio Estadual Professor Becker e Silva
Colégio Estadual Professor Eugênio Malanski
Colégio Estadual Professor João Von Borell Du Vernay
Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico
Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá
Colégio Estadual Regente Feijó
Colégio Estadual Senador Correia
Colégio Estadual Sirley Jagas
Colégio Integração
Colégio Marista Pio XII
Colégio Marista Santa Mônica
Colégio Neo Master
Colégio Pontagrossense Sepam
Colégio Sagrada Família
Colégio Sagrado Coração de Jesus
Colégio Sant'Ana
Colégio São Francisco
Colégio SESI - Ponta Grossa
Escola Bom Pastor
Escola Desafio
Escola Estadual Espírito Santo
Escola Estadual Jesus Divino Operário

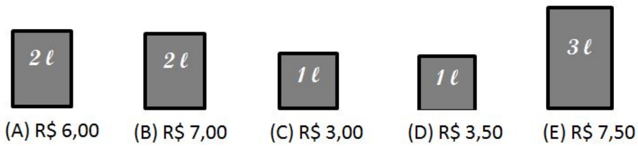
Escola Estadual Maestro Bento Mossurunga
Escola Estadual Medalha Milagrosa
Escola Estadual Monteiro Lobato
Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato
Escola Municipal Catarina Miró
Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci
Escola Municipal Deputado Djalma de Almeida Cesar
Escola Municipal Doutor Edgar Sponholz
Escola Municipal Doutor José Pinto Rosas
Escola Municipal Doutor Raul Pinheiro Machado
Escola Municipal Doutor Leopoldo Pinto Rosas
Escola Municipal Fioravante Slaviero
Escola Municipal Frederico Constante Degraf
Escola Municipal General Aldo Bonde
Escola Municipal Humberto Cordeiro
Escola Municipal João Maria Cruz
Escola Municipal Ludovico Antonio Egg
Escola Municipal Prefeito Doutor Amadeu Puppi
Escola Municipal Prefeito Doutor Elyseu de Campo Mello
Escola Municipal Prefeito Doutor Fulton Vitel Borges de Macedo
Escola Municipal Prefeito Engenheiro Cyro Martins
Escola Municipal Prefeito Engenheiro Eurico Batista Rosas
Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela
Escola Municipal Prefeito Theodoro Batista Rosas
Escola Municipal Professor Eloy Avrechack
Escola Municipal Professor Ivon Zardo
Escola Municipal Professor Kamal Tebcherani
Escola Municipal Professor Nelson Pereira Jorge
Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel
Escola Municipal Professor Plácido Cardon
Escola Municipal Professor Sebastião dos Santos e Silva
Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma
Escola Municipal Professora Armida Frare Gracia
Escola Municipal Professora Dércia do Carmo Noviski
Escola Municipal Professora Ecléa dos Passos Horn
Escola Municipal Professora Guitil Federmann
Escola Municipal Professora Haydêe Ferreira de Oliveira

Escola Municipal Professora Idália Góes
Escola Municipal Professora Judith Macedo Silveira
Escola Municipal Professora Loise Foltran de Lara
Escola Municipal Professora Maria Antônia de Andrade
Escola Municipal Professora Maria Coutin Riesemberg
Escola Municipal Professora Maria Elvira Justus Schimidt
Escola Municipal Professora Maria Vitória Braga Ramos
Escola Municipal Professora Minervina França Scudlareck
Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira
Escola Municipal Professora Ruth Holzmann
Escola Municipal Professora Shirley Aggi Moura
Escola Municipal Professora Zahira Catta Preta Mello
Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Schnirmann
Escola Municipal São Jorge
Escola Municipal Senador Flávio Carvalho Guimarães
Escola Municipal Vereador Adelino Machado de Oliveira
Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins
Escola Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha - CAIC
Escola São Jorge de Ponta Grossa
Instituto Estadual de Educação Professor César Pietro Martinez

4ª OPMat - Nível Júnior

Questões Objetivas

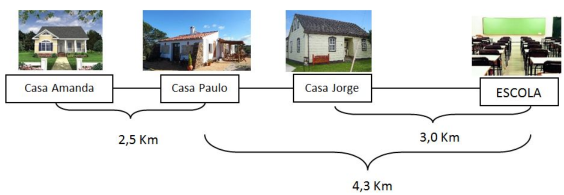
Problema 1. A senhora Helena foi ao supermercado comprar suco de laranja para seu filho. Havia cinco tipos de caixas com preços diferentes, conforme as figuras abaixo:



Ela optou por comprar a caixa que tinha o menor preço em reais por litro. Qual das caixas ela comprou?

a) caixa A b) caixa B c) caixa C d) caixa D e) caixa E

Problema 2. Para completar sua lotação, uma van escolar precisa passar na casa de mais três crianças antes de chegar à escola. O motorista saiu da casa da Amanda e foi direto para casa do Jorge, mas ao chegar percebeu que havia esquecido uma criança e retornou para a casa do Paulo. Saindo da casa do Paulo seguiu para a escola, agora com a lotação completa.



Considerando as distâncias indicadas acima, quantos quilômetros o motorista percorreu da casa da Amanda até chegar à escola?

a) $5,5$ km b) $6,8$ km c) $7,3$ km d) $9,4$ km e) $9,8$ km

Problema 3. No dia da Bandeira, 19 de novembro, foi realizado um trabalho em sala de aula sobre este símbolo que representa o Brasil. Maria desenhou num papel uma bandeira com 20 cm de comprimento e 14 cm de largura. Sua professora desenhou num tecido uma bandeira com as medidas do comprimento e da largura três vezes maior que a bandeira de Maria. Feito isso, o perímetro da bandeira que a professora desenhou foi de:

a) 402 cm b) 204 cm c) 162 cm d) 102 cm e) 69 cm

Problema 4. Carla é uma menina que quer ser estilista de moda. Aprendeu com sua mãe que o número de uma calça feminina no Brasil, no padrão antigo, pode ser obtido pela metade do comprimento do quadril subtraído de oito. Se a mãe de Carla tem 108 cm centímetros de quadril, qual será o número de calça que ela usa no padrão antigo?

a) 38 b) 40 c) 44 d) 46 e) 48

Problema 5. Sabendo que 20% da população de Ponta Grossa correspondem a aproximadamente 70.000 habitantes, quantos habitantes tem a cidade (aproximadamente)?

a) 140.000 habitantes

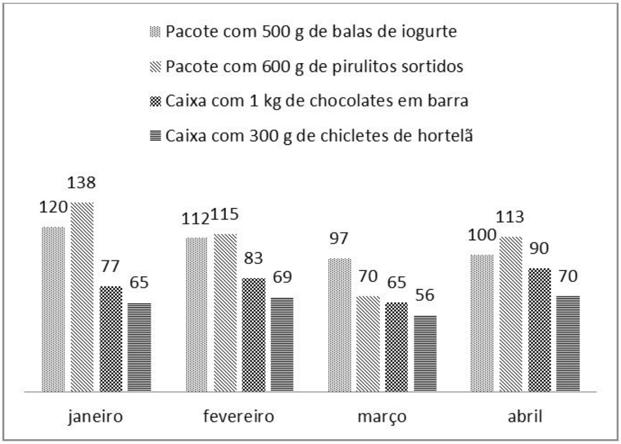
b) 210.000 habitantes

c) 280.000 habitantes

d) 350.000 habitantes

e) 380.000 habitantes

Problema 6. O gráfico abaixo apresenta informações sobre a venda de doces em uma loja, nos primeiros quatro meses do ano.



Analisando os dados do gráfico, é possível afirmar que:

a) Houve um aumento na venda total de doces no mês de fevereiro, em comparação com janeiro.

b) Em todos os meses a venda de pacotes de balas foi maior que a venda de outros tipos de doces.

c) No mês de março houve uma diminuição na venda de todos os tipos de doces.

d) O mês em que houve a menor venda de doces foi abril.

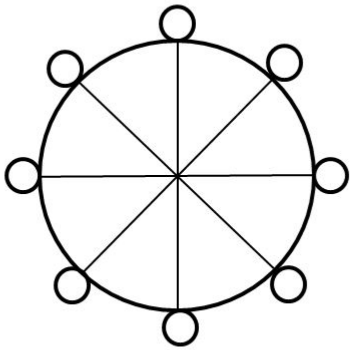
e) A maior venda total de doces ocorreu no mês de fevereiro.

Gabarito das Questões Objetivas

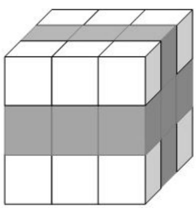
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
e	d	b	d	d	c

Questões Discursivas

Problema 1. Dados os números 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15, use-os todos para preencher os pequenos círculos nas extremidades de cada diâmetro do círculo grande, de modo que as somas dos dois números em cada extremidade de um mesmo diâmetro sejam sempre iguais.



Problema 2. Lucas montou um cubo com 27 cubinhos, alguns da cor branca e outros da cor cinza e apenas um da cor vermelha que ficou no centro do cubo, conforme a figura abaixo. O cubo tem duas faces opostas contendo uma cruz cinza e cada uma das demais faces têm uma faixa cinza. Em cada face desse cubo podemos contar 9 quadradinhos. Responda, explicando o teu raciocínio:



a) Quantos são os cubinhos da cor cinza?

b) Se Lucas montar outro cubo similar ao primeiro, de modo que em cada face possamos contar 25 quadradinhos, no mínimo quantos cubinhos da cor cinza ele terá que usar?

Problema 3. Gliese GJ667C é uma estrela que faz parte de um sistema triplo. Ela está a 22 anos-luz da Terra, isto é, a sua luz demora vinte e dois anos para chegar ao nosso planeta. Em órbita dessa estrela há um planeta chamado GJ667C-f. Nesse planeta é possível haver vida extraterrestre. Se existirem, os habitantes desse planeta veem três sóis no céu. Descoberto em 2013, o planeta GJ667C-f tem um ano que dura 39 dias terrestres. Ele tem uma massa cerca de 2,7 vezes a da Terra e um diâmetro cerca de 1,5 vezes o do nosso planeta. Sabendo que outubro tem 31 dias, novembro tem 30 dias e dezembro tem 31 dias, responda explicando o teu raciocínio:

a) Dois anos mais um terço de ano em GJ667C-f equivalem a quantos dias terrestres?

b) A data de hoje é 22/10/2016, após transcorrer um ano em GJ667C-f que data será na Terra?

c) Hoje é sábado, após transcorrer um ano e dois terços de ano em GJ667C-f que dia da semana será no nosso planeta?

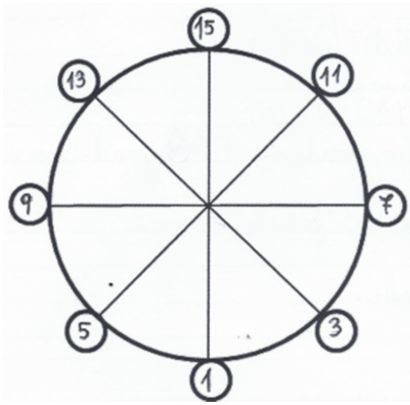
Problema 4. João disse à Carla:

- Pense num número.
- Pensei.
- Multiplique por 2.
- Multipliquei.
- Some 6.
- Somei.
- Divida tudo por 2.
- Dividi.
- Carla, subtraia o número que você pensou.
- Subtraí.
- O resultado é 3, Carla.
- Sim! Como você adivinhou João?

Explique para a Carla como o João adivinhou.

Gabarito das Questões Discursivas

Problema 1. *(Resolução de Helena Carneiro Madureira - Colégio Marista Pio XII)*



Eu somei o número 15 com o número 1 e verifiquei que deu 16, então somei 13 com 3, 11 com 5 e 9 com 7, todos deram 16, foi então que percebi que o resultado era 16.

Problema 2. *(Resolução de Christian Gutknecht Baba - Colégio Pontagrossense Sepam)*

a) 14 cubos são cinza, porque nas laterais 8 cubos são cinza e em cima 3 são cinzas e em baixo também.

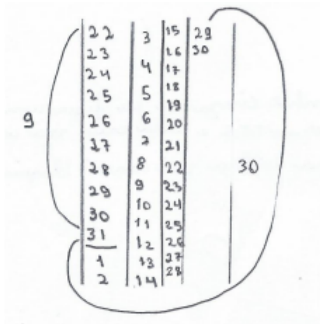
b) $5+5=10$; $3+3=6$; $4+4=8$; $3+3=6$; $10+6+8+6=30$

No mínimo ele vai precisar de 30 cubinhos cinza.

Problema 3. *(Resolução de Maria Eduarda Vosgerau Ferreira Ribas - Colégio Pontagrossense Sepam)*

a) Equivalem a 91 dias na Terra, porque se cada 1 ano em GJ667C-f equivale a 39 dias na Terra e queremos saber quantos dias na Terra equivalem a 2 anos e um terço em GJ667C-f, eu fiz: 2 anos $\Rightarrow 39 \times 2 = 78$ dias; um terço de ano $\Rightarrow \dfrac{39}{3} = 13$ dias em GJ667C-f; assim, $78 + 13 = 91$ dias.

b)



Será dia 30 de novembro de 2016.

c) *(Resolução da Pauta)*

Um ano e dois terços de ano no planeta correspondem a $39 + \frac{2}{3} \times 39 = 39 + 26 = 65$ dias.

Como os dias da semana se repetem, ciclicamente, a cada 7 dias, temos que determinar quantos 7 há em 65:

$$\begin{array}{r|l} 65 & \underline{\;7\;\;\;} \\ 2 & 9 \end{array}$$

A conta nos mostra que após transcorrer um ano e dois terços de ano no planeta, aqui na Terra terão ocorridos 9 sábados e mais dois dias, isto é: domingo e segunda-feira.

A resposta é Segunda-feira.

Problema 4. *(Resolução da Pauta)*

Carla, quando você multiplica o número pensado por 2 e soma 6 você obtém um resultado. Quando você divide esse resultado por 2, você está dividindo tanto o dobro do número pensado, quanto o 6 por 2, por isso o novo resultado tem que ser o número pensado mais 3. Ao subtrair o número pensado só vai restar o 3. O resultado das contas sempre dará 3.

4ª OPMat - Nível 1

Primeira Fase

Problema 1. Quantos divisores positivos não primos tem o número 2016?

a) 8 b) 13 c) 16 d) 33 e) 36

Problema 2. Joãozinho resolveu juntar moedas de R\$ $0,25$, R\$ $0,50$ e R\$ $1,00$ num cofrinho durante um ano inteiro. No final do ano, Joãozinho abriu o cofrinho e percebeu que havia 100 moedas totalizando R\$ $47,50$. Como precisava do maior número possível de moedas de R\$ $1,00$, Joãozinho foi ao mercado e trocou as moedas de R\$ $0,25$ e R\$ $0,50$ por moedas de R\$ $1,00$. Se com a troca ele conseguiu mais 27 moedas de R\$ $1,00$ e sobrou R\$ $0,50$, quantas moedas de R\$ $0,25$ ele tinha no cofrinho?

a) 20 b) 30 c) 40 d) 50 e) 60

Problema 3. O dia primeiro de janeiro de 2016 caiu numa sexta-feira, bom sinal dizem alguns, mas se caísse num domingo, teríamos uma sexta-feira 13 em janeiro, que segundo outros é mau presságio. Em qual dos anos a seguir teremos uma sexta-feira 13 em janeiro?

a) 2017 b) 2018 c) 2019 d) 2020 e) 2021

Problema 4. A soma do maior número natural par e múltiplo de 5, de três algarismos, com o menor número ímpar múltiplo de 7, de cinco algarismos, é:

a) 10.979 b) 10.984 c) 10.986 d) 10.991 e) 10.993

Problema 5. Considere todos os números naturais com as seguintes características: é um divisor de 2016, mas não é múltiplo de 7, é múltiplo de 6, mas não é múltiplo de 9. A soma de todos esses números é igual a:

a) 1024 b) 256 c) 243 d) 90 e) 36

Problema 6. Joãozinho pegou um número natural e dividiu por 3, e o resto deu 1. Pegou o quociente da divisão e dividiu por 3, e o resto deu 2. Se tivesse dividido o número por 9, o resto seria?

a) 0 b) 2 c) 3 d) 5 e) 7

Problema 7. Se N é o menor número natural par diferente de zero tal que a soma de seu dobro com sua terça parte é um número natural múltiplo de 9, então N é um número:

a) menor que 100

b) com primeiro algarismo igual a 7

c) com primeiro algarismo igual a 3

d) cujo triplo termina em 6

e) cujo quádruplo termina em 8

Problema 8. Quantos números naturais N de dois algarismos distintos, e que não terminam em zero, são tais que se M é o número natural de dois algarismos que se obtêm invertendo a ordem dos algarismos de N, então $N+M$ é divisível por 6?

a) 8 b) 9 c) 10 d) 12 e) 15

Problema 9. Maria tinha que somar dois números naturais de dois algarismos não nulos e distintos, cada um. Com pressa, resolveu usar a calculadora e acabou invertendo a ordem dos algarismos do primeiro número, mas digitou correto o segundo. Se o resultado, errado, apresentado pela calculadora foi 138, então a diferença entre o maior e o menor valor possível para a soma correta é:

a) 144 b) 108 c) 69 d) 66 e) 62

Problema 10. Qual o resultado da expressão $\dfrac{2^{-1}+2^{-2}}{2^{-3}+2^{-4}}$?

a) $\dfrac{1}{8}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) 2 e) 4

Problema 11. Se duas pizzas custam uma pizza e meia mais R\$ $15,00$, quanto custa uma pizza?

a) R\$ $10,00$ b) R\$ $15,00$ c) R\$ $30,00$ d) R\$ $35,00$ e) R\$ $45,00$

Problema 12. As páginas de um livro estão numeradas com números pares, a partir de 2; isto é: 2, 4, 6, 8, etc., a partir da primeira página. Se o livro contém 120 folhas, cada folha contendo duas páginas, qual a numeração da penúltima página?

a) 480 b) 478 c) 240 d) 238 e) 224

Problema 13. Se N é o maior número natural de três algarismos que é múltiplo de 11 e termina em 9, então a soma dos algarismos de N é igual a:

a) 12 b) 16 c) 18 d) 25 e) 27

Problema 14. João disse a Maria: Se eu tivesse o dobro da sua idade, juntos teríamos 90 anos. Qual seria a idade de João?

a) 20 b) 30 c) 45 d) 50 e) 60

Problema 15. Numa fila de espera de um banco existem alguns homens e algumas mulheres. Verifica-se que se entrarem mais duas mulheres na fila, o número total de homens fica igual ao número total de mulheres, mas se ao invés disso, entrarem mais três homens na fila, o número de homens ficará igual ao dobro do número de mulheres. Quantas pessoas têm na fila?

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

Problema 16. Se $ab25$ é um número natural de 4 algarismos, quadrado perfeito e múltiplo de 7, então $a+b$ é igual a:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

Problema 17. Quantos números naturais de três algarismos distintos cuja soma é igual a 5 existem?

a) 2 b) 4 c) 7 d) 8 e) 9

Problema 18. Quantos múltiplos de 3 ou 7 existem entre os números naturais 1 e 100?

a) 4 b) 7 c) 14 d) 47 e) 43

Problema 19. Se dois lados de um triângulo isósceles medem respectivamente 2 cm e 5 cm, então seu perímetro

a) é igual a 9 cm

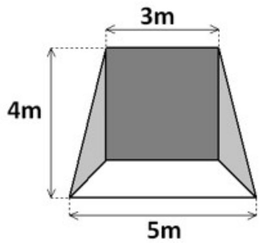
b) é igual a 10 cm

c) é igual a 12 cm

d) pode ser igual a 11 cm

e) pode ser igual a 13 cm

Problema 20. Um logotipo, num outdoor gigante, é composto de um quadrado cinza-escuro, dois triângulos congruentes cinza-claros e um trapézio branco, como ilustra a figura abaixo:



Qual é a área do trapézio branco?

a) $3\ m^2$ b) $4\ m^2$ c) $5\ m^2$ d) $6\ m^2$ e) $7\ m^2$

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
d	d	a	e	Anulada	e	a	c	a	e
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
c	b	d	e	b	a	d	e	c	b

Segunda Fase

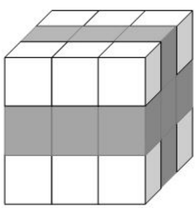
Problema 1. Gliese GJ667C é uma estrela que faz parte de um sistema triplo. Ela está a 22 anos-luz da Terra, isto é, a sua luz demora vinte e dois anos para chegar ao nosso planeta. Em órbita dessa estrela há um planeta chamado GJ667C-f. Nesse planeta é possível haver vida extraterrestre. Se existirem, os habitantes desse planeta veem três sóis no céu. Descoberto em 2013, o planeta GJ667C-f tem um ano que dura 39 dias terrestres. Ele tem uma massa cerca de 2,7 vezes a da Terra e um diâmetro cerca de 1,5 vezes o do nosso planeta. Sabendo que outubro tem 31 dias, novembro tem 30 dias e dezembro tem 31 dias, responda explicando o teu raciocínio:

a) Dois anos mais um terço de ano em GJ667C-f equivalem a quantos dias terrestres?

b) A data de hoje é 22/10/2016, após transcorrer um ano em GJ667C-f que data será na Terra?

c) Hoje é sábado, após transcorrer um ano e dois terços de ano em GJ667C-f que dia da semana será no nosso planeta?

Problema 2. Lucas montou um cubo com 27 cubinhos, alguns da cor branca e outros da cor cinza, conforme a figura abaixo. Em cada face desse cubo podemos contar 9 quadradinhos. As faces opostas do cubo são iguais. Se Lucas montar outro cubo similar ao primeiro, de modo que em cada face possamos contar 121 quadradinhos, no mínimo quantos cubinhos da cor cinza ele terá que usar?



Problema 3. Numa fila de banco Maria percebeu que havia mais mulheres do que homens, sendo que para cada 7 homens na fila haviam 10 mulheres. Ela percebeu

ainda que o atendimento de cada mulher levava dois minutos, enquanto o atendimento de cada homem levava apenas um minuto. Se o atendimento de todas as pessoas da fila levou 54 minutos, qual era o total de pessoas na fila?

Problema 4. Numa aula de artes, Maria dispunha de 8 varetas de tamanhos e cores diferentes. As brancas mediam 8 cm e 49 cm, as amarelas mediam 17 cm e 26 cm, as verdes mediam 2 cm e 19 cm, as azuis mediam 9 cm e 23 cm. Ela deveria escolher três varetas e construir um triângulo com o maior perímetro possível. Maria conseguiu cumprir a tarefa. Qual o perímetro do triângulo construído por ela?

Problema 5. Para um número de três algarismos, prove que ele é divisível por 3 sempre que a soma dos seus algarismos for divisível por 3.

Problema 6. Numa escola, um terço dos alunos gostam somente de matemática, um quinto gostam somente de história, 402 gostam de ambas as disciplinas e $\frac{1}{15}$ detestam ambas as disciplinas. Responda:

a) Quantos alunos há na escola?

b) Quantos alunos gostam somente de matemática?

c) Quantos alunos gostam de matemática?

d) Quantos alunos gostam de pelo menos uma das disciplinas?

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Augusto Philippus Lack - Colégio Pontagrossense Sepam)*

a) Resposta: 91 dias terrestres

Raciocínio: Primeiro peguei a informação de que 1 ano em GJ667C-f é igual 39 dias terrestres, multipliquei 39 por 2 para dar 2 anos nesse planeta, depois dividi 39 por 3 para dar um terço. No final somei 78 com 13 (resultado da multiplicação e divisão) e concluí que o resultado é 91.

b) Resultado: 30 de novembro.

Raciocínio: Contei quanto é um ano nesse planeta, depois quanto tempo até o dia 31 de outubro, deu 9 dias, subtraí 9 de 39, deu 30, percebi que de 31 de outubro, mais 30 dias, daria dia 30 de novembro, e assim cheguei a minha resposta.

Contas auxiliares: 31 de outubro = 9, 1 de novembro = 10, 11 de novembro = 20, 21 de novembro = 30, 30 de novembro = 39 e 1 ano em GJ667C-f = 39 dias na Terra.

c) Resposta: Dará uma segunda-feira

Raciocínio: Peguei 39 (um ano em GJ667C-f) e somei a $39 \div 3 \times 2$ (equivalente a dois terços) e dividi por 7, para descobrir o número de semanas exatas, resultou em 9 e sobrou 2, peguei sábado e contei mais dois dias, resultou em uma segunda-feira.

Problema 2. *(Resolução de Pablo Dias Schechtel - Colégio Sagrada Família)*

Bem como em cada face há nove cubinhos, no caso 3^2 seria possível deduzir que haveria no mínimo 78 cubinhos cinza, sabendo que $121 = 11^2$, olhando os padrões "cruz" e "faixa", tirando os cubos que formam 2 desenhos, contando apenas 1 vez.

Contas auxiliares: $11 \times (4) + 17 \times (2) = 44 + 34 = 78$ cubinhos cinza

Problema 3. *(Resolução da Pauta)*

Seja x o número de homens na fila. A quantidade de grupos de 7 homens na fila é dada por $\frac{x}{7}$.

Para cada um desses $\dfrac{x}{7}$ grupos haviam 10 mulheres na fila. Portanto, o total de mulheres na fila é dado por $\dfrac{x}{7} \times 10$ ou $\dfrac{10x}{7}$ mulheres.

Como para atender cada mulher eram gastos 2 minutos, então para atender todas as $\dfrac{10x}{7}$ mulheres foram gastos $\dfrac{10x}{7} \times 2 = \dfrac{20x}{7}$ minutos.

Como para atender cada homem era gasto 1 minuto, então para atender todos os x homens foram gastos $x \times 1 = x$ minutos. Somando os tempos gastos com homens e mulheres obtemos que o tempo total para atender a todos na fila foi

$$\frac{20x}{7} + x = \frac{20x + 7x}{7} = \frac{27x}{7} \text{ minutos.}$$

Como o tempo total para atender a todos foi 54 minutos, então temos que ter:

$$\frac{27x}{7} = 54 \qquad (\times 7)$$

$$27x = 54 \times 7 \qquad (\div 27)$$

$$x = 2 \times 7$$

$$x = 14$$

Portanto, haviam 14 homens na fila. Como para cada 7 homens haviam 10 mulheres na fila, então para $14 = 2 \times 7$ homens haviam $2 \times 10 = 20$ mulheres.

Donde o total de pessoas na fila era $14 + 20 = 34$.

Problema 4. *(Resolução de Renato Mandalozzo Tebcherani - Colégio Pontagrossense Sepam)*

Sabendo que as três maiores varetas têm 49, 26 e 23 cm e que $26 + 23 = 49$, ela não poderá usar a maior vareta, pela condição de existência de um triângulo, e como a quarta maior vareta têm 19 cm, ela terá de ser usada, pois $23 + 19 > 26$. A soma de $26 + 23 + 19 = 68$ cm, que equivale ao perímetro do triângulo de Maria.

Problema 5. *(Resolução da Pauta)*

Seja $'abc'$, com $a \neq 0$, um número com três algarismos, então podemos escrever

$$'abc' = 100a + 10b + c$$

Dividindo tudo por 3 obtemos

$$\frac{'abc'}{3} = \frac{100a}{3} + \frac{10b}{3} + \frac{c}{3}$$
$$\frac{'abc'}{3} = \frac{99a+a}{3} + \frac{9b+b}{3} + \frac{c}{3}$$
$$\frac{'abc'}{3} = \frac{99a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{9b}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3}$$
$$\frac{'abc'}{3} = 33a + 3b + \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3}$$
$$\frac{'abc'}{3} = 33a + 3b + \frac{a+b+c}{3}$$

Essa última igualdade nos mostra que $'abc'$ só é divisível por 3 se $\frac{a+b+c}{3}$ for um número inteiro. Em outras palavras, um número de 3 algarismos só é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos for divisível por 3.

Problema 6. *(Resolução de Vinícius Scremin - Colégio Marista Pio XII)*

a) Começamos fazendo $\frac{1}{3}$ de $\frac{15}{15}$ $\left(R = \frac{5}{15}\right)$ e $\frac{1}{5}$ de $\frac{15}{15}$ $\left(R = \frac{3}{15}\right)$. Adicionamos $\frac{5}{15}$ $+ \frac{3}{15} + \frac{1}{15} = \frac{9}{15}$. Dividimos 402 por 6 e obtemos 67. Fazemos $67 \times 15 = 1005$.

   Assim sabemos que são 1005 alunos.

b) Fazemos $1005 \div 15 = 67$. Logo depois fazemos $67 \times 5 = 335$. Assim sabemos que são 335 que gostam somente de matemática.

c) Fazemos $402+335 = 737$. Assim sabemos que 737 alunos gostam de matemática.

d) Fazemos $1005 \div 15 = 67$. Fazemos $67 \times 14 = 938$. Assim sabemos que 938 alunos gostam de pelo menos uma das disciplinas.

4ª OPMat - Nível 2

Primeira Fase

Problema 1. Quantos divisores positivos não primos tem o número 2016?

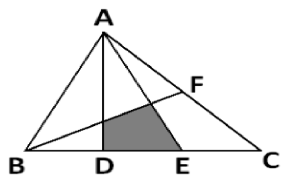
a) 36 b) 33 c) 16 d) 13 e) 8

Problema 2. Igual ao Problema 2 do Nível 1

Problema 3. A soma do maior número natural par e múltiplo de 5, de três algarismos, com o menor número ímpar múltiplo de 7, de cinco algarismos, é

a) 10.993 b) 10.991 c) 10.986 d) 10.984 e) 10.979

Problema 4. No triângulo ABC abaixo,



o segmento de reta BF é a mediana relativa ao lado AC e $BD = DE = EC$. Se a área do triângulo ABC é igual a 6 m^2, então a área da parte pintada é igual a:

a) $0,7\ \mathrm{m}^2$ b) $0,8\ \mathrm{m}^2$ c) $0,9\ \mathrm{m}^2$ d) $1,0\ \mathrm{m}^2$ e) $1,1\ \mathrm{m}^2$

Problema 5. Igual ao Problema 3 do Nível 1

Problema 6. Igual ao Problema 11 do Nível 1

Problema 7. Numa caixa têm nove bolas, em cada uma delas está escrito um único número natural, sendo quatro bolas pares e cinco ímpares. Joãozinho deve retirar da caixa uma bola de cada vez, até retirar a última bola da caixa, seguindo as seguintes regras:

I. Se a bola retirada for a primeira, ou for ímpar e não for a última bola, retira a próxima bola.

II. Se a bola retirada não for a primeira nem a última, mas for par, retira a próxima bola se a anterior for ímpar, se for par, devolve a bola para a caixa e retira mais uma bola.

Se a primeira bola retirada da caixa for ímpar e após a retirada da quinta bola, que pode já ter sido retirada anteriormente, restarem ainda cinco bolas na caixa, podemos afirmar que:

a) Após a retirada da quarta bola restaram duas bolas pares na caixa.

b) A quarta bola retirada da caixa foi uma bola par.

c) A terceira bola retirada da caixa foi uma bola par.

d) Após a retirada da quarta bola restaram três bolas ímpares na caixa.

e) A terceira bola retirada da caixa foi uma bola ímpar.

Problema 8. Considere todos os números naturais com as seguintes características: é um divisor de 2016, mas não é múltiplo de 7, é múltiplo de 6, mas não é múltiplo de 9. A soma de todos esses números é igual a:

a) 36 b) 90 c) 243 d) 256 e) 1024

Problema 9. Num circo, um mágico escolheu três pessoas da plateia e pediu que cada uma delas pensasse em um número inteiro de 1 a 10, mas não revelasse o número pensado. A seguir pediu que cada uma delas revelasse o número pensado para as outras duas pessoas, escrevendo num papel, sem que o mágico visse os números. A seguir pediu para a primeira pessoa dizer a diferença entre os números pensados pelas outras duas pessoas, e a resposta foi 3. Fez a mesma pergunta para a segunda pessoa, e a resposta foi 4. Para a terceira pessoa pediu que dissesse a soma dos três números pensados, e a resposta foi 22. Baseado nas respostas das três pessoas pode-se afirmar que:

a) Um dos números pensados é 6.

b) A diferença entre o maior e o menor número pensado é 5.

c) Exatamente dois dos números pensados são primos.

d) Um dos números pensados é 7.

e) Só um dos números pensados é par.

Problema 10. Joãozinho pegou um número natural e dividiu por 3, e o resto deu 1. Pegou o quociente da divisão e dividiu por 3, e o resto deu 2. Se tivesse dividido o número por 9, o resto seria?

a) 7 b) 5 c) 3 d) 2 e) 0

Problema 11. Igual ao Problema 7 do Nível 1

Problema 12. Igual ao Problema 8 do Nível 1

Problema 13. Maria tinha que somar dois números naturais de dois algarismos não nulos e distintos, cada um. Com pressa, resolveu usar a calculadora e acabou invertendo a ordem dos algarismos do primeiro número, mas digitou correto o segundo. Se o resultado, errado, apresentado pela calculadora foi 138, então a diferença entre o maior e o menor valor possível para a soma correta é:

a) 62 b) 66 c) 69 d) 108 e) 144

Problema 14. João e Paulo são dois caminhoneiros. João almoça no restaurante Boa Viagem a cada 3 dias e Paulo almoça no mesmo restaurante a cada 4 dias. Numa certa segunda-feira João e Pedro almoçaram no Boa Viagem. Passados alguns dias, seguindo a mesma rotina de sempre, almoçaram de novo no mesmo dia no Boa Viagem. Em que dia da semana isso aconteceu?

a) Segunda - feira b) Terça - feira c) Quinta - feira
d) Sábado e) Domingo

Problema 15. Igual ao Problema 12 do Nível 1

Problema 16. Igual ao Problema 13 do Nível 1

Problema 17. Igual ao Problema 14 do Nível 1

Problema 18. Igual ao Problema 15 do Nível 1

Problema 19. Quantos números naturais de três algarismos distintos cuja soma é igual a 6 existem?

a) 4 b) 8 c) 12 d) 14 e) 16

Problema 20. Qual a medida do raio de uma circunferência circunscrita num triângulo cujos lados medem 2 m, 3 m e 4 m?

a) $\dfrac{5\sqrt{29}}{4}$ m b) $\dfrac{5\sqrt{29}}{4}$ m c) $\dfrac{3}{4}$ m d) $\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$ m e) $\dfrac{9}{16}$ m

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
b	d	a	e	a	c	c	Anulada	e	a
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	c	e	d	b	d	e	b	d	d

Segunda Fase

Problema 1. Numa escola, um terço dos alunos gostam somente de matemática, um quinto gostam somente de história, 402 gostam de ambas as disciplinas e $\frac{1}{15}$ detestam ambas as disciplinas. Responda:

a) Quantos alunos há na escola?

b) Quantos alunos gostam somente de Matemática?

c) Quantos alunos gostam de Matemática?

d) Quantos alunos gostam de pelo menos uma das disciplinas?

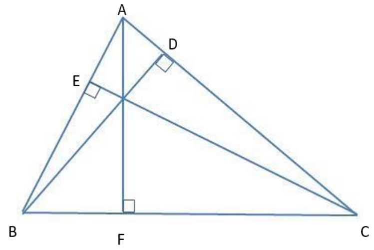
Problema 2. Se $x = \dfrac{1}{21(\sqrt{10}+\sqrt{6})^2}$.

Reescreva x como uma fração que tenha apenas o número 2016 no denominador.

Problema 3. Se a soma de três números inteiros é par, então a soma dos seus quadrados é sempre par ou sempre ímpar? Justifique sua resposta.

Problema 4. Numa fila de banco Maria percebeu que havia mais mulheres do que homens, sendo que para cada 7 homens na fila haviam 10 mulheres. Ela percebeu ainda que o atendimento de cada mulher levava dois minutos, enquanto o atendimento de cada homem levava apenas um minuto. Se o atendimento de todas as pessoas da fila levou 54 minutos, qual era o total de pessoas na fila?

Problema 5. Para um triângulo qualquer, a soma das alturas é menor, maior ou igual ao perímetro do triângulo? Justifique sua resposta. (Espera-se que você prove a tua conclusão)



Problema 6. Efetue a conta $60^2 - 59^2 + 58^2 - 57^2 + 56^2 - 55^2 + ... + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$. Dica: Há uma forma inteligente de obter o resultado sem precisar efetuar todas as continhas.

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Lucas Perondi Kist - Colégio Elite Tales de Mileto)*

a) $x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + 402 + \frac{1}{15}x$ [1]

$\frac{15}{15}x = \frac{5}{15}x + \frac{3}{15}x + \frac{6030}{15} + \frac{1}{15}x$

$15x - 9x = 6030$

$6x = 6030$

$x = \frac{6030}{6} \rightarrow x = 1005$

Como as frações representam partes do todo, montei a equação [1]. Fazendo o MMC e juntando os termos semelhantes, chego que $x = 1005$, ou na escola há 1005 alunos.

b) $y = \frac{1 \times 1005}{3}$

$y = \frac{1005}{3}$

$y = 335$

Como sei que o total é 1005, multiplico por $\frac{1}{3}$ (pessoas que gostam apenas de Matemática) e chego que 335 alunos gostam apenas de Matemática.

c) $z = \frac{1 \times 1005}{3} + 402$

$z = 335 + 402$

$z = 737$

Somando os alunos que gostam apenas de Matrmática (335) com os alunos que gostam de Matemática e História (402), obtenho que 737 alunos gostam de Matemática.

d) $n = \dfrac{1 \times 1005}{3} + \dfrac{1 \times 1005}{5} + 402$

$n = 335 + 201 + 402$

$n = 938$

Como 335 pessoas gostam de Matemática, $\dfrac{1}{5}$ de História e 402 das duas, é só somar tudo, chegando em 938.

Problema 2. *(Resolução da Pauta)*

Na igualdade $x = \dfrac{1}{21(\sqrt{10}+\sqrt{6})^2}$, multiplicando o numerador e o denominador da fração por $(\sqrt{10}-\sqrt{6})^2$, obtemos,

$$x = \frac{(\sqrt{10}-\sqrt{6})^2}{21(\sqrt{10}+\sqrt{6})^2(\sqrt{10}-\sqrt{6})^2}$$

$$x = \frac{(\sqrt{10}-\sqrt{6})^2}{21[(\sqrt{10}+\sqrt{6})(\sqrt{10}-\sqrt{6})]^2}$$

$$x = \frac{10-2\sqrt{60}+6}{21(10-6)^2}$$

$$x = \frac{16-2\sqrt{4\times 15}}{21\times 4^2}$$

$$x = \frac{16-2\times 2\sqrt{15}}{21\times 16}$$

$$x = \frac{16-4\sqrt{15}}{336} \qquad [1]$$

Como $\dfrac{2016}{336}$ resulta em 6 e deixa resto 0, então multiplicamos o numerador e o denominador da fração na igualdade [1] por 6 e obtemos:

$$x = \frac{6\times 16-6\times 4\sqrt{15}}{6\times 336}$$

$$x = \frac{6\times 4(4-\sqrt{15})}{2016}$$

$$x = \frac{24(4-\sqrt{15})}{2016} \text{ ou } x = \frac{96-24\sqrt{15}}{2016}$$

Problema 3. *(Resolução de Cassiano José Kounaris Fuziki - Colégio Marista Pio XII)*

Para representarmos um número par e um número ímpar, podemos utilizar as formas álgebricas $2n$ e $2n+1$, respectivamente.

Para que a soma de três inteiros seja par, é preciso que a forma da equação seja:

[1] $2a+2b+2c =$ número par
[2] $2a+(2b+1)+(2c+1) = 2a+2b+2c+2 =$ número par

Quando elevamos os números de [1] ao quadrado, temos,

$4a^2+4b^2+4c^2 =$ números pares

Como já se sabe, quando se soma três números pares, o resultado será sempre par, portanto a soma em [1] é par.

Quando elevamos os números de [2] ao quadrado, temos,

$(2a)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2 =$

$= 4a^2+4b^2+4b+1+4c^2+4c+1 =$

$= 4a^2+4b^2+4c^2+4b+4c+2 =$ números pares.

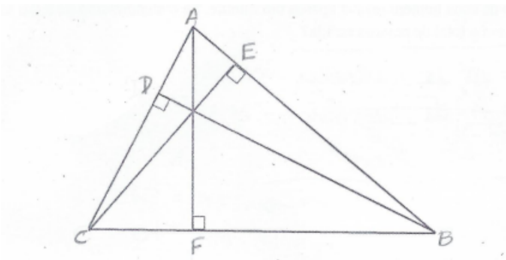
Portanto, os três termos em [2] são números pares, e como já se sabe, a soma de três pares sempre será par, ou seja, a soma em [2] também é par.
Logo, concluo que três inteiros, quando somados resultam em um número par, quando elevados ao quadrado, terão sempre um número par como resultado de sua soma.

Problema 4. *(Resolução de Leonardo Ferreira - Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)*

R: 34, pois:
Podemos transformar as pessoas em minutos:
10 mulheres × 2 minutos; 7 homens × 1 minuto
⇒ 20 minutos; 7 minutos, totalizando 27 minutos.
A seguir, dividimos os 54 minutos pelos 27 minutos:
Como resultado da divisão, temos 2 e deixa resto 0, agora fazemos o processo reverso e multiplicamos por 2,

$27 = 20 + 7 \Rightarrow 40$ (2 minutos) + 14 (1 minuto) $\Rightarrow 20 + 14$, que é, respectivamente, o número de mulheres e homens na fila, 34 pessoas.

Problema 5. *(Resolução de Cassiano José Kounaris Fuziki - Colégio Marista Pio XII)*



Nomeando cada vértice do triângulo acima e o ponto de encontro da altura de cada vértice no lado oposto, observa-se que formam três triângulos retângulos, $1 = \Delta BDC$, $2 = \Delta CFA$ e $3 = \Delta BFA$.
Esse acontecimento se repetirá em qualquer triângulo que trace as alturas de cada vértice, isso porque cada traçado resultará na formação de um triângulo menor, formado por dois ângulos acutângulos e um ângulo de 90° (já que se trata da sua altura), o que resulta em um triângulo retângulo.
Como se pode ver na imagem, os lados pertencentes ao triângulo original ($\overline{AB}, \overline{BC}$, $\overline{CA}$), são sempre o pé da altura traçada em relação a cada lado aos ângulos retos formados por suas alturas, ou seja, são as hipotenusas dos triângulos retângulos que constituem, e as alturas representam um dos catetos.
Portanto, conclui-se que a soma de todas as alturas de um triângulo será sempre menor que a soma dos lados dos triângulos, pois cada altura será sempre menor que pelo menos um lado do triângulo, ou seja, a soma das alturas será consequentemente menor que a dos lados.

Problema 6. *(Resolução de Danilo Beltrame - Colégio Pontagrossense Sepam)*

Primeiramente são feitas as potências e o sinal de subtração é preservado, já que o número não está entre parênteses com o sinal dentro.

$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$
$5^2 = 25$
$6^2 = 36$
$7^2 = 49$
.
.
.
$60^2 = 3600$
$59^2 = 3481$
$58^2 = 3364$
$57^2 = 3249$
.
.
.

Podemos agrupar os números de 2 em 2, fazendo primeiro as subtrações,

$3600 - 3481 = 119$
$3364 - 3249 = 115$
$56^2 - 55^2 = 111$

Percebemos que há um padrão, a cada subtração que fazemos, $(60^2 - 59^2), (58^2 - 57^2), (56^2 - 55^2), \ldots$, a diferença decresce em 4 unidades, até $2^2 - 1^1 = 3$, a partir daí, podemos aplicar o Teorema de Gauss, $119 + 115 + 111 + 107 + \ldots + 15 + 11 + 7 + 3$, percebemos que as somas das extremidades é igual a 122, e isso ocorrerá 15 vezes, porque tínhamos 60 números, reduzimos a metade, fazendo as subtrações e de novo agora somando as extremidades, então:

$60^2 - 59^2 + 58^2 - 57^2 + 56^2 - 55^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 = 122 \times 15 = 1830.$

4ª OPMat - Nível 3

Primeira Fase

Problema 1. Igual ao Problema 1 do Nível 2

Problema 2. Qual é o maior número natural N tal que 5^N é um divisor de 2016! ?

a) 101 b) 102 c) 501 d) 502 e) 1001

Problema 3. Igual ao Problema 3 do Nível 2

Problema 4. Igual ao Problema 8 do Nível 2

Problema 5. Numa caixa têm nove bolas, em cada uma delas está escrito um único número natural, sendo quatro bolas pares e cinco ímpares. Joãozinho deve retirar da caixa uma bola de cada vez, até retirar a última bola da caixa, seguindo as seguintes regras:

I. Se a bola retirada for a primeira, ou for ímpar e não for a última bola, retira a próxima bola.

II. Se a bola retirada não for a primeira nem a última, mas for par, retira a próxima bola se a anterior for ímpar, se for par, devolve a bola para a caixa e retira mais uma bola.

Se a primeira bola retirada da caixa for ímpar e após a retirada da quinta bola, que pode já ter sido retirada anteriormente, restarem ainda cinco bolas na caixa, podemos afirmar que:

a) A quarta bola retirada da caixa foi uma bola par.

b) Após a retirada da quarta bola restaram duas bolas pares na caixa.

c) A terceira bola retirada da caixa foi uma bola par.

d) Após a retirada da quarta bola restaram três bolas ímpares na caixa.

e) A terceira bola retirada da caixa foi uma bola ímpar.

Problema 6. Igual ao Problema 11 do Nível 2

Problema 7. Igual ao Problema 11 do Nível 2

Problema 8. Igual ao Problema 13 do Nível 2

Problema 9. Num triângulo ABC de 20 cm de perímetro, os ângulos internos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e medem respectivamente, $60°$ e $45°$. Qual a medida do lado oposto ao ângulo interno $\hat{A}$?

a) $\dfrac{120}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ cm

b) $\dfrac{60}{3+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$ cm

c) $\dfrac{40}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ cm

d) $\dfrac{40}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ cm

e) $\dfrac{120}{6+3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}$ cm

Problema 10. A figura mostra uma fita composta de 2016 retângulos sucessivos pintados ou de cinza ou de branco, seguindo a seguinte regra: um cinza, um branco, dois cinzas, um branco, três cinzas, um branco, quatro cinzas, um branco, etc., até o 2016° retângulo. Quantos retângulos pintados de cinza existem na fita?

a) 1800 b) 1860 c) 1943 d) 1954 e) 1987

Problema 11. Igual ao Problema 19 do Nível 2

Problema 12. Igual ao Problema 18 do Nível 2

Problema 13. Se B é um conjunto e $A_1, A_2, ..., A_N$ são subconjuntos não vazios de B, dizemos que uma função $f : A \to B$, $A = \{A_1, A_2, ..., A_N\}$, é uma função de escolha se para cada índice k, $f(A_k) \in A_k$; isto é, se para cada índice k, a imagem de A_k é um elemento de A_k. Considerando os subconjuntos $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{2,3\}$, $A_3 = \{3,4\}$ e $B = \{1,2,3,4\}$, quantas funções de escolha $f : A \to B$, $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ podem ser construídas?

a) 16 b) 14 c) 12 d) 10 e) 8

Problema 14. Dadas as circunferências cujas equações gerais são dadas por:

$$\gamma_1\text{: } x^2\text{+}y^2\text{-2x-4y+1=0}$$
$$\gamma_2\text{: } x^2\text{+}y^2\text{+2x-6y+1=0}$$

pode-se afirmar que γ_1 e γ_2

a) são tangentes exteriores.

b) são tangentes interiores.

c) são secantes.

d) não se interceptam e não possuem pontos interiores em comum.

e) não se interceptam, mas possuem pontos interiores em comum.

Problema 15. Se N é o maior inteiro positivo de três algarismos distintos que termina em 9 e é múltiplo de 11, então a soma dos algarismos de N é

a) 18 b) 19 c) 21 d) 23 e) 24

Problema 16. Igual ao Problema 4 do Nível 2

Problema 17. Numa reunião envolvendo 5 pessoas, duas delas não se gostam e evitam a todo custo sentarem uma ao lado da outra. Se na sala de reuniões existem 5 cadeiras dispostas em torno de uma mesa circular, de quantas maneiras as 5 pessoas podem sentar-se sem que as duas desafetas sentem uma ao lado da outra?

a) 10 b) 12 c) 24 d) 48 e) 120

Problema 18. Efetuando a operação 99.999^3 obtemos

a) 999.999.700.299.999

b) 998.999.700.299.999

c) 999.970.000.299.999

d) 999.970.299.999.999

e) 999.999.970.299.999

Problema 19. Se x e y, $x > y$, são dois números naturais que satisfazem as relações: $x^3 - y^3 = 37$ e, $x^2 y + x y^2 = 84$, então $x^4 - y^4$ é igual a

a) 47 b) 141 c) 156 d) 175 e) 223

Problema 20. Sabendo que $\log_3 2 = a$, $\log_4 3 = b$ e $\log_5 4 = c$, então $\log_{60} 24$ é igual a

a) $\dfrac{abc(3+2b)}{2abc(b+1)+1}$

b) $\dfrac{abc(2a+3b)}{2abc(b+1)+1}$

c) $\dfrac{abc(3a+2b)}{2abc(b+1)+1}$

d) $\dfrac{abc(a+b)}{2abc(a+1)+1}$

e) $\dfrac{abc(2+3a)}{2abc(a+1)+1}$

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
b	d	a	Anulada	e	a	c	e	e	d
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
d	b	e	c	d	e	b	c	d	a

Segunda Fase

Problema 1. Um certo dia dois amigos, João e Pedro, se encontraram e começaram a lembrar alguns fatos passados. João, por exemplo, lembrou que quando Maria, irmã de Pedro, nasceu, ele tinha o dobro da idade que Pedro tem agora. Se hoje Maria tem metade da idade de Pedro e a soma das idades de João e Pedro é 70 anos, quantos anos João tinha quando Maria nasceu?

Problema 2. Para $a, b, c, d \geq 0$ prove que $\dfrac{(ab+cd)^2}{4} \geq \text{abcd}$

Problema 3. A expressão $\text{E} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{5+2\sqrt{2}+\sqrt{24+16\sqrt{2}}}$ pode ser simplificada até se tornar $\text{E} = \sqrt{2}\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}+1\right)$. Faça essa simplificação.

Problema 4. Os pontos A e B estão situados acima de uma reta r conforme mostra a figura. Encontre o valor da menor distância a ser percorrida para ir de A até B, obrigatoriamente tocando a reta r em um ponto E.

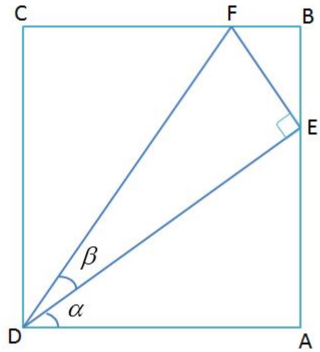
$AC = 5$ cm $\qquad BD = 3$ cm $\qquad CD = 6$ cm

Problema 5. Efetue a conta

$$2016^2 - 2015^2 + 2014^2 - 2013^2 + 2012^2 - 2011^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2.$$

Dica: Há uma forma inteligente de obter o resultado sem precisar efetuar todas as continhas.

Problema 6. Sejam $0° < \alpha < 90°$ e $0° < \beta < 90°$, com $\alpha + \beta < 90°$. Dado um triângulo retângulo DEF, com $\hat{E} = 90°$, $\hat{D} = \beta$ e cateto maior $DE = 1$, podemos inscrevê-lo num retângulo formando um ângulo α com a base AD desse retângulo. Observe a figura:



Use esta figura para deduzir que:
$cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha \times cos\ \beta - sen\ \alpha \times sen\ \beta.$

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Larissa Almeida Busnello - Colégio Pontagrossense Sepam)*

Idade de João = J
Idade de Pedro = P
Idade de Maria = M

J - M = 2P (1)
M = P/2 (2)
J + P = 70 (3)

A partir das informações é possível montar as 3 equações, pois a idade de João quando Maria nasceu era o dobro da idade que Pedro tem hoje, sendo assim a diferença das idades atuais de João e Maria é a idade de João quando Maria nasceu. Na segunda temos que a idade de Maria é matade da idade de Pedro. Na última sabemos que a soma das idades de João e Pedro e 70 anos.

Isolando J em (3):
J = 70 - P

Substituindo J em (1)
70 - P - M = 2P

70 - M = 3P

M = -3P + 70

Substituindo M em (2)
-3P + 70 = P/2

70 = 7/2P

140 = 7P

P = 20

Sendo assim Pedro tem 20 anos.

M = P/2

M = 20/2

M = 10

Maria 10 anos

J + P = 70

J + 20 = 70

J = 50

João tem 50 anos atualmente, mas quando Maria nasceu João tinha 40 anos.

Problema 2. *(Resolução da Pauta)*

Temos que:

$$\frac{(ab+cd)^2}{4} \geq abcd$$

Multiplicando por 4 ambos os membros

$$(ab+cd)^2 \geq 4abcd$$

$$a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 \geq 4abcd$$

Subtraindo $-4abcd$ de ambos os membros

$$a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2 \geq 0$$

Como $a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2 = (ab-cd)^2$, temos:

$$(ab-cd)^2 \geq 0$$

Essa última igualdade é obviamente verdadeira, pois todo quadrado de um número é positivo (ou nulo). Como ela foi obtida da igualdade inicial através de um processo lógico correto, então a igualdade inicial tem que ser verdadeira.

Portanto, está provado que $\dfrac{(ab+cd)^2}{4} \geq abcd$

Problema 3. *(Resolução da Pauta)*

Em E aparecem três expressões da forma $a + b\sqrt{2}$. Como a mais simples delas é 3+2$\sqrt{2}$ vamos tentar reduzir as demais expressões a esse formato:

$$\mathrm{E} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{2+3+2\sqrt{2}+\sqrt{8(3+2\sqrt{2})}}$$

$$\mathrm{E} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}+\sqrt{8}\times\sqrt{(3+2\sqrt{2})}+2}$$

$$E = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\times\sqrt{(3+2\sqrt{2})+2}} \quad [I]$$

Vemos que:

$$3+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\times\sqrt{(3+2\sqrt{2})+2} = (\sqrt{3+2\sqrt{2}})^2 + 2\sqrt{2}\times\sqrt{(3+2\sqrt{2})} + (\sqrt{2})^2$$

Portanto, o 2º membro da igualdade acima é um trinômio quadrado perfeito. Por isso, podemos escrever

$$3+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\times\sqrt{(3+2\sqrt{2})+2} = \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^2 \quad [II]$$

Substituindo a [II] na [I] obtemos:

$$E = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{2})^2}$$
$$E = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{2}$$
$$E = 2\times\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{2}$$

Considerando que na resposta devemos ter $\sqrt{2}$ em evidência, fazemos:

$$E = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{2}$$

$$E = \sqrt{2}\times\left(\sqrt{2}\times\sqrt{3+2\sqrt{2}}+1\right)$$

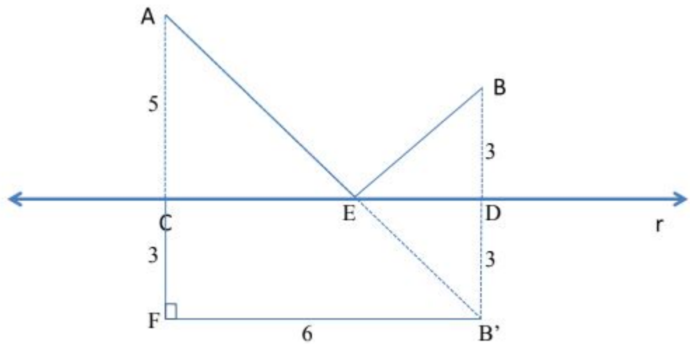
$$E = \sqrt{2}\times\left(\sqrt{2\times 3+2\times 2\sqrt{2}}+1\right)$$

$$E = \sqrt{2}\times\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}+1\right)$$

Essa igualdade é a simplificação pedida.

Problema 4. *(Resolução da Pauta)*

Como a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta, vamos acrescentar, na figura, o ponto B' simétrico ao B em relação à reta r. Vamos, também, traçar o segmento AB' determinando o ponto E de interseção entre AB' e a reta r. Também traçaremos o segmento EB.



Como EB é simétrico a EB', em relação à reta r, então a menor distância entre A e B é dada pela linha poligonal AEB cujo comprimento equivale à medida do segmento AB'. Traçando uma paralela à r passando por B' e prolongando AC formamos um triângulo retângulo que tem AB' como hipotenusa. Observe a figura acima.
Note que $CF = B'D = BD = 3$ cm e que $B'F = CD = 6$ cm.
Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle AFB'$, obtemos:

$$AB'^2 = AF^2 + B'F^2$$

Donde,

$$AB'^2 = (5+3)^2 + 6^2$$
$$AB'^2 = 64 + 36$$
$$AB'^2 = 100$$
$$AB' = \pm\sqrt{100}$$
$$AB' = \pm 10$$

Como estamos trabalhando com medida desconsideramos o valor negativo, assim:

$$AB' = 10$$

Portanto, o valor da menor distância a ser percorrida para ir de A até B, obrigatoriamente tocando a reta r em um ponto E, é 10 cm.

Problema 5. *(Resolução de Nathan Nabozny - Colégio Neo Master)*

Escrevendo cada número par na forma $(x+1)^2$, sendo x o número ímpar [Ex: 2016^2-2015^2 = $(2015+1)^2$-2015^2], temos que:

$(x+1)^2 - x^2$
$x^2 + 2x + 1 - x^2$
$2x+1$

Veja que $2x+1$ é a forma do resto de cada parcela, como x representa o termo ímpar de cada parcela, vemos que substituindo os número ímpares temos:

(4031, 4027,..., 7, 3)

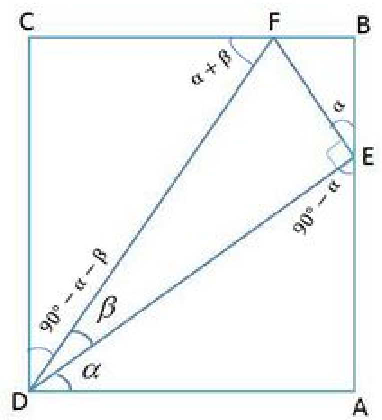
Forma-se uma PA de razão -4 e como temos 2016 números, temos 1008 parcelas. Logo queremos a soma dos 1008 termos dessa PA. Assim:

$$S_{1008} = \frac{(4031-3)\times 1008}{2} = 2033136$$

Portanto, $S_{1008} = 2033136$

Problema 6. *(Resolução da Pauta)*

Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°, então podemos refazer a figura como esta abaixo:



Do triângulo DCF obtemos que

$$cos\,(\alpha+\beta) = \frac{CF}{DF} = CF \times \frac{1}{DF} \qquad [1]$$

Do triângulo DEF obtemos que

$$sen\ \beta = \frac{EF}{DF} \qquad [2]$$

$$cos\ \beta = \frac{DE}{DF} = \frac{1}{DF} \qquad [3]$$

Do triângulo EAD obtemos que

$$sen\ \alpha = \frac{EA}{DE} = \frac{EA}{1} = EA \qquad [4]$$

$$cos\ \alpha = \frac{AD}{DE} = \frac{AD}{1} = AD \qquad [5]$$

Do triângulo EBF obtemos que

$$sen\ \alpha = \frac{BF}{EF} \qquad [6]$$

$$cos\ \alpha = \frac{BE}{EF} \qquad [7]$$

Substituindo a equação [3] na equação [1] obtemos

$$cos\ (\alpha + \beta) = \frac{CF}{DF} = CF \times cos\ \beta \qquad [8]$$

Essa última igualdade nos indica que precisamos calcular CF como uma função de senos e cossenos de α e β.

Observando a figura, concluímos que:

$$CF = AD - BF \qquad [9]$$

Multiplicando a equação [6] por EF obtemos

$$EF \times sen\ \alpha = BF \qquad [10]$$

Substituindo as equações [5] e [10] na equação [9] obtemos

$$CF = cos\ \alpha - EF \times sen\ \alpha \qquad [11]$$

Dividindo a igualdade [2] pela [3] obtemos

$$\frac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = \frac{\frac{EF}{DF}}{\frac{1}{DF}} = \frac{\frac{EF}{DF}\ DF}{\frac{1}{DF}\ DF} = \frac{EF}{1} = EF \qquad [12]$$

Substituindo a equação [12] na equação [11] obtemos

$$CF = cos\ \alpha - \frac{sen\beta}{cos\ \beta}\ sen\ \alpha \qquad [13]$$

Colocando a equação [13] na equação [8] obtemos

$$cos\ (\alpha + \beta) = \left(cos\ \alpha - \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta}\ sen\ \alpha\right)\ cos\ \beta$$

Donde, deduzimos a fórmula

$$cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \beta \times cos\ \alpha - sen\ \beta \times sen\ \alpha$$

4ª OPMat - Nível 4

Primeira Fase

Problema 1. Igual ao Problema 2 do Nível 3

Problema 2. Numa caixa têm nove bolas, em cada uma delas está escrito um único número natural, sendo quatro bolas pares e cinco ímpares. Joãozinho deve retirar da caixa uma bola de cada vez, até retirar a última bola da caixa, seguindo as seguintes regras:

I. Se a bola retirada for a primeira, ou for ímpar e não for a última bola, retira a próxima bola.

II. Se a bola retirada não for a primeira nem a última, mas for par, retira a próxima bola se a anterior for ímpar, se for par, devolve a bola para a caixa e retira mais uma bola.

Se a primeira bola retirada da caixa for ímpar e após a retirada da quinta bola, que pode já ter sido retirada anteriormente, restarem ainda cinco bolas na caixa, podemos afirmar que:

a) A terceira bola retirada da caixa foi uma bola par.

b) A quarta bola retirada da caixa foi uma bola par.

c) Após a retirada da quarta bola restaram duas bolas pares na caixa.

d) A terceira bola retirada da caixa foi uma bola ímpar.

e) Após a retirada da quarta bola restaram três bolas ímpares na caixa.

Problema 3. Igual ao Problema 4 do Nível 1

Problema 4. Igual ao Problema 10 do Nível 3

Problema 5. Sabendo que o polinômio $P(x) = x^4 - 10x^3 + 34x^2 - 45x + 20$ tem quatro raízes reais, sendo duas raízes inteiras e duas irracionais, qual é o valor da soma das duas raízes maiores?

a) 5 b) 6 c) $\dfrac{13+\sqrt{5}}{2}$ d) $\dfrac{8+\sqrt{5}}{2}$ e) $\dfrac{3+2\sqrt{5}}{4}$

Problema 6. Igual ao Problema 5 do Nível 1

Problema 7. Igual ao Problema 6 do Nível 3

Problema 8. Igual ao Problema 7 do Nível 3

Problema 9. Efetuando a operação 99.999^3 obtemos

a) 999.970.000.299.999

b) 999.999.700.299.999

c) 998.999.700.299.999

d) 999.970.299.999.999

e) 999.999.970.299.999

Problema 10. Igual ao Problema 8 do Nível 3

Problema 11. Se as coordenadas de três dos quatro vértices de um paralelogramo são, respectivamente, $(3,1)$, $\left(\frac{1}{5},\frac{17}{3}\right)$ e $\left(\frac{11}{5},\frac{37}{5}\right)$, então as coordenadas do quarto vértice são:

a) $(1,3)$ b) $\left(5,\frac{41}{15}\right)$ c) $(5,2)$ d) $\left(\frac{17}{5},\frac{1}{5}\right)$ e) $(3,7)$

Problema 12. Igual ao Problema 11 do Nível 3

Problema 13. Igual ao Problema 13 do Nível 3

Problema 14. Num triângulo ABC de 20 cm de perímetro, os ângulos internos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ medem respectivamente, $60°$ e $45°$. Qual a medida do lado oposto ao ângulo interno $\hat{A}$?

a) $\dfrac{120}{6+3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}$ cm

b) $\dfrac{120}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ cm

c) $\dfrac{60}{3+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$ cm

d) $\dfrac{40}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ cm

e) $\dfrac{40}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ cm

Problema 15. Igual ao Problema 15 do Nível 3

Problema 16. Qual a medida do raio de uma circunferência circunscrita num triângulo cujos lados medem 2 m, 3 m e 4 m?

a) $\dfrac{5\sqrt{29}}{4}$ m b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m c) $\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$ m d) $\dfrac{3}{4}$ m e) $\dfrac{9}{16}$ m

Problema 17. Se x e y, $x > y$, são dois números naturais que satisfazem as relações: $x^3 - y^3 = 37$ e $x^2y + xy^2 = 84$, então $x^4 - y^4$ é igual a

a) 223 b) 175 c) 156 d) 141 e) 47

Problema 18. Igual ao Problema 16 do Nível 3

Problema 19. Igual ao Problema 17 do Nível 3

Problema 20. Sabendo que $\log_3 2 = a$, $\log_4 3 = b$ e $\log_5 4 = c$ então $\log_{60} 24$ é igual a

a) $\dfrac{abc(a+b)}{2abc(a+1)+1}$

b) $\dfrac{abc(2a+3b)}{2abc(b+1)+1}$

c) $\dfrac{abc(3a+2b)}{2abc(b+1)+1}$

d) $\dfrac{abc(3+2b)}{2abc(b+1)+1}$

e) $\dfrac{abc(2+3a)}{2abc(a+1)+1}$

Gabarito da Primeira Fase

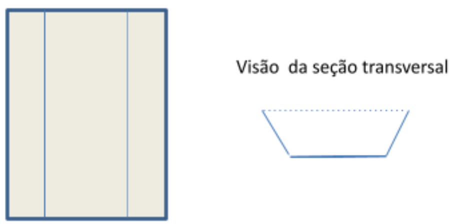
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
b	a	e	d	c	Anulada	a	c	a	e
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
b	d	e	a	d	c	b	e	b	d

Segunda Fase

Problema 1. Sabe-se que todo número complexo $z = a + bi$ pode ser escrito na forma trigonométrica $z = r(cos\,\theta + i\ sen\,\theta)$, onde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o módulo de z e θ é o seu argumento. É fácil deduzir que $z^n = r^n(cos\ n\theta + i\ sen\ n\theta)$. Essa é a fórmula de De Moivre. Para $r = 1$, encontre um modo de exprimir $cos\ n\theta$ como uma função de z.

Problema 2. Sejam $A = 5^{2016}$ e $B = 3^{2016} + 4^{2016}$. Determine se $A < B$ ou $A = B$ ou $A > B$.

Problema 3. Dispomos de uma chapa retangular com 30 centímetros de largura. Temos que dobrá-la em forma de calha. Sua seção transversal deve ter a forma de um trapézio isósceles. Que largura devem ter os lados e que ângulo eles devem formar com o fundo da calha de modo que a seção transversal tenha área máxima e, em consequência, a calha comporte o máximo de água?



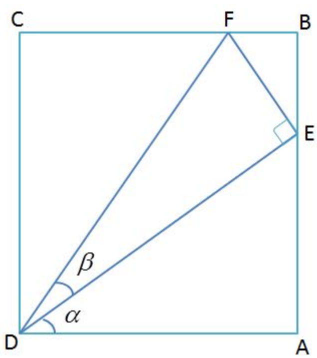
Dica: Se a soma entre quatro números é constante, então o produto entre eles será máximo quando os quatro forem iguais. (Essa afirmação também é válida para três ou dois números).

Problema 4. Os pontos A e B estão situados acima de uma reta r conforme mostra a figura. Encontre o valor da menor distância a ser percorrida para ir de A até B, obrigatoriamente tocando a reta r em um ponto E.

$AC = 5$ cm $\qquad$ $BD = 3$ cm $\qquad$ $CD = 6$ cm

Problema 5. A equação $x^3-(5-4\sqrt{2}+6\sqrt{7})x^2+(25-20\sqrt{2}+30\sqrt{7})x-125=0$ tem 3 soluções distintas que colocadas em ordem crescente formam uma progressão geométrica (PG). Ache a razão dessa PG.

Problema 6. Sejam $0° < \alpha < 90°$ e $0° < \beta < 90°$, com $\alpha+\beta < 90°$. Dado um triângulo retângulo DEF, com $\hat{E} = 90°$, $\hat{D} = \beta$ e cateto maior DE=1, podemos inscrevê-lo num retângulo formando um ângulo α com a base AD desse retângulo. Observe a figura:



Use esta figura para deduzir que:
$cos\ (\alpha+\beta) = cos\ \alpha \times cos\ \beta - sen\ \alpha \times sen\ \beta.$

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução da Pauta)*

Como $r = 1$, então:

$z^n = cos\ n\theta + i\ senn\theta$ [1]

Se multiplicarmos tudo por $cos\ n\theta - i\ sen\ n\theta$, obtemos:

$z^n(cos\ n\theta - i\ sen\ n\theta) = cos^2\ n\theta - i^2\ sen^2\ n\theta$
$z^n(cos\ n\theta - i\ sen\ n\theta) = cos^2\ n\theta + sen^2\ n\theta$

Como $cos^2\ n\theta + sen^2\ n\theta = 1$, então:

$z^n(cos\ n\theta - isen\ n\theta) = 1$

Dividindo tudo por z^n e virando a igualdade, obtemos:

$\frac{1}{z^n} = cos\ n\theta - isen\ n\theta$ [2]

Somando a [1] com a [2] obtemos

$z^n + \frac{1}{z^n} = 2cos\ n\theta$

Multiplicando tudo por $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}(z^n + \frac{1}{z^n}) = cos\ n\theta$

Portanto, a função desejada é

$cos\ n\theta = \frac{1}{2}(z^n + \frac{1}{z^n})$

Problema 2. *(Resolução de Elias Estevão Pereira dos Santos - Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)*

$A = 5^{2016} = (5^2)^{1008} = 25^{1008} = (16+9)^{1008} = 16^{1008} + 9^{1008} + x$

$B = 3^{2016} + 4^{2016} = (3^2)^{1008} + (4^2)^{1008} = 9^{1008} + 16^{1008}$

O resultado de $(a+b)^2$ possui 4 termos $(a^2 + ab + ab + b^2)$

O resultado de $(a+b)^3$ possui 8 termos $(a^3 + a^2b + a^2b + a^2b + ab^2 + ab^2 + ab^2 + b^3)$

Ou seja, o número de termos de $(a+b)^x$ é 2^x, pois temos 2 termos entre parênteses.

Portanto, $(16+9)^{1008}$ possui 2^{1008} termos. Como é uma multiplicação entre termos inteiros, positivos e não nulos, todos os termos do resultado são maiores ou iguais a 1.

Logo, $A = 5^{2016} = (5^2)^{1008} = (16+9)^{1008} = 16^{1008} + 9^{1008} + x$.

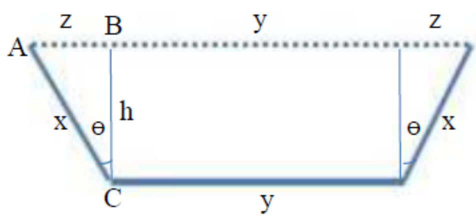
Onde x são os $(2^{1008} - 2)$ termos restantes. Como $x \geq 1$, então

$16^{1008} + 9^{1008} + x = (4^2)^{1008} + (3^2)^{1008} + x = 3^{2016} + 4^{2016} + x > 3^{2016} + 4^{2016}$

Logo, $A > B$

Problema 3. *(Resolução da Pauta)*

Observe a figura da secção transversal da calha



Seja d a largura da chapa, então $d = 2x+y$ [1]

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, obtemos

$h^2 + z^2 = x^2$

$h = \sqrt{x^2 - z^2}$ [2]

A área do trapézio que representa a secção transversal da calha é

$$A = \frac{(z+y+z)+y}{2}\sqrt{x^2-z^2}$$

$$A = (y+z)\sqrt{x^2-z^2}$$

$$A = \sqrt{(y+z)^2(x^2-z^2)}$$

Os valores de x, y e z que maximizam A também maximizam A^2, que também maximizam $3 \times A^2$.

Como $3 \times A^2 = (y+z)(y+z)(x+z)(3x-3z)$ [3]

Então $3 \times A^2$ é o produto entre 4 fatores, os quais somados resultam em

$S = 2y + 4x$

$S = 2(y + 2x)$ [4]

Substituindo a equação [1] na equação [4] obtemos

$S = 2d$

Donde, a soma dos fatores de $3 \times A^2$ é uma constante. Portanto, o máximo ocorre quando todos os fatores são iguais. Em particular:

$y + z = x + z$ [5]

$x + z = 3x - 3z$ [6]

Da equação [5] obtemos $y = x$ e colocando na equação [1] concluímos que:

$$x + 2x = d$$

$$3x = d \qquad (\div 3)$$

$$x = \frac{d}{3} \qquad [7]$$

Usando a equação [7] na equação [6] obtemos

$$\frac{d}{3} + z = 3\,\frac{d}{3} - 3z \qquad (\times 3)$$

$$d + 3z = 3d - 9z \qquad (+9z - d)$$

$$12z = 2d \qquad (\div 12)$$

$$z = \frac{2d}{12}$$

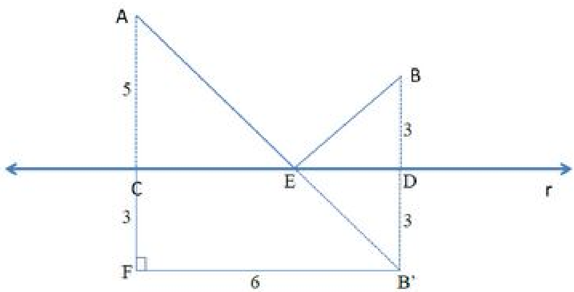
$$z = \frac{d}{6}$$

No $\triangle ABC$ vemos que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{z}{x} = \dfrac{\frac{d}{6}}{\frac{d}{3}} = \dfrac{\frac{d}{6}\,6}{\frac{d}{3}\,6} = \dfrac{d}{2d} = \dfrac{1}{2}$ donde $\theta = 30^\circ$. Portanto, os lados da calha devem formar um ângulo de $90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ com o fundo.

Concluímos que o máximo da área da secção transversal ocorre quando a calha tiver a forma de 3 lados consecutivos de um hexágono regular.

Problema 4. *(Resolução da Pauta)*

Como a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta, vamos acrescentar, na figura, o ponto B' simétrico ao B em relação à reta r. Vamos, também, traçar o segmento AB' determinando o ponto E de interseção entre AB' e a reta r. Também traçaremos o segmento EB.



Como EB é simétrico a EB', em relação à reta r, então a menor distância entre A e B é dada pela linha poligonal AEB cujo comprimento equivale à medida do segmento AB'. Traçando uma paralela à r passando por B' e prolongando AC formamos um triângulo retângulo que tem AB' como hipotenusa. Observe a figura acima.

Note que $CF = B'D = BD = 3$ cm e que $B'F = CD = 6$ cm.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no △AFB' obtemos:

$$AB'^2 = AF^2 + B'F^2$$

Donde,

$$AB'^2 = (5+3)^2 + 6^2$$
$$AB'^2 = 64 + 36$$
$$AB'^2 = 100$$
$$AB' = \pm\sqrt{100}$$
$$AB' = \pm 10$$

Como estamos trabalhando com medida desconsideramos o valor negativo, assim:

$$AB' = 10$$

Portanto, o valor da menor distância a ser percorrida para ir de A até B, obrigatoriamente tocando a reta r em um ponto E, é 10 cm.

Problema 5. *(Resolução da Pauta)*

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra a equação pode ser escrita como

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0 \qquad [1]$$

Onde x_1, x_2 e x_3 são as soluções da equação. Supondo $x_1 < x_2 < x_3$ e como as soluções em ordem crescente formam uma PG, então existe um y tal que

$$x_1 = y \qquad [2]$$

$$x_2 = qy \qquad [3]$$

$$x_3 = q^2 y \qquad [4]$$

Substituindo as equações [2], [3] e [4] na equação [1] obtemos

$$(x-y)(x-qy)(x-q^2y)=0$$

$$(x^2-qyx-yx+qy^2)(x-q^2y)=0$$

$$x^3-qyx^2-yx^2+qy^2x-q^2yx^2+q^3y^2x+q^2y^2x-q^3y^3=0$$

$$x^3-(1+q+q^2)yx^2+(1+q+q^2)qy^2x-q^3y^3=0$$

Substituindo $1+q+q^2$ por k obtemos

$$x^3-(k)yx^2+(k)qy^2x-q^3y^3=0 \qquad [5]$$

Comparando a equação [5] com a equação inicial concluímos que:

$$ky = 5-4\sqrt{2}+6\sqrt{7} \qquad [6]$$

$$kqy^2 = 5(5-4\sqrt{2}+6\sqrt{7}) \qquad [7]$$

$$q^3y^3 = 125 \qquad [8]$$

Substituindo a equação [6] na equação [7] obtemos

$$kqy^2 = 5ky \qquad (\div ky)$$

$$qy = 5 \qquad (\div q)$$

$$y = \frac{5}{q} \qquad [9]$$

Essa é a primeira solução x_1.

Donde, colocando a equação [9] na equação [2], na [3] e na [4] obtemos

$$x_1 = \frac{5}{q}, x_2 = 5 \text{ e } x_3 = 5q$$

E podemos dividir o 1º membro da equação inicial por $(x - x_2) = (x - 5)$ com $x \neq 5$ para que não haja divisão por zero. Fazendo isso obtemos

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - (5 - 4\sqrt{2} + 6\sqrt{7})x^2 + (25 - 20\sqrt{2} + 30\sqrt{7})x - 125 & x - 5 \\
\underline{-x^3 + 5x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & x^2 + (4\sqrt{2} - 6\sqrt{7})x + 25 \\
\qquad (4\sqrt{2} - 6\sqrt{7})x^2 + (25 - 20\sqrt{2} + 30\sqrt{7})x - 125 & \\
\qquad \underline{-(4\sqrt{2} - 6\sqrt{7})x^2 + (20\sqrt{2} - 30\sqrt{7})x} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 25x - 125 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-25x + 125} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 + 0 &
\end{array}$$

Portanto, as outras soluções da equação inicial são também soluções da equação quadrática

$$x^2 + (4\sqrt{2} - 6\sqrt{7})x + 25 = 0 \qquad [10]$$

É plausível supor que uma das soluções seja $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ ou $\sqrt{2} - \sqrt{7}$ ou $-\sqrt{2} + \sqrt{7}$. Substituindo $x = \sqrt{2} + \sqrt{7}$ na equação [10] constatamos que ela é satisfeita.

Como $\sqrt{2} < 2$ e $\sqrt{7} < 3$, então $\sqrt{2} + \sqrt{7} < 5$. Portanto, $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ vem antes de 5 na PG. Em consequência, a razão da PG é dada por:

$$q = \frac{5}{\sqrt{2} + \sqrt{7}}$$

$$q = \frac{5 \times (\sqrt{2} - \sqrt{7})}{(\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{2} - \sqrt{7})}$$

$$q = \frac{5(\sqrt{2} - \sqrt{7})}{2 - 7}$$

$$q = \frac{5(\sqrt{2} - \sqrt{7})}{-5}$$

$$q = \sqrt{7} - \sqrt{2}$$

Esse último resultado é a razão procurada.

Problema 6. *(Resolução de Elias Estevão Pereira dos Santos - Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)*

Temos que

$$\text{sen }\alpha = \frac{AE}{DE} = AE = \frac{FB}{FE}$$

$$\text{sen }\beta = \frac{FE}{DF}$$

$$\cos\alpha = \frac{DA}{DE} = DA = \frac{BE}{FE}$$

$$cos\,\beta = \frac{DE}{DF} = \frac{1}{DF} \Rightarrow DF = \frac{1}{\cos\beta}$$

Assim,

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{CF}{DF} = \frac{CF}{\frac{1}{\cos\beta}} = CF \times \cos\beta$$

Como $CF = DA - FB$, temos que

$$cos\,(\alpha+\beta) = \cos\beta \times (DA - FB) = \cos\beta \times DA - \cos\beta \times FB =$$

$$\cos\beta \times \cos\alpha - \cos\beta \times FB$$

Como $FB = \text{sen}\,\alpha \times FE$,

$$cos\,(\alpha+\beta) = \cos\beta \times \cos\alpha - \cos\beta \times \text{sen}\,\alpha \times FE =$$

$$\cos\beta \times \cos\alpha - \frac{1}{DF} \times FE \times \text{sen }\alpha = \cos\beta \times \cos\alpha - \frac{FE}{DF} \times \text{sen }\alpha =$$

$$\cos\alpha \times \cos\beta - \text{sen }\alpha \times \text{sen }\beta$$

Portanto, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \times \cos\beta - \text{sen }\alpha \times \text{sen }\beta$

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

5ª OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

"Promovendo a inclusão social e ajudando a mudar o cenário da educação."

Premiados

A Cerimônia de Premiação da *5ª Olimpíada Pontagrossense de Matemática* ocorreu no dia 02 de dezembro de 2017, no Cine Teatro PAX, em dois horários distintos: às 09h30 para os alunos do Nível **Júnior** (5º ano do Ensino Fundamental I) e às 14h30 para os alunos dos Níveis **1** (6º e 7º anos do Ensino Fundamental II), **2** (8º e 9º anos do Ensino Fundamental II), **3** (1ª e 2ª séries do Ensino Médio) e **4** (3ª e 4ª séries do Ensino Médio e aqueles estudantes que tenham concluído Ensino Médio há menos de um ano e não tenham ingressado em nenhum curso superior, quando da realização da primeira fase da OPMat).

No período da manhã, a Cerimônia de Premiação contou com a presença das seguintes autoridades:

- Profa. Marilisa do Rocio Oliveira representando a reitoria - Pró-Reitora de Extensão e Assuntos Culturais da UEPG
- Profa. Olinda Thomé Chamma representando a Pró-Reitoria de Graduação - Presidente da Comissão Permanente das Licenciaturas e membro da comissão organizadora da OPMat.
- Profa. Sandra Mara Dias Pedroso representando o Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa
- Profa. Adriana Tostanowski Lorenzi - Coordenadora da Educação Básica do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa
- Profa. Annaly Schewtschik representando a Secretaria Municipal de Educação de Ponta Grossa
- Prof. Antonio José Camargo - Diretor Adjunto do Setor de Ciências Exatas e Naturais da UEPG
- Prof. Wanderley Aparecido Cerniauskas - Chefe Adjunto do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG
- Profa. Marli Terezinha Van Kan - Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPG
- Prof. Giuliano Gadioli La Guardia - Coordenador do Curso de Bacharelado em Matemática Aplicada da UEPG

- Prof. José Trobia - Representante do Curso de Licenciatura em Matemática UAB da UEPG

- Profa. Elisangela dos Santos Meza - Coordenadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Nessa Cerimônia foram premiados 166 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 29,67% dos alunos que participaram do Nível Júnior da 5ª OPMat): 2 alunos com troféus; 5 com medalhas de ouro; 10 com medalhas de prata; 30 com medalhas de bronze e 121 com medalhas de menção honrosa.

Também foram entregues troféus para as escolas e para os professores dos alunos que obtiveram a maior pontuação na 5ª OPMat da rede particular e da rede pública. Todos os professores cujos alunos foram premiados receberam certificados de congratulações, assim como todas as escolas participantes da 5ª OPMat.

No período da tarde, a Cerimônia de Premiação contou com a presença das seguintes autoridades:

- Prof. Luiz Alexandre Gonçalves Cunha representando a reitoria - Diretor do Setor de Ciências Exatas e Naturais.

- Sra. Iomara Favoreto representando a Pró-Reitoria de Extensão e Assuntos Culturais da UEPG

- Profa. Olinda Thomé Chamma representando a Pró-Reitoria de Graduação - Presidente da Comissão Permanente das Licenciaturas e membro da comissão organizadora da OPMat.

- Profa. Maria Izabel Vieira - Chefe do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa

- Profa. Adriana Tostanowski Lorenzi - Coordenadora da Educação Básica do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa

- Profa. Sandra Mara Dias Pedroso - Coordenadora de Matemática do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa

- Profa. Margarete Aparecida dos Santos - Chefe do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG

- Prof. Marciano Pereira - Representando o colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPG
- Profa. Fabiane de Oliveira - Vice-Coordenadora do Curso de Bacharelado em Matemática Aplicada da UEPG
- Prof. José Trobia representando o Curso de Licenciatura em Matemática UAB da UEPG
- Profa. Elisangela dos Santos Meza - Coordenadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Na ocasião foram premiados 243 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 30,72% dos alunos que participaram da segunda fase da 5ª OPMat): 8 estudantes com troféus; 21 com medalhas de ouro; 40 com medalhas de prata; 86 com medalhas de bronze e 96 com medalhas de menção honrosa.

Foram entregues troféus para as escolas e para os professores dos dois alunos que obtiveram a maior pontuação em cada nível (1, 2, 3 e 4) da 5ª OPMat, sendo um de escola particular e um de escola pública. Além disso, todos os professores cujos alunos foram premiados receberam certificados de congratulações, assim como todas as escolas participantes da 5ª OPMat.

Nível Júnior

Troféu

- Henrique Scorsin dos Santos (Colégio Sant'Ana)
- Ramon Turek de Mello (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)

Ouro

- Henrique Scorsin dos Santos (Colégio Sant'Ana)
- Letícia Schastai de Assis Sampaio (Colégio Sagrada Família)
- Ramon Turek de Mello (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)
- Vinicius Ribas Bida (Colégio Pontagrossense Sepam)

- Fernando Hideo Ohi (Colégio São Francisco)

Prata

- Ana Júlia da Silva (Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)
- Francisco Galvão Coloda (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Kurt Wagner Kloth (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Lavínia Machado Canova (Escola Desafio)
- Lucas Rocha de Oliveira (Escola Municipal Prefeito Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Samuel Morais da Silva (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Thiago Augusto Galvão Souto (Escola Municipal Guaracy Paraná Vieira)
- Murilo Maeda Kataoka (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Arthur Alves Ranzan (Colégio Sagrada Família)
- Manuella Louize Pasturczak Schade (Colégio Pontagrossense Sepam)

Bronze

- Bárbara Valentine Stepien Fontana (Colégio Marista Pio XII)
- Daniel Mendes Christofolli (Escola Desafio)
- Eduardo Moreira Só (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gabriela Krindges dos Santos (Colégio São Francisco)
- Graziely do Bonfim Antisko (Colégio Sagrada Família)
- Maria Luiza Kaiut Varesqui (Colégio Neo Master)
- Mariana Scremin (Colégio Marista Pio XII)
- Nicolas Gurski Florenzano (Colégio Neo Master)
- Isabella Moreira Quadros (Colégio Marista Pio XII)

- Maria Eduarda Onesko Slusarz (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Lucas Henrique Azevedo (Colégio Sant'Ana)
- Yasmin Castilho Ouriques (Colégio São Francisco)
- Manuela Rolim Carneiro (Colégio Marista Pio XII)
- Bernardo de Lima Oberg (Colégio Marista Pio XII)
- Felipe Kudlinski Marlier (Colégio Sagrada Família)
- João Lucas Bielik (Colégio Sagrada Família)
- João Guilherme Pivatto (Colégio Sant'Ana)
- Lucas Ribeiro Ramos (Colégio Sant'Ana)
- Rafael Chociai Pitela (Colégio Sagrada Família)
- André Nabozni (Colégio Sagrada Família)
- Luana Kopke Cruz (Colégio Sagrada Família)
- Maria Clara Amaro Cinel (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Anna Beatriz Meira Hilgenberg (Escola Rosazul)
- Ana Clara Maciel (Escola Desafio)
- Enrico Wohnrath Garcia (Escola Desafio)
- Felipe Brandes (Colégio Marista Pio XII)
- Giorgio Henrique Piana (Colégio Marista Pio XII)
- Nicolas Gomes da Silva (Colégio Sant'Ana)
- Ana Beatriz Pucci de Jesus (Colégio Sagrada Família)
- Ana Marcela Reis de Freitas (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Monike Furquim de Oliveira (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)

- Amanda Letícia Araujo Noffke (Escola Municipal Prefeito Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Letícia Perolis Missias Felix (Escola Municipal Professor Paulo Grott)
- Gabriel Guimarães (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- João Pedro da Silva Berger (Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach)
- Lukas Gabriel Coelli (Escola Municipal Fioravante Slaviero)
- Nicoly Gonçalves (Escola Municipal São Jorge)
- Gustavo Amaral Ferreira (Escola Municipal Prefeito Doutor Othon Mader)
- Stefanny Luiza Fedacz Guerreiro (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Sthefany da Rosa de Oliveira (Escola Municipal Fioravante Slaviero)
- Brayan Gabriel Biscaia (Escola Municipal Professora Maria Vitória Braga Ramos)
- Daniel Pereira de Mattos (Escola Municipal Professor Rubens Edgard Furstenberger)
- Kayke Alves de Oliveira (Escola Municipal Deputado Mário Braga Ramos)
- Pedro Henrique Magri (Escola Municipal Prefeito José Bonifacio Guimarães Vilela)
- Vitória Cristina Oliveira Santos (Escola Municipal Deputado Mário Braga Ramos)
- Maria Victoria Eising da Cruz (Escola Municipal Professor Paulo Grott)
- Carla Bianca Tilpe (Escola Municipal Professora Zair Santos Nascimento)
- Amanda Tlomatzki (Escola Municipal Prefeito Engenheiro Cyro Martins)
- Brayan Gastão Donato (Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)
- Marcos Felipe Conrado (Escola Municipal Doutor José Pinto Rosas)
- Alexandre de Souza (Escola Municipal Felício Francisquiny)
- Ana Gabriella Ribeiro (Escola Municipal Professora Maria Laura Pereira)

- Caroline Rocha da Silva (Escola Municipal Prefeito Doutor Amadeu Puppi)
- Guilherme dos Santos Barros (Escola Municipal Felício Francisquiny)
- Julia Rosa de Oliveira (Escola Municipal Prefeito Engenheiro Eurico Batista Rosas)
- Pedro Augusto Oliveira (Escola Municipal Professor Jorge Dechandt)
- Vinícius Andreiko (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Aléxia Aleixo (Escola Municipal Prefeito Theodoro Batista Rosas)
- Bruno Franke Reis (Escola Municipal Professora Maria Laura Pereira)
- Érica Machado da Rosa (Escola Municipal Professor Kamal Tebcherani)
- Flávia Gomes Ribeiro dos Santos (Escola Municipal Prefeito Theodoro Batista Rosas)
- Gabriel Alexandre Teska (Escola Municipal Prefeito Doutor Fulton Vitel Borges de Macedo)
- Igor Vinicius Scheibel (Escola Municipal Prefeito José Hoffmann)
- Leonardo de Medeiros (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)

Menção Honrosa

- Lorran Padilha dos Santos (Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)
- Mariane Lourenco da Silva (Escola Municipal Professora Haydêe Ferreira de Oliveira)
- Rayana Caroline Gonçalves de Oliveira (Escola Municipal Prefeito Doutor Amadeu Puppi)
- Yuan Fabrizio Beraldo de Lima (Escola Municipal Senador Flávio Carvalho Guimarães)
- Amanda Rataieski Soares (Escola Municipal São Jorge)

- Alan Gabriel Teodoro (Escola Municipal Prefeito Doutor Fulton Vitel Borges de Macedo)
- João Paulo Fernandes Custodio Dias (Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Josemara Kauane Fernandes (Escola Municipal Doutor Edgar Sponholz)
- Kamily Messias Biagini (Escola Municipal Professora Haydêe Ferreira de Oliveira)
- Luana Camargo da Silva (Escola Municipal Professora Marta Filipkowski de Lima)
- Nicolly Aparecida Baldykoski Ferreira (Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel)
- Tiago Malanczen (Escola Municipal Professora Haydêe Ferreira de Oliveira)
- Emilly Karoline dos Santos (Escola Municipal Professora Marta Filipkowski de Lima)
- Murilo Borato (Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Schnirmann)
- Rayla Gabriela Rezende Lopes (Escola Municipal Professora Maria Coutin Riesemberg)
- Suellen Cristina dos Santos (Escola Municipal Professor Prefeito Heitor Ditzel)
- Carlos Henrique Arving (Escola Municipal Prefeito Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Manuela Gomes Gasperin (Escola Municipal Professora Ecléa dos Passos Horn)
- Matheus Souza Santos (Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel)
- Pedro Verissimo Ramalho (Colégio Marista Pio XII)
- Anny Lavinia Candida Pereira de Vicente (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Bianca Ribaski da Silva (Escola Municipal Professora Idália Góes)

- Bruno Nahorny Filisbino (Escola Municipal Deputado Mário Braga Ramos)
- Davi Schoab Giebeluka (Escola Municipal Doutor José Pinto Rosas)
- Gabrielly Maier de Paula (Escola Municipal Professora Idália Góes)
- Giovana Wendling (Colégio Sant'Ana)
- Hayllana Schechtel Ribas (Escola São Jorge de Ponta Grossa)
- Helloisa Maceno Mendes (Escola Municipal Professor Egdar Zanoni)
- João Pedro Almeida Souza (Escola Desafio)
- Leticia da Cruz Valim (Escola Municipal Pascoalino Provisiero)
- Leticia de Ramos Caetano (Escola Municipal Professora Ana de Barros Holzmann)
- Leticia Hadassa Miguel (Escola Municipal Prefeito Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Lucas Eduardo Oliveira Santos (Colégio Marista Pio XII)
- Luidgi Vinicius de Almeida Bueno (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Maria Izabel Pereira Holm (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Moises Souza Rocha (Escola Municipal Felício Francisquiny)
- Murillo Kossobuski (Escola Municipal Prefeito José Hoffmann)
- Paola Juliana de Almeida (Escola Municipal Professora Maria Antônia de Andrade)
- Pedro Henrique de Carvalho Ribeiro (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- Pedro Henrique Weber da Silva (Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel)
- Pedro Oliveira Valentim (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)

- Ricardo Augusto dos Santos Hass (Escola Municipal Catarina Miró)
- Sabrina Joli Diuba (Escola Municipal Deputado Djalma de Almeida Cesar)
- Tamires de Moura (Escola Municipal Prefeito Engenheiro Cyro Martins)
- Aline Luiza Santana (Escola Municipal Deputado Djalma de Almeida Cesar)
- Amanda Cristina Ruppel (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Amanda Danyella Coelho dos Santos (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Amandha Senger Maluf (Escola Municipal Professor Plácido Cardon)
- Ana Carolina Fernandes (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Ana Julia Nalevaiko Marques do Amaral (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Beatriz Czerevaty de Andrade (Escola Municipal Deputado Djalma de Almeida Cesar)
- Bruna Lombardi (Colégio Sagrada Família)
- Douglas Henrique Cardoso dos Santos (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Eduarda Aragão da Silva (Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach)
- Eduardo Dimbarre Ingles (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Fernanda Hoffmann de Souza (Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Schnirmann)
- Gabriela Oliveira (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Hevellyn de Souza (Escola Municipal Professora Haydêe Ferreira de Oliveira)
- Isabelli Maria de Lima Santos (Escola Municipal São Jorge)
- Isadora Afonso Lamim (Escola Municipal Professora Haydêe Ferreira de Oliveira)

- João Henrique Perez Teixeira (Colégio Neo Master)
- Kauan de Abreu (Escola Municipal Doutor Raul Pinheiro Machado)
- Lais Eduarda Giovanetti (Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel)
- Leticia Machado Moreira (Escola Municipal Doutor Edgar Sponholz)
- Lorena Eduarda da Silva (Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)
- Luana Aqsenen (Escola Rosazul)
- Luana de Aquino Sieiro Lima (Escola Municipal Doutor Raul Pinheiro Machado)
- Luis Henrique dos Santos Ribeiro (Escola Municipal Professora Haydêe Ferreira de Oliveira)
- Luis Henrique Schimidt Rodrigues (Escola Municipal Professora Maria Antônia de Andrade)
- Luiza Ruh Kirelo (Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach)
- Marcos Saymon Santos Pereira (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- Maria Clara Plem (Colégio Marista Pio XII)
- Maria Eduarda Schechtel (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Maria Julia Maia (Escola Municipal Prefeito Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Mariane Douvey Ribeiro (Escola Municipal Professora Minervina França Scudlareck)
- Mateus Enrique Morais (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Mateus Ramos (Colégio Sagrada Família)
- Pedro Augusto Sant'Anna (Colégio Neo Master)
- Rafaela Felix da Silva (Colégio Integração)
- Rafaela Rothstein Gomes Madureira (Colégio Pontagrossense Sepam)

- Sandro Gabriel dias Valões (Escola Municipal Professora Dércia do Carmo Noviski)
- Thiago Borges Crema (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)

Nível 1

Troféu

- Luiz Henrique Bahls (Colégio Integração)
- Luká Ariel Ciunek dos Santos (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)

Ouro

- Luiz Henrique Bahls (Colégio Integração)
- Beatriz Sousa Maestri (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Luká Ariel Ciunek dos Santos (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Rubens Antonio Amaro Neto (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Gabriel Felipe Shigio (Colégio Sagrada Família)

Prata

- Allan Roberto Lugo (Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell Du Vernay)
- Rafaela Cordeiro Kunau (Colégio Sagrada Família)
- Vinícius Scremin (Colégio Marista Pio XII)
- Felipe Mandalozzo Tebcherani (Colégio Neo Master)
- Rafael Boldt Rodrigues de Souza (Escola Bom Pastor)
- Alicia Noronha (Colégio Neo Master)
- Gabriela Antoniacomi (Colégio Neo Master)
- Rafaelly Aparecida Schafranski da Silva (Escola Estadual Medalha Milagrosa)

- Pedro Vinicius Almeida Gonçalves (Colégio Sagrada Família)
- Arthur Junichiro Gaspar Sato (Colégio Sant'Ana)

Bronze

- Alice Sangalli Saito (Colégio Neo Master)
- Gabrielli Jaques (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Guilherme Cruz Skoretzky (Colégio Neo Master)
- Beatriz Stadler Ribas (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Renan Gelinski Santos (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Thomas Lankszner Bach (Colégio Marista Pio XII)
- Adriana Pereira de Souza e Silva (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Eduardo Pazini Sari (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Maria Eduarda Vosgerau Ferreira Ribas (Colégio Neo Master)
- Mariana Cosseti Correia (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Vitor Brandelero (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Enzo Serenato (Colégio Marista Pio XII)
- Heloisa Stadler Ribas (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Alvaro Ivansk Sabedotti (Colégio Neo Master)
- Ana Beatriz Rentschler (Escola Bom Pastor)
- Arielton Bruno Barbosa Teixeira (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Anthony Matheus Fornazzari Martins (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Leonardo Pereira Lemes (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Bruna Gabriely Chila (Escola Estadual Espírito Santo)

- Eduardo Gonchoreki (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- João Gabriel Silva Gomes (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- Maria Eduarda Hartmann Malinoscky (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Pedro Henrique Camargo dos Santos (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Camilly Monteiro (Colégio Estadual Sirley Jagas)
- Hevellyn Alves de Godoy Bueno (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Willian Strauski (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Isis Carolina Ditzel (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Edison Luiz Ferreira Júnior (Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell Du Vernay)
- Laiane Vitória Pedrozo de Mello (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Bianca Borges dos Santos (Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell Du Vernay)

Menção Honrosa

- Ruan Correa Szcymcszyn (Colégio Sagrada Família)
- Lucas da Silva Souza (Colégio Marista Pio XII)
- Pedro Henrique Cieslak (Colégio Sagrada Família)
- Julia Albach (Colégio Sant'Ana)
- Ian Amatnecks Mainginski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Sofia Silveira Debtil (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Gabriela Vicente Dalssoto (Colégio São Francisco)
- Laura Malucelli Straiotto (Colégio Neo Master)
- Arthur Gregorio Ferreira (Colégio Sagrada Família)

- Victor Ian dos Reis (Colégio Marista Santa Mônica)
- Denis Rauch (Colégio Integração)
- Henrique Franzini Ozorio (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Rafael Barbosa Vaz (Escola Desafio)
- Raissa Werner Bernardes (Colégio Sant'Ana)
- Rodrigo Catto Menin (Escola Desafio)
- Roger Arima Dechandt (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Elisa Ribeiro dos Santos (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Enzo Lizardo Mathias (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gabriela Wurm (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Sofia Nascimento Czelusniak (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Yasmin Coutinho de Lima (Colégio Sagrada Família)
- Ana Julia Pereira de Souza e Silva (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Giulia Araujo de Barros (Colégio Marista Pio XII)
- Igor Wesselovicz (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Leonardo Ferreira Kopeski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Paula Aparecida de Lima (Colégio Sagrada Família)
- Danilo Veide (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Kauanne Davila Souza Santos (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Lorenzo Bazeggio Licodiedoff (Colégio Marista Pio XII)
- Anthony Emmanuel Ferreira dos Santos (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Anthony Panaggio (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)

- Aurora Tavares Schiavon (Escola Bom Pastor)
- Leonardo Hisao Herai Borges (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Nathalia Abreu (Colégio Neo Master)
- Nicoli Saldanha Ricardo (Colégio Integração)
- Silvia Hellen Correia Oliveira (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Alexsandro Luan Bryk (Colégio Estadual Sirley Jagas)
- Amanda Aparecida Grden (Colégio Estadual 31 de Março)
- Barbara Hoffmam Wosiak (Colégio Sant'Ana)
- Edinaldo Gonçalves dos Santos (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Leonardo Gabriel Mussin Krepel (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Vinicius Daniel Geremias (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Yan Jardim Leal (Escola Estadual Medalha Milagrosa)

Nível 2

Troféu

- Lucas Perondi Kist (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Leonardo Ferreira (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)

Ouro

- Lucas Perondi Kist (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Danilo Beltrame (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Augusto Philippus Lack (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Leonardo Ferreira (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)

- Renato Mandalozzo Tebcherani (Colégio Neo Master)

Prata

- Renata Nadal Baier (Colégio Marista Pio XII)
- André Marcos Leifold Raicoski (Colégio Neo Master)
- Bárbara de Rezende Attab (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Henrique Thiago da Silva (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Heric Bruno Fontana (Colégio Marista Pio XII)
- Gabriela Brasil Silva (Colégio Marista Pio XII)
- Giovana Kuan (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Luiz Gabriel de Andrade (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Eduardo Avelino da Silva (Colégio Marista Pio XII)
- Letícia Kosteski da Silva (Colégio Estadual Santa Maria)

Bronze

- Gabriel França Ferreira (Colégio Marista Pio XII)
- Thaís Armstrong de Souza (Colégio Integração)
- André Luiz Alves Junior (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Moreno Yves Martins dos Santos (Colégio São Francisco)
- Natália Sanches (Colégio Sagrada Família)
- Gustavo Henrique Teixeira Wiechaz (Colégio Integração)
- Hemily da Rocha Wenglarek (Escola Bom Pastor)
- Ingrid Horst da Silva (Colégio Sagrada Família)
- Karyn Maria Wenglarek (Colégio Neo Master)

- Marcelo Krindges dos Santos (Colégio São Francisco)
- Anna Luisa Thiem (Colégio Marista Pio XII)
- Júlia de Oliveira Andrade (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Marco Aurélio da Rocha (Colégio Neo Master)
- Guilherme Bueno Santos Carmo (Escola Bom Pastor)
- Gustavo Gelinski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Geovanna Ferraz Costa Siqueira (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Yan Guilherme Paim (Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell Du Vernay)
- Ana Julia Baleeiro de Paiva (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Tamires de Fátima Soares (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Ariel Scheifer Pereira dos Santos (Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell Du Vernay)
- Moroni Mendes Cavalheiros dos Santos (Colégio Estadual Santa Maria)
- Nicolas Michel de Oliveira Araujo (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Gabriel Augusto do Nascimento (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Ronaldo Pedroso Vicente Junior (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Daiana Gomes de Oliveira (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Guilherme Augusto da Rocha (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Igor Raul de Lara Santos (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- Sabrina Alves de Lara (Colégio Estadual Ana Divanir Boratto)
- Antônio Henrique Vicente (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Thiago Portella (Escola Estadual Medalha Milagrosa)

Menção Honrosa

- Matheus Luiz Bach (Escola Bom Pastor)
- Rafaela Lima Cabral (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Danilo Gonçalves Santos (Colégio Integração)
- Andre Gustavo Kichileski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Gabriel Hito dos Santos (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Giulliana Pinheiro (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Hillary Kanclarovicz Lopes (Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Luiz Felipe Krzesinski Jaretz (Escola Bom Pastor)
- Adnei Gabriel Marins Knupp (Colégio Integração)
- Gabriela Madureira Grochowicz (Colégio Marista Pio XII)
- Gustavo Henrique Padilha Bomfim (Colégio Sagrada Família)
- Luan Hernandes Batista (Colégio Sagrada Família)
- Thomas Schelesky Mehret (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Lucas Amadeu Avila (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Pedro Ramos Pereira (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Tais Sousa Maestri (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Barbara Zappe Rupel (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Daniel Campos Costa (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Daniel Vitor dos Santos (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Hemily Kanclarovicz Lopes (Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Matheus Von Jelita Salina (Colégio Neo Master)
- Rafael Prado Meira (Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)

- Vitor Rafael Linhares de Macedo (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Ana Flavia Lacerda (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Andre Luis Amancio (Colégio Sant'Ana)
- Thiago Martins Figueiredo (Colégio Neo Master)
- Victor Ferrarezi (Colégio Sagrada Família)
- Alex Bidas (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Bruno Antunes (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Camila Eduarda Scheifer (Colégio Sagrada Família)
- Eduardo Matheus Ribas (Colégio Sagrada Família)
- Fernanda de Paula Mazur (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Kathleen Alana Guerling de Oliveira (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Marcio Grabas (Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)
- Nicolas Michael da Silva (Instituto Estadual de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Pedro Henrique Brandão Pereira (Escola Desafio)
- Victor Luiz Kedrovski (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Wesley Kulecza (Colégio Elite Tales de Mileto)
- João Gabriel Ales dos Santos (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Cesar Jeremias dos Santos Junior (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Maria Eduarda Gonçalves Reis (Colégio Sagrada Família)
- Andre Luiz Rodrigues (Colégio Sagrado Coração de Jesus)

Nível 3

Troféu

- Cassiano José Kounaris Fuziki (Colégio Marista Pio XII)
- Daniel Silveira Salamucha (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)

Ouro

- Cassiano José Kounaris Fuziki (Colégio Marista Pio XII)
- Gabriel Henrique Kwiatkovski Godinho (Colégio Neo Master)
- João Pedro Wardani de Castro (Colégio Sagrada Família)
- Lorenzo Coelho de Andrade Villela de Biassio (Colégio Neo Master)
- Rafael Antonio Chinelatto (Colégio Marista Pio XII)
- Daniel Silveira Salamucha (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)

Prata

- Mayara Beltrame (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Jordi Pujol Ricarte (Colégio Marista Pio XII)
- Maria Eliana Penteado (Colégio Neo Master)
- Daniel Costa Delatre (Colégio Neo Master)
- Robson da Silveira (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Ana Luisa Yoshie Ogatta Yadomi (Colégio Integral Plus)
- Mateus Gonçalves Prado Balado (Colégio Sant'Ana)
- Norton Tessaroli Dezonet (Colégio Neo Master)
- Elaine Cristina Margraf Martins (Colégio Sant'Ana)
- Rafael Adriano Ferreira Elesbão (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)

Bronze

- Ana Paula Gomes (Colégio Sant'Ana)
- João Pedro Cavalli Neto (Colégio Sagrada Família)
- Renata Cury Caruso (Colégio Sant'Ana)
- Thiago Takaji Tsutsui (Colégio Sagrada Família)
- Larissa Carvalho Silva (Colégio Sagrada Família)
- Otávio Winnik Carvalho de Gouveia (Colégio Sagrada Família)
- Gabriel de Oliveira (Colégio Neo Master)
- Pedro Victor Pereira (Colégio Integração)
- Davi Moreira dos Santos Junior (Colégio São Francisco)
- Letícia Aparecida Nunes de Siqueira (Colégio São Francisco)
- Alan Vinícius Borato (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Gabriel Machado (Colégio Integral Plus)
- Kalyane Alinne Gasparetto (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Leonardo Viatrowski (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Pedro Eduardo Redivo (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Yan Eneias Ferreira (Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres)
- Rafael Strack (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Jhon Victor Messias Rosa (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Elizane Verônica Pereira dos Santos (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Matheus Filip de Oliveira (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)

- Ana Carolina Dorado Gaertner (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Andrey Gabriel dos Santos Bettes (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Karenn Unrein dos Santos (Instituto Estadual de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Mariane Aparecida Gadowski (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)

Menção Honrosa

- Guilherme Sviech (Colégio Sagrada Família)
- Isis Fernandes do Carmo (Colégio Neo Master)
- João Gabriel de Souza (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Alice Cristina Chimim (Colégio Marista Santa Mônica)
- Isabela Ramos Nogueira (Colégio Neo Master)
- Letícia Oliveira Almanso (Colégio Sagrada Família)
- Gustavo Ribeiro dos Santos (Colégio Marista Pio XII)
- Matheus Israel (Colégio Estadual Santa Maria)
- Clara Da Bin In (Colégio Sagrada Família)
- Samantha Banik (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Tayná Prestes Jacinto (Colégio Sagrada Família)

Nível 4

Troféu

- Murilo Henrique de Souza Chociai (Colégio Integral Plus)
- Rafaela Penteado Gomes (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)

Ouro

- Murilo Henrique de Souza Chociai (Colégio Integral Plus)
- Tiago Daniel Gueiber (Colégio Marista Pio XII)
- Camila Cury Caruso (Colégio Sant'Ana)
- José Pedro Huk Distéfano Grácia (Colégio Sagrada Família)
- Larissa Almeida Busnello (Colégio Pontagrossense Sepam)

Prata

- Rafaela Penteado Gomes (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Júlia Matoso Martins (Colégio Sagrada Família)
- Vitória Scheffel Dias (Colégio Sant'Ana)
- Lauro Marques Tramontin (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Bruno de Souza Lacerda (Colégio Marista Pio XII)
- Guilherme Betenheuser Barbosa (Colégio Sagrada Família)
- Ana Carolina Mello Fontoura de Souza (Colégio Sagrada Família)
- Pietra Maria Lazzaron Toscan (Colégio Sagrada Família)
- Daniel de Oliveira Mesquita (Colégio Sagrada Família)
- Larissa Ferreira Bach (Colégio Integração)

Bronze

- Bruno Bittencourt Teixeira (Colégio Sagrada Família)
- Rodrigo Modesto Rodrigues (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)

Professores Premiados

Abaixo consta a relação de todos os professores que receberam troféus nos respectivos níveis:

Nível Júnior - Troféu:

- Professora Idilceia Aparecida Hilgemberg Löderer (Colégio Sant'Ana)
- Professora Eva Turek Staichak (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)

Nível 1 - Troféu:

- Professora Juliana Fátima Holm Brim (Colégio Integração)
- Professora Marli Ribeiro Maia Slompo (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)

Nível 2 - Troféu:

- Professor Alisson Lima Emiliano (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Professor Rodrigo França Pleis (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)

Nível 3 - Troféu:

- Professor Tiago Vieira (Colégio Marista Pio XII)
- Professora Alzenir Virgínia Ferreira Soistak (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)

Nível 4 - Troféu:

- Professor Fabiano Batista Ribeiro (Colégio Integral Plus)
- Professora Alzenir Virgínia Ferreira Soistak (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)

A seguir consta a relação de todos os professores que tiveram alunos participantes da 5ª OPMat no ano de 2017:

- Marcos Sant'Anna Modrow (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Alzenir Virgínia Ferreira Soistak (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Ingrid da Silva Milléo (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Alisson Lima Emiliano (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Maria José Cação Ribeiro (Colégio Estadual 31 de Março)
- Suzana Rozas (Colégio Estadual Ana Divanir Boratto)
- Nazilda Antonia Chiaramonte (Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas)
- Iolanda Gebeluka Mauda de França (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Luciano Roque Leite (Colégio Estadual General Antônio Sampaio)
- Eva Aparecida Carvalho e Silva (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Maristel do Nascimento (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Paulo Roberto Batista (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Roseli Niedjevski Dambrovisk (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Juliano Swiech Ciesielski (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Karina Rocha (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Rodrigo França Pleis (Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças)
- Wilson José Machado Gomes (Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)
- Amélia Eponina da Luz Ruivo (Colégio Estadual Professor João Von Borell Du Vernay)
- Cibely Maw (Colégio Estadual Professor João Von Borell Du Vernay)
- Geane Dias de Moura Jorge (Colégio Estadual Professor João Von Borell Du Vernay)

- Genice Bratt (Colégio Estadual Professor João Von Borell Du Vernay)
- Glaci Bettes (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Maria Ester Senger Schwab (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Marli Ribeiro Maia Slompo (Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico)
- Marcio José Simões (Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres)
- Andreia Daniele Urba (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Antonio Henrique Feld (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Eliane Hartmann dos Santos (Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá)
- Daniele Regina Penteado (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Juliano Swiech Ciesielski (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Sandra Mara Cogo (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Ronival José Tonon (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Eliane Túlio Xavier (Colégio Estadual Santa Maria)
- Igor Alberto Dantas Abrami (Colégio Estadual Santa Maria)
- Renato Pereira e Silva (Colégio Estadual Santa Maria)
- Elaine de Fátima Fávaro (Colégio Estadual Sirley Jagas)
- Rafael Fernandes de Lara Cordeiro (Colégio Estadual Sirley Jagas)
- Juliana Fátima Holm Brim (Colégio Integração)
- Lucas Gicorski (Colégio Integração)
- Fabiano Batista Ribeiro (Colégio Integral Plus)
- Peterson Herman (Colégio Integral Plus)
- Ana Cristina Delinski Stiirmer (Colégio Marista Pio XII)

- Geane Dias de Moura Jorge (Colégio Marista Pio XII)
- Lucia Yukie Shimasaki (Colégio Marista Pio XII)
- Patricia Maria Zaremba de Oliveira (Colégio Marista Pio XII)
- Roseli Alexandre Martins (Colégio Marista Pio XII)
- Tiago Vieira (Colégio Marista Pio XII)
- Marselha Aparecida Wiecheteck (Colégio Marista Santa Mônica)
- Rafael Bruno Ligeski (Colégio Marista Santa Mônica)
- Benifrancis Teresinha Judice Matias (Colégio Neo Master)
- Fabrício Gonçalves dos Santos (Colégio Neo Master)
- Mariana Andrade de Oliveira Vieira (Colégio Neo Master)
- Simone Daiane Pisnisk (Colégio Neo Master)
- Cristine Cavagnari Gambassi (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Daniela Aparecida Fabricio (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Emilia Morgado (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Fernanda Fetzer (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Francine Mayara Gomes (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Kelen Cristina dos Santos Abrami (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Sheila Bueno de Oliveira (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Sheila Regina Bagatelli Bozz (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Alessandro Rodrigues de Souza (Colégio Sagrada Família)
- Bruna Elizabeth Adamowicz da Luz (Colégio Sagrada Família)
- Elyzandra Maia Cano Perreto (Colégio Sagrada Família)
- Fábio Augusto Souto Rosa (Colégio Sagrada Família)

- Gisele do Rocio Soares Pacheco (Colégio Sagrada Família)
- Herica Cristina Alves Galante Messias (Colégio Sagrada Família)
- Maria Regina Urban (Colégio Sagrada Família)
- Marina Marra (Colégio Sagrada Família)
- Rita Nerli Antoneli Carvalho (Colégio Sagrada Família)
- Rosilda Aparecida Chociai Scremin (Colégio Sagrada Família)
- Suzane Machado Daer Costa (Colégio Sagrada Família)
- Ana Claudia Adriano de Alvarenga (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Mariana Andrade de Oliveira Vieira (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Vera do Rocio Vanat Prestes (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Willian Thomas Rocha (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Claudia Danielle de França Otoni (Colégio Sant'Ana)
- Daniel Carlos Beusso (Colégio Sant'Ana)
- Idilceia Aparecida Hilgemberg Löderer (Colégio Sant'Ana)
- Paulo Fernando Zaratini de Oliveira e Silva (Colégio Sant'Ana)
- Rubens Edgar Fustenberger Filho (Colégio Sant'Ana)
- Carla Carraro (Colégio São Francisco)
- Luan Elias do Nascimento (Colégio São Francisco)
- Bianca Aparecida Holm de Oliveira (Escola Bom Pastor)
- Michelle Hilbert Dipp de Oliveira (Escola Desafio)
- Paulo Henrique Carvalho (Escola Desafio)
- Silvana Zimmermann Maia (Escola Estadual Espírito Santo)
- Sheila Regina Bagatelli Bozz (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)

- Valquiria Glinski (Escola Estadual Halia Terezinha Gruba)
- Adriane de Castro (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Amélia Aparecida Moro (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Débora de Lima Moscardi dos Santos (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Arilei Rodrigues Albach (Escola Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Leoni Cochinski Margraf (Escola Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Andressa Niele Garcia (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Elisabete Feld Costa (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Jeanine Alves de Oliveira (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Karla Adriane Boamorte (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Simone de Fátima Soltes (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Edna Aparecida Fagundes Consul (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Fernando Carneiro da Silva (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Líbia Andréia Cosati (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Wladimir Bosca (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Eliane Aparecida de Araujo Costa (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Nilceia do Rocio Suzhlc Ferreira (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Marciane Sucena Barbosa (Escola Municipal Catarina Miró)
- Elimar Cristina Ferreira sa Silva (Escola Municipal Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Tatiana Paula Mazurok Schactal (Escola Municipal Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Ana Maria Santos (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)

- Elaine Bendix (Escola Municipal Deputado Djalma de Almeida Cesar)
- Noeli Meira Lopes (Escola Municipal Deputado Mário Braga Ramos)
- Rosir Aparecida Gonçalves de Jesuz (Escola Municipal Deputado Mário Braga Ramos)
- Eva Marinice de Miranda (Escola Municipal Doutor Edgar Sponholz)
- Marli Terezinha Kviatkowski dos Santos (Escola Municipal Doutor José Pinto Rosas)
- Dione Ines do Nascimento (Escola Municipal Doutor Raul Pinheiro Machado)
- Silvana Hertel (Escola Municipal Doutor Raul Pinheiro Machado)
- Celia Piekarski (Escola Municipal Felício Francisquiny)
- Elaine Cristine Maciel (Escola Municipal Fioravante Slaviero)
- Syonara Teixeira (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Vanessa Castro (Escola Municipal General Aldo Bonde)
- Munira de Oliveira (Escola Municipal Guaracy Paraná Vieira)
- Denise do Rocio Mezzadri Lopes (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Rosilani Aires de Araújo (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Carolina Isabella da Silva Ribeiro (Escola Municipal Pascoalino Provisiero)
- Katia Maria Kobata Debona (Escola Municipal Prefeito Doutor Amadeu Puppi)
- Marcia Andreia Favaro (Escola Municipal Prefeito Doutor Fulton Vitel Borges de Macedo)
- Célia Scheifer (Escola Municipal Prefeito Doutor Othon Mader)
- Josiane Cristina Favaro de Matos (Escola Municipal Prefeito Engenheiro Cyro Martins)
- Wilmary Aparecida Dias de Meira (Escola Municipal Prefeito Engenheiro Eurico Batista Rosas)

- Iara Cristina Mendes Faria Costa (Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)
- Roseli Przybycien (Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)
- Lucimara Aparecida Moleta Grokoviski (Escola Municipal Prefeito Heitor Ditzel)
- Gilmara Baldykowski (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Luzia de Moraes (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Flavia Cirila do Rosário (Escola Municipal Prefeito José Hoffmann)
- Roseli Maria de Camargo Viveiros (Escola Municipal Prefeito Theodoro Batista Rosas)
- Ester Cirineo de Souza (Escola Municipal Prefeito Theodoro Batista Rosas)
- Keli Cristiane Jagas Lourenço dos Santos (Escola Municipal Professor Jorge Dechandt)
- Helena Rutte Ramos dos Santos (Escola Municipal Professor Kamal Tebcherani)
- Elaine Dalzotto Ostrufka (Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel)
- Janaina Martins Melo Espíndula (Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel)
- Silvana Aparecida de Oliveira Pasa (Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel)
- Miriam Abrão (Escola Municipal Professor Paulo Grott)
- Adriana Aparecida Ferreira (Escola Municipal Professor Plácido Cardon)
- Rosimari do Rocio Gonçalvez Reda (Escola Municipal Professor Rubens Edgard Furstenberger)
- Eva Turek Staichak (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)
- Patrícia Maria Zaremba de Oliveira (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)

- Marilúci Uczak (Escola Municipal Professora Ana de Barros Holzmann)
- Daniele Aparecida Mendes dos Santos (Escola Municipal Professora Dércia do Carmo Noviski)
- Adrieli Josiane Machado da Silva (Escola Municipal Professora Ecléa dos Passos Horn)
- Adriana Priscila dos Santos (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Sirlene Terezinha Ávila Antunes (Escola Municipal Professora Guitil Federmann)
- Mirely Christina Dimbarre (Escola Municipal Professora Haydêe Ferreira de Oliveira)
- Solange Evan Maria Malanczen (Escola Municipal Professora Haydêe Ferreira de Oliveira)
- Daiane Antunes de Ávila Fitzhum (Escola Municipal Professora Idália Góes)
- Heloísa Roseni Jorge Correia (Escola Municipal Professora Maria Antônia de Andrade)
- Lessandra Milena Eidam (Escola Municipal Professora Maria Antônia de Andrade)
- Gislaine Solareviszki (Escola Municipal Professora Maria Coutin Riesemberg)
- Alessandra Braga Krachinski (Escola Municipal Professora Maria Laura Pereira)
- Marcia Maria Elbel (Escola Municipal Professora Maria Vitória Braga Ramos)
- Aline da Silva Ferreira (Escola Municipal Professora Marta Filipkowski de Lima)
- Juliane de Oliveira Ferreira (Escola Municipal Professora Marta Filipkowski de Lima)
- Karine Pontes Barbosa (Escola Municipal Professora Minervina França Scudlareck)
- Sonia Maria Scheibel de Lucena (Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira)

- Emilli Moreira Diogo (Escola Municipal Professora Zair Santos Nascimento)
- Maria Marilize Soistak (Escola Municipal Professora Zair Santos Nascimento)
- Liliane Oliveira Krik (Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Schnirmann)
- Clarice Subtil (Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach)
- Regiane Cristiane Pedrozo (Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach)
- Irlanda Puchta Brasil de Oliveira (Escola Municipal São Jorge)
- Marici Moraes Schroeder (Escola Municipal São Jorge)
- Marisol Ribeiro de Souza (Escola Municipal Senador Flávio Carvalho Guimarães)
- Gisele Fátima Ott Ranzani (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Sônia Aparecida Lopes Gonçalvez (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Luciana Estefanczak (Escola Municipal Zanoni Rogoski)
- Patrícia Bandeira (Escola Rosazul)
- Lana de Cássia Ferreira (Escola São Jorge de Ponta Grossa)
- Ana Cristina Schirlo (Instituto Estadual de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Eliana Guimarães Szumski (Instituto Estadual de Educação Professor César Pietro Martinez)
- Selimival Ferreira Mocroski (Instituto Estadual de Educação Professor César Pietro Martinez)

Escolas Participantes

Abaixo consta a relação de todas as escolas participantes da 5^a OPMat no ano de 2017:

Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa
Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas
Colégio Elite Tales de Mileto
Colégio Estadual 31 de Março
Colégio Estadual Ana Divanir Boratto
Colégio Estadual Doutor Epaminondas Novaes Ribas
Colégio Estadual General Antônio Sampaio
Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória
Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças
Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki
Colégio Estadual Professor João Von Borell Du Vernay
Colégio Estadual Professor Júlio Teodorico
Colégio Estadual Professor Meneleu Almeida Torres
Colégio Estadual Professora Elzira Correia de Sá
Colégio Estadual Regente Feijó
Colégio Estadual Santa Maria
Colégio Estadual Sirley Jagas
Colégio Integração
Colégio Integral Plus
Colégio Marista Pio XII
Colégio Marista Santa Mônica
Colégio Neo Master
Colégio Pontagrossense Sepam
Colégio Sagrada Família
Colégio Sagrado Coração de Jesus
Colégio Sant'Ana
Colégio São Francisco
Escola Bom Pastor
Escola Desafio
Escola Estadual Espírito Santo
Escola Estadual Halia Terezinha Gruba
Escola Estadual Jesus Divino Operário
Escola Estadual Maestro Bento Mossurunga

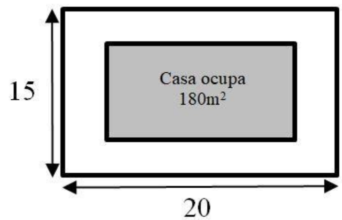
Escola Estadual Medalha Milagrosa
Escola Estadual Monteiro Lobato
Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato
Escola Municipal Catarina Miró
Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci
Escola Municipal Deputado Djalma de Almeida Cesar
Escola Municipal Deputado Mário Braga Ramos
Escola Municipal Doutor Edgar Sponholz
Escola Municipal Doutor José Pinto Rosas
Escola Municipal Doutor Raul Pinheiro Machado
Escola Municipal Felício Francisquiny
Escola Municipal Fioravante Slaviero
Escola Municipal Frei Elias Zulian
Escola Municipal General Aldo Bonde
Escola Municipal Guaracy Paraná Vieira
Escola Municipal Humberto Cordeiro
Escola Municipal Ludovico Antonio Egg
Escola Municipal Pascoalino Provisiero
Escola Municipal Prefeito Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães
Escola Municipal Prefeito Doutor Amadeu Puppi
Escola Municipal Prefeito Doutor Fulton Vitel Borges de Macedo
Escola Municipal Prefeito Doutor Othon Mader
Escola Municipal Prefeito Engenheiro Cyro Martins
Escola Municipal Prefeito Engenheiro Eurico Batista Rosas
Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela
Escola Municipal Prefeito Heitor Ditzel
Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vilela
Escola Municipal Prefeito José Hoffmann
Escola Municipal Prefeito Theodoro Batista Rosas
Escola Municipal Professor Jorge Dechandt
Escola Municipal Professor Kamal Tebcherani
Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel
Escola Municipal Professor Paulo Grott
Escola Municipal Professor Plácido Cardon
Escola Municipal Professor Rubens Edgard Furstenberger
Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma
Escola Municipal Professora Ana de Barros Holzmann

Escola Municipal Professora Dércia do Carmo Noviski
Escola Municipal Professora Ecléa dos Passos Horn
Escola Municipal Professora Guitil Federmann
Escola Municipal Professora Haydêe Ferreira de Oliveira
Escola Municipal Professora Idália Góes
Escola Municipal Professora Maria Antônia de Andrade
Escola Municipal Professora Maria Coutin Riesemberg
Escola Municipal Professora Maria Laura Pereira
Escola Municipal Professora Maria Vitória Braga Ramos
Escola Municipal Professora Marta Filipkowski de Lima
Escola Municipal Professora Minervina França Scudlareck
Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira
Escola Municipal Professora Zair Santos Nascimento
Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Schnirmann
Escola Municipal Professora Zilá Bernadete Bach
Escola Municipal São Jorge
Escola Municipal Senador Flávio Carvalho Guimarães
Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins
Escola Municipal Zanoni Rogoski
Escola Rosazul
Escola São Jorge de Ponta Grossa
Instituto Estadual de Educação Professor César Pietro Martinez

5ª OPMat - Nível Júnior

Questões Objetivas

Problema 1. Em um terreno medindo 15 m × 20 m será construída uma casa com uma área total de 180 m^2. Qual a área do terreno que não será ocupada pela construção?



a) 100 m^2 b) 120 m^2 c) 140 m^2 d) 160 m^2 e) 180 m^2

Problema 2. Recebi metade de uma barra de chocolate de minha mãe, e da minha parte dei metade para minha prima Ana (sem ter comido nada ainda). Qual a fração (que parte) da barra de chocolate representa o que Ana recebeu?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{2}{3}$

Problema 3. Bianca estava brincando com a calculadora. Ela tinha que multiplicar um certo número por 4, e em vez disso ela dividiu esse número por 4 e obteve 6 como resultado. Qual resultado ela teria obtido na operação correta?

a) 24 b) 48 c) 72 d) 96 e) 112

Problema 4. Analisando as figuras dadas abaixo, qual a afirmação falsa?

a) O quadrado tem quatro lados de medidas iguais e quatro ângulos retos.

b) O trapézio tem apenas um par de lados paralelos.

c) O triângulo retângulo tem um ângulo reto.

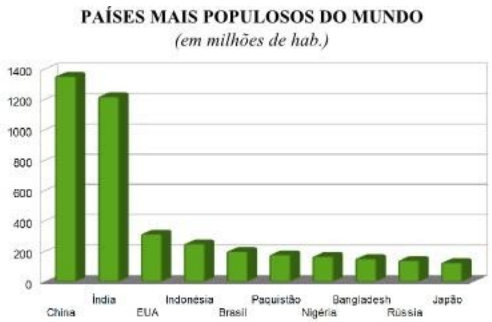
d) O paralelogramo tem dois pares de lados paralelos.

e) O pentágono tem cinco lados e quatro ângulos.

Problema 5. Joãozinho tem 3 blusas: uma preta, uma azul e uma branca; e 2 calças: uma jeans escura e uma jeans clara. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir usando estas peças?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

Problema 6. Observe o gráfico:



Analisando os dados fornecidos pelo gráfico podemos afirmar que o Brasil é:

a) Mais populoso que a Indonésia.

b) Tão populoso quanto os EUA.

c) O quarto país mais populoso do mundo.

d) Menos populoso que a Rússia.

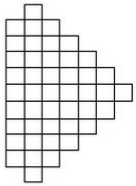
e) O quinto país mais populoso do mundo.

Gabarito das Questões Objetivas

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
b	c	d	e	d	e

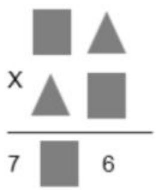
Questões Discursivas

Problema 1. Encontre a maior quantidade de quadradinhos que podemos pintar de cinza na figura abaixo, de modo que não apareça nenhum quadrado, formado por quatro quadradinhos, como este aqui: 



Problema 2. Numa lanchonete, comprei três barras de cereais e um suco e paguei R$ 6,25. Minha prima, por sua vez, comprou uma barra de cereal e um suco e pagou R$ 3,75. Quanto custou cada produto?

Problema 3. A figura abaixo representa uma conta de multiplicação entre dois números de dois algarismos, resultando em um número de três algarismos. Sabendo que as figuras iguais representam o mesmo número, quais são os números corretos para esta multiplicação?



Problema 4. Numa prova de matemática, as 4 maiores notas foram: 10; 9,5; 9 e 8,5. Carlos, Fernanda Plínio e Leila foram os estudantes estudiosos que tiraram tais notas. No pátio da escola, eles deram as mãos formando uma roda. Nessa roda:

(a) Leila segurava as mãos de Carlos.

(b) Quem tirou 9 estava a esquerda de Fernanda.

(c) Uma menina segura a mão de quem tirou 8,5, que foi um menino.

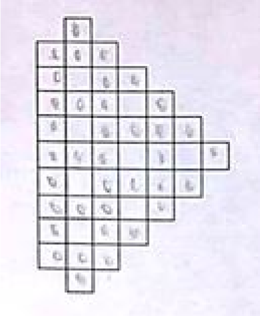
(d) Quem tirou nota 10 estava a frente de Plínio.

Descubra quem tirou 9,5.

Gabarito das Questões Discursivas

Problema 1. *(Resolução de Ramon Turek de Mello - Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)*

Fui pintando e tomando cuidado para não pintar um quadrado. Assim descobri que o número de quadradinhos pintados é de 37.



Problema 2. *(Resolução de Fernando Hideo Ohi - Colégio São Francisco)*

3 barras + 1 suco = R\$ $6,25$
1 barra + 1 suco = R\$ $3,75$

Subtraindo 1 barra e um suco de 3 barras e 1 suco, terei o valor de 2 barras

$6,25 - 3,75 = 2,50$

Assim 2 barras custam R\$ $2,50$. Dividindo por 2 obtemos o valor de 1 barra.

$\frac{2,50}{2} = 1,25$

Como 1 barra e 1 suco custam R\$ $3,75$ e 1 barra custa R\$ $1,25$, Subtraindo essa barra de R\$ $3,75$, obtemos o valor do suco.

$3,75 - 1,25 = 2,50$

Assim a barra custa R\$ $1,25$ e o suco custa R\$ $2,50$.

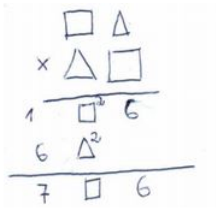
Problema 3. *(Resolução de Murilo Maeda Kataoka - Colégio Pontagrossense Sepam)*

Veja que $\square \times \triangle = 6$

Assim temos as seguintes possibilidades para o quadrado e o triângulo.

$\square = 1, 2, 3, 6$
$\triangle = 1, 2, 3, 6$

Efetuanto a multiplicação:

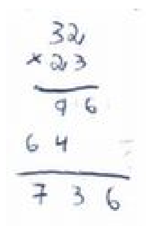


As possibilidades para que $\square \times \triangle$ seja 6, é um sendo 2 e o outro 3 ou um sendo 1 e o outro 6. Fazendo a multiplicação temos que $\square^2 + \triangle^2 = \square$. Assim vamos calcular as 2 possibilidades:

$\square^2 + \triangle^2 = \square$
$1^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37$
$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

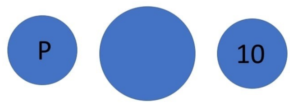
Analisando as duas possibilidades vemos que a segunda é a que se encaixa no exercício proposto. Pois o número na casa das unidades representa o quadrado, ou seja, 3. Já o número na casa das dezenas é o número que "subimos" na hora que efetuamos a conta. Como subimos um e as possibilidades do quadrado eram 1, 2, 3 ou 6, vemos que o quadrado vale 3 e o triângulo 2.

Tirando a prova real

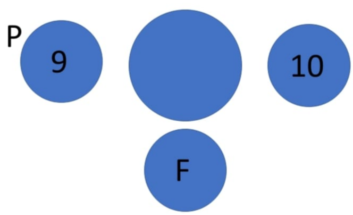


Problema 4. *(Resolução da Pauta)*

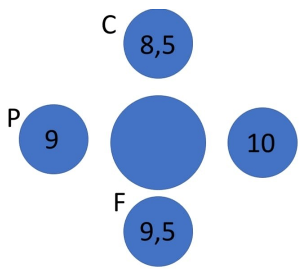
Para facilitar, vamos chamar Carlos de C, Fernanda de F, Plínio de P e Leila de L. Então, a partir do item (d), temos que:



A partir do item (b), nós descobrimos que Fernanda não estava a esquerda de Plínio, pois, nesse caso, quem estava a esquerda de Fernanda tirou 10. Resta-nos duas opçãoes para Fernanda: a direita ou a frente de Plínio. Mas nós sabemos que Leila segurava a mão de Carlos, então Fernanda não estava na frente de Plínio. Descobrimos que Fernanda estava à direita de Plínio e que Plínio tirou 9:



Pelo item (c), sabemos que uma menina segurava a mão de quem tirou 8,5 , que foi um menino. Logo, quem tirou 8,5 foi Carlos, que segurava a mão de Leila (que tirou 10).



Concluimos que Fernanda tirou 9,5.

5ª OPMat - Nível 1

Primeira Fase

Problema 1. João tem um pacote com 100 balas. Ele distribui as balas em 7 vidros de modo que as quantidades de balas em cada vidro sejam iguais e sobre no pacote o menor número possível de balas. Após fazer essa distribuição, quantas balas sobram no pacote?

a) 30 b) 23 c) 7 d) 2 e) 1

Problema 2. $132+111+219+x+8$ resulta 500. O valor de x é:

a) 30 b) 23 c) 7 d) 2 e) 1

Problema 3. Um tijolo e meio pesa 3 quilos. Portanto, quatro tijolos pesam:

a) 10 quilos

b) 9 quilos

c) 8 quilos

d) 7 quilos

e) 6 quilos

Problema 4. Na sequência 2, 3, 5, 7, x, 13, 17, 19, o valor do x é:

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

Problema 5. Considere um retângulo cuja altura mede o dobro da medida da sua base. Se a área do retângulo é 8 cm^2, então sua base mede:

a) 1 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 4 cm e) 5 cm

Problema 6. $\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{2}{9}+\frac{1}{4}$ resulta em:

a) 2 b) $\frac{145}{72}$ c) $\frac{12}{24}$ d) $\frac{1}{2}$ e) Outro resultado

Problema 7. A soma entre dois inteiros positivos é 20 e o produto é 96. Com certeza, um desses números é:

a) 15 b) 14 c) 13 d) 12 e) 11

Problema 8. Qual o menor número que devemos somar ao resto da divisão de 723 por 25 para obter um múltiplo de 5?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Problema 9. Quando João tinha 2 anos de idade, Maria tinha 10. Hoje, João tem 16 anos e Maria tem:

a) 20 anos b) 21 anos c) 22 anos d) 23 anos e) 24 anos

Problema 10. Para efetuar a soma

observamos que $1 + 60 = 61$, $2 + 59 = 61$, $3 + 58 = 61$ e continuando esse processo iremos obter 30 adições que resultam 61. Portanto, a soma dos números de 1 até 60 é $30 \times 61 = 1830$. A soma de todos os números ímpares entre 0 e 1000 é:

a) 2500 b) 50000 c) 500000 d) 250000 e) 2500000

Problema 11. Considere a sequência $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots\ldots\ldots\ldots$ construída segundo a lei de formação: começa com 1, soma 2, soma 3, soma 4, soma 5, soma 6, etc. Qual o centésimo termo da sequência?

a) 5050 b) 5049 c) 4954 d) 4951 e) 4500

Problema 12. Entre os vários truques de adivinhação de números, um deles aparece com relativa frequência, como curiosidade, em grupos de pessoas que discutem matemática. Propõe-se a um membro do grupo que escreva num papel dois números de 1 a 10, iguais ou distintos, mas que não revele os números. A seguir pede-se que ele some os dois números e multiplique o resultado por 10. Depois, que adicione ao resultado o maior número e subtraia o menor. Para surpresa de todos, se o membro revelar apenas o resultado final, pode-se descobrir prontamente quais foram os dois números escritos no papel. Se o resultado final fosse 104, qual seria o produto dos números escritos no papel?

a) 12 b) 15 c) 21 d) 24 e) 36

Problema 13. Escrevendo todos os números naturais de 1 a 2017, e depois apagando todos os números múltiplos de 3, quantos números continuarão escritos?

a) 1620 b) 1345 c) 1009 d) 672 e) 337

Problema 14. Quantos números naturais de três algarismos distintos existem em que o primeiro algarismo é igual à soma dos outros dois?

a) 12 b) 16 c) 24 d) 32 e) 36

Problema 15. Maria foi a uma loja de brinquedos para comprar carrinhos ou bonecas com uma certa quantia. Quando chegou lá, percebeu que se tivesse 1 real a mais, poderia comprar exatamente três carrinhos e duas bonecas, mas se tivesse três reais a mais, poderia comprar exatamente dois carrinhos e três bonecas. Portanto, se ela quisesse comprar exatamente cinco carrinhos, e nenhuma boneca,

a) sobraria 1 real

b) faltaria 1 real

c) sobrariam 2 reais

d) faltariam 2 reais

e) sobrariam 3 reais

Problema 16. Se N é o menor número natural que deixa resto 1 quando dividido por 2, por 3 e por 4, então a soma dos algarismos de N é igual a:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

Problema 17. Uma caixa contém algumas bolas azuis e algumas bolas vermelhas. Se retirarmos da caixa 3 bolas vermelhas, a razão entre o número de bolas vermelhas e o número de bolas azuis restantes na caixa é $\frac{5}{4}$, mas, se ao invés disso, retirarmos da caixa 2 bolas azuis, a razão entre o número de bolas vermelhas e o número de bolas azuis restantes na caixa aumenta para $\frac{9}{5}$. Logo, se retirarmos da caixa apenas uma bola vermelha e uma azul, a razão entre o número de bolas vermelhas e o número de bolas azuis restantes na caixa será:

a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{16}{13}$ d) $\frac{17}{11}$ e) $\frac{1}{2}$

Problema 18. Um número natural A de dois algarismos distintos é tal que se invertermos a ordem de seus algarismos obtemos o natural $B = A - 63$. Qual a diferença entre os algarismos de A?

a) 1 b) 3 c) 4 d) 7 e) 8

Problema 19. Um livro possui 50 folhas, cada uma delas com impressão na frente e no verso. As 100 páginas estão numeradas, em ordem crescente, de 1 a 100. Se por acidente uma das folhas foi arrancada do livro e a soma das numerações das páginas restantes é 4871, então pode-se afirmar que entre as páginas restantes não está a página:

a) 89 b) 85 c) 78 d) 67 e) 28

Problema 20. João, Paulo e Maria são filhos de um mesmo pai e de uma mesma mãe. Quando Paulo nasceu, Maria tinha 5 anos. Quando João nasceu, Paulo tinha 10 anos. Se hoje João tem 20 anos, quantos anos tem Maria?

a) 25 b) 30 c) 35 d) 40 e) 45

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
d	a	c	d	b	b	d	c	e	d
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	c	b	d	e	b	d	d	a	c

Segunda Fase

Problema 1. Numa prova de matemática, as 4 maiores notas foram: 10; 9,5; 9 e 8,5. Carlos, Fernanda Plínio e Leila foram os estudantes estudiosos que tiraram tais notas. No pátio da escola, eles deram as mãos formando uma roda. Nessa roda:

(a) Leila segurava as mãos de Carlos.

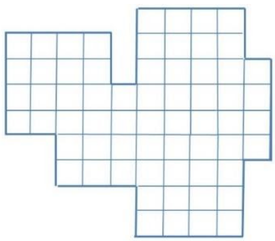
(b) Quem tirou 9 estava a esquerda de Fernanda.

(c) Uma menina segura a mão de quem tirou 8,5, que foi um menino.

(d) Quem tirou nota 10 estava a frente de Plínio.

Descubra quem tirou 9,5.

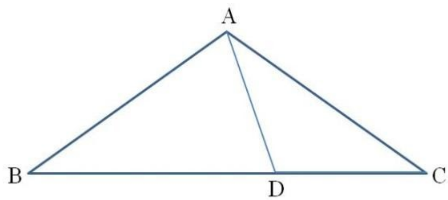
Problema 2. Cinco quadrados estão sobrepostos formando o tapete mostrado abaixo. Se cada um dos cinco quadrados tem uma área de 5 m^2, qual é a área desse tapete?



Problema 3. Um pequeno agricultor colheu 63 kg de feijão. O quilograma de feijão pode ser vendido imediatamente por R$1,75 ou, mais tarde, após um processo de limpeza, a R$2,25. O processo de limpeza faz o feijão perder $\frac{1}{9}$ de seu peso. Qual é o tipo de venda mais lucrativo para o agricultor?

Problema 4. Sendo x e y dois números inteiros positivos, prove que: se a soma entre eles é par, então a soma dos seus quadrados também é par.

Problema 5. Encontre a medida do ângulo $C\hat{A}D$, sabendo que $B\hat{A}D = 84°$ e que os triângulos ABC e DCA são isósceles (isto é, possuem dois lados com a mesma medida).

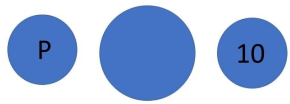


Problema 6. Para um triângulo qualquer, prove que a soma dos ângulos internos é $180°$.

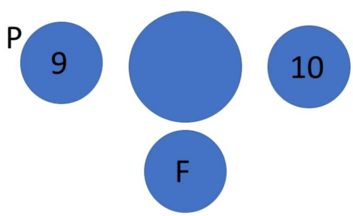
Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução da Pauta)*

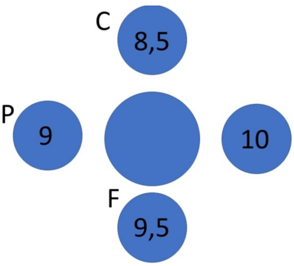
Observe que a partir do item (d), sabemos que quem tirou nota 10, está à frente de Plínio.



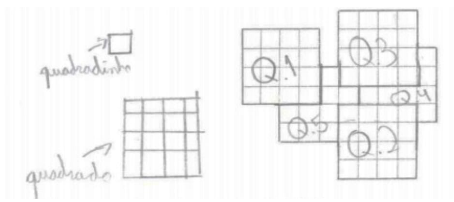
A partir do item (b) concluímos que Plínio não está a direita de Fernanda, pois caso estivesse quem estaria a esquerda de Fernanda seria quem tirou 10, mas quem tirou 9 é quem está a sua esquerda. Assim restam duas possibilidades para Fernanda, à direita de Plínio ou à frente de Plínio. Mas sabemos pelo item (a) que Leila segura a mão de Carlos, assim é impossível Fernanda estar a frente de Plínio. Logo está a sua direita. Assim Plínio fica a esquerda de Fernanda e então Plínio foi quem tirou 9.



Pelo item (c), sabemos que uma menina segurava a mão de um menino que tirou 8,5. Como Plínio tirou 9, Carlos foi quem tirou 8,5. Pelo item (d) quem tirou 10 está a frente de Plínio, como Fernanda está a direita e Carlos tirou 8,5, quem tirou 10 foi Leila. Sendo assim quem tirou 9,5 foi Fernanda.

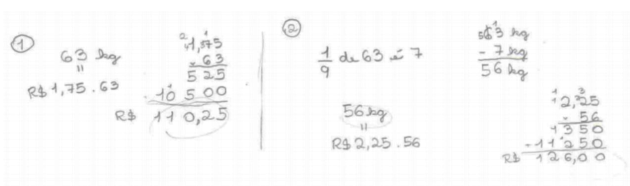


Problema 2. *(Resolução de Felipe Mandalozzo Tebcherani - Colégio Neo Master)*



R = $20m^2$. Desenhei os quadrados no quadriculado acima. Cada quadrado de $5m^2$ ocupava 16 quadradinhos no quadriculado. Os quadrados 1, 2 e 3 estão totalmente aparecendo, ou seja, não estão nada sobrepostos. Já o quadrado 5 e o quadrado 4 estão sobrepostos e apenas parte deles está aparecendo. Os quadradinhos desses quadrados, se somados, equivalem a 16 quadradinhos, ou seja, as áreas dos quadrados sobrepostos, se somados, equivalem a área de um quadrado inteiro. Assim, temos 3 quadrados inteiros e 2 quadrados sobrepostos, que somados equivalem a área de um quadrado inteiro. Assim, $5+5+5+5=20$

Problema 3. *(Resolução de Gabriel Felipe Shigio - Colégio Sagrada Família)*



A maneira mais lucrativa para o agricultor é através do processo de limpeza, pois o valor nesse processo é maior do que o valor do processo sem limpeza. Primeiramente, eu realizei o cálculo do processo sem limpeza, ou seja, multipliquei o número de quilogramas pelo valor por kg. O resultado foi R\$ 110,25 (1). Já no cálculo (2), eu descobri quanto é $\frac{1}{9}$ de 63 kg, subtraí esse número pelo total (63 kg-7 kg) e obtive 56kg. Multipliquei esse número pelo preço por kg, e o resultado foi R\$ 126,00.

Problema 4. *(Resolução da Pauta)*

Sabemos que a soma de x com y é um número par, isto é, que $x+y$ é múltiplo de 2. Para algum número k inteiro positivo, temos que $x+y=2k$

Agora elevamos $(x+y)$ ao quadrado:

$(x+y)^2=(2k)^2$

$x^2+2xy+y^2=4k^2$

$2(2k^2)=x^2+y^2+2xy \Rightarrow m=2k^2$

$2m=x^2+y^2+2xy$

Assim, temos que x^2+y^2+2xy é um número par. Mas observe que $2xy$ é um número par, pois é múltiplo de 2. Então, temos que, x^2+y^2 é também um número par.

Problema 5. *(Resolução de Gabriel Felipe Shigio - Colégio Sagrada Família)*

$x + y + y = 180°$

$3y + 84 = 180°$

$3y = 180° - 84°$

$3y = 96°$

$y = 32°$

$$\begin{array}{r} 84° \\ 32° \\ 32° \\ +\ 32° \\ \hline 180° \end{array}$$

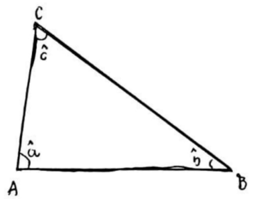
O ângulo $C\hat{A}D$ mede 32°.

Primeiro, percebi que: como o triângulo CAD é isósceles, os ângulos $C\hat{A}D$ e $D\hat{C}A$ são congruntes. E o triângulo ABC também é isósceles, por isso os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são congruentes. Daí calculei a equação $3y+84° = 180°$, para descobrir a medida dos ângulos $C\hat{A}D$, $D\hat{C}A$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$, representada pela incógnita y foi

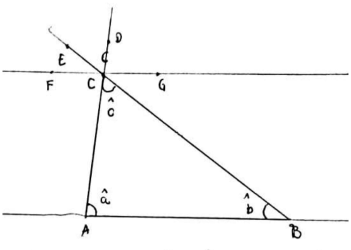
32°. Somei $84° + 32° + 32° + 32°$ e deu 180° (a soma de todos os ângulos internos de qualquer triângulo).

Problema 6. *(Resolução da Pauta)*

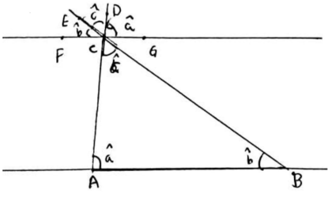
Considere o triângulo ABC abaixo:



Prolongamos o segmento AB e traçamos a reta r, paralela a AB pelo ponto C. Além disso, prolongamos os segmentos AC e BC, como na figura.



Repare que no ponto C temos o ângulo oposto pelo vértice ao ângulo $\hat{C}$. Repare ainda que os ângulos $A\hat{B}C$ e $E\hat{C}F$ são correspondentes, assim como os ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{C}G$. Então:



Note que temos um ângulo raso em C e que este ângulo é a soma dos ângulos $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$. Isto é: $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c} = 180°$.

Concluímos, portanto, que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer ABC é igual a 180°.

5ª OPMat - Nível 2

Primeira Fase

Problema 1. Igual ao Problema 1 do Nível 1

Problema 2. Igual ao Problema 2 do Nível 1

Problema 3. Igual ao Problema 3 do Nível 1

Problema 4. Igual ao Problema 4 do Nível 1

Problema 5. Igual ao Problema 5 do Nível 1

Problema 6. Igual ao Problema 6 do Nível 1

Problema 7. Igual ao Problema 7 do Nível 1

Problema 8. Igual ao Problema 8 do Nível 1

Problema 9. Igual ao Problema 9 do Nível 1

Problema 10. Igual ao Problema 10 do Nível 1

Problema 11. Igual ao Problema 11 do Nível 1

Problema 12. Igual ao Problema 12 do Nível 1

Problema 13. Escrevendo todos os números naturais de 1 a 2017 e apagando todos os quadrados perfeitos, quantos números continuarão escritos?

a) 1750 b) 1848 c) 1945 d) 1973 e) 1987

Problema 14. Igual ao Problema 14 do Nível 1

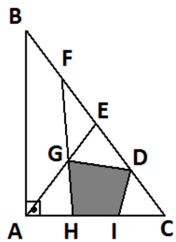
Problema 15. Igual ao Problema 15 do Nível 1

Problema 16. Igual ao Problema 16 do Nível 1

Problema 17. Uma caixa contém algumas bolas azuis e algumas bolas vermelhas. Se retirarmos da caixa 3 bolas vermelhas, a razão entre o número de bolas vermelhas e o número de bolas azuis restantes na caixa é $\frac{5}{4}$, mas, se ao invés disso, retirarmos da caixa 2 bolas azuis, a razão entre o número de bolas vermelhas e o número de bolas azuis restantes na caixa aumenta para $\frac{9}{5}$. Logo, se retirarmos da caixa apenas uma bola vermelha e uma azul, a razão entre o número de bolas vermelhas e o número de bolas azuis restantes na caixa será:

a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{16}{13}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{17}{11}$

Problema 18. Na figura abaixo,



o triângulo ABC é retângulo em A, AB=4 m, AC=3 m, AH=HI=IC, BF=FE=ED=DC e G é a intersecção dos segmentos FH e AE. Qual é a área do quadrilátero DGHI?

a) $1,1\ m^2$ b) $1,3\ m^2$ c) $1,5\ m^2$ d) $2,1\ m^2$ e) $2,2\ m^2$

Problema 19. Igual ao Problema 18 do Nível 1

Problema 20. Igual ao Problema 19 do Nível 1

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
d	a	c	d	b	b	d	c	e	d
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	c	d	d	e	b	e	b	d	a

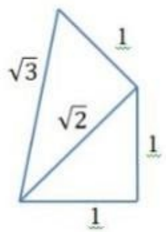
Segunda Fase

Problema 1. Um pequeno agricultor colheu 63 kg de feijão. O quilograma de feijão pode ser vendido imediatamente por R$1,75 ou, mais tarde, após um processo de limpeza, a R$2,25. O processo de limpeza faz o feijão perder $\frac{1}{9}$ de seu peso. Qual é o tipo de venda mais lucrativo para o agricultor?

Problema 2. Se $x + y = -1$ e $x^2 + y^2 = 3$, calcule $x^3 + y^3$.

Problema 3. Sabendo que $a^2(b+2) = b^2(a+2)$ e $ab = 2017$, calcule o valor de $2^2(a+b)$.

Problema 4. Construindo um triângulo retângulo com ambos os catetos medindo 1 cm teremos, conforme o teorema de Pitágoras, que $1^2 + 1^2 = 1 + 1 \Rightarrow 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow 1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$ e, portanto, a hipotenusa desse triângulo mede $\sqrt{2}$. Usando essa hipotenusa como cateto maior de outro triângulo retângulo com cateto menor medindo 1, pelo teorema de Pitágoras, teremos $(\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 \Rightarrow (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3 \Rightarrow (\sqrt{2})^2 + 1^2 = (\sqrt{3})^2$ e, portanto a hipotenusa desse segundo triângulo mede $\sqrt{3}$. Observe o esboço da figura (as medidas não são exatas).



Construa dois triângulos retângulos de modo que a hipotenusa do primeiro seja o cateto maior do segundo, as medidas dos catetos de um dos triângulos sejam números inteiros e a hipotenusa de um dos triângulos meça $\sqrt{14}$ cm.

Problema 5. Num grupo de 100 estudantes, 60 gostam de Matemática, 47 gostam de Física e 71 gostam de apenas uma dessas ciências. Quantos desses 100 estudantes não gostam nem de Matemática nem de Física?

Problema 6. Para um triângulo qualquer, prove que a soma dos ângulos internos é 180°.

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Augusto Philippus Lack - Colégio Pontagrossense Sepam)*

O mais lucrativo é vender o feijão após o precesso de limpeza, primeiro eu pensei em descobrir o quanto ele ganha se vender o feijão imediatamente, para isso fiz uma multiplicação, que foi a quantidade de feijão que ele tem pelo preço do feijão 'sujo', $63 \times 1,75 =$ R\$ 110,35. Depois eu pensei em descobrir quantos kg de feijão ele ficaraia após o processo de limpeza, seguindo o enunciado ele perde $\frac{1}{9}$ do seu peso após o processo, para isso é só dividir 63 por 9, que me deu o valor de cada "nono" e depois subtraí de 63, $\frac{63}{9} = 7$ kg, $63 - 7 = 56$. Assim eu descobri que ele fica com 56 kg após o processo de limpeza, para descobrir o quanto ele ganha após esse processo eu multipliquei o quanto ele tem de feijão "limpo", que são 56 kg e multipliquei pelo preço do feijão "limpo", que é R\$ 2,25, o resultado foi $56 \times 2,25 =$ R\$126,00, assim concluí que o feijão "limpo" é mais lucrativo.

Problema 2. *(Resolução de Lucas Perondi Kist - Colégio Elite Tales de Mileto)*

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \qquad [1]$$

$$(-1)^2 = 3+2xy$$

$$1 = 3+2xy$$

$$1-3 = 2xy$$

$$-2 = 2xy$$

$$-1 = xy$$

Como

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Então:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3 \qquad [2]$$

$$x^3 + y^3 = (-1)(3+1)$$

$$x^3 + y^3 = -4$$

Como $(x + y)(x^2 - 2xy + y^2) = x^3 + y^3$ e temos os valores de $(x + y)$ e $(x^2 + y^2)$, podemos usar o quadrado da soma para descobrir o valor de xy, a partir de [1].

Conforme os cálculos acima, temos que $xy = -1$ por [1]. Assim, ao substituir os valores em [2], temos que $x^3 + y^3 = -4$

Problema 3. *(Resolução da Pauta)*

De $a^2(b+2) = b^2(a+2)$ temos que:

$a^2b + a^2 2 = b^2 a + b^2 2$

$a^2b - b^2 a = b^2 2 - a^2 2$

$ab(a-b) = 2(b-a)(a+b)$

Então, se $a \neq b$, segue que:

$-ab = 2(a+b)$

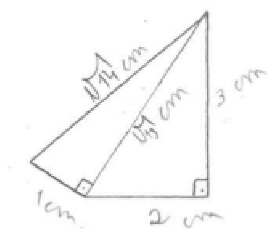
Uma vez que $ab = 2017$,

$-2017 = 2(a+b)$ ou seja $-4034 = 2^2(a+b)$

Se $a = b$, note que $a = \sqrt{2017}$ e

$2^2(a+b) = 2^2(2a) = 8\sqrt{2017}$

Problema 4. *(Resolução de Danilo Beltrame - Colégio Pontagrossense Sepam)*



Primeiramente, precisamos de 2 quadrados perfeitos cujo soma seja igual a 13, a 10 ou a 5 por exemplo, para que a hipotenusa seja igual a $\sqrt{13}$, a $\sqrt{10}$ ou $\sqrt{5}$, por exemplo. Então haverá um inteiro i tal que $i^2 + \sqrt{13}^2 = \sqrt{14}$, nesse caso, i vale 1 e nos outros exemplos, para $\sqrt{10}$, i vale 2 e para $\sqrt{5}$, i vale 3. Veja que $13 = 2^2 + 3^2$, então basta que os catetos do primeiro triângulo sejam 2 e 3, então $2^2 + 3^2 = 13$, para que haja hipotenusa igual a $\sqrt{14}$, então:

$\sqrt{13}^2 + x^2 = \sqrt{14}^2$

$13 + x^2 = 14$

$x = \pm 1$

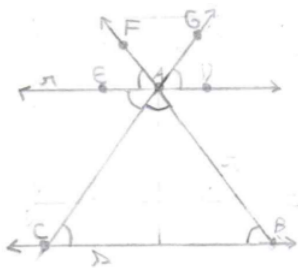
Como se trata do lado do triângulo, $x = 1$.

Problema 5. *(Resolução de Gabriela Brasil Silva - Colégio Marista Pio XII)*

Se de 100 estudantes 60 gostam de Matemática, 47 de Física e 71 gostam de apenas uma dessas matérias; somando os alunos que gostam de Matemática e Física teremos 107 alunos, desses 107, 71 gostam de apenas uma matéria (107-71), então os 36 alunos restantes gostam de duas matérias. Então dividimos por 2, pois esses 36 alunos gostam de duas matérias. Logo, 18 alunos gostam de Matemática e Física, somando os 71 alunos com os 18, teremos 89 alunos que gostam dessas matérias (sendo uma delas ou duas delas). Os 11 alunos restantes para completar 100 não gostam de nenhuma matéria.

Portanto, 11 alunos não gostam de nenhuma matéria.

Problema 6. *(Resolução de Lucas Perondi Kist - Colégio Elite Tales de Mileto)*



Se traçarmos duas retas paralelas, r e s e fizermos um triângulo ABC qualquer, em que seus três vértices estejam sobre as retas r e s, ao prolongar as semiretas $\overrightarrow{\text{BA}}$ e $\overrightarrow{\text{CA}}$ e marcando quatro pontos, D, E, F, e G, como mostrado na figura, teremos que:

$A\hat{C}B \equiv G\hat{A}D$ porque são correspondentes;

$A\hat{B}C \equiv E\hat{A}F$ porque são correspondentes;

$G\hat{A}D \equiv E\hat{A}C$ porque são opostos pelo vértice.

Como os três ângulos são adjacentes e se referem à mesma semireta, está provado que são suplementares. Logo, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.

5ª OPMat - Nível 3

Primeira Fase

Problema 1. Qual é a soma dos algarismos do menor número natural quadrado perfeito e par que é múltiplo de 3 e de 11?

a) 12 b) 14 c) 16 d) 18 e) 22

Problema 2. Simplificando a expressão $\dfrac{\dfrac{2017}{2}+\dfrac{2017}{3}}{\dfrac{2017}{6}}$, obtemos:

a) $\dfrac{12}{5}$ b) $\dfrac{5}{12}$ c) $\dfrac{1}{6}$ d) 1 e) 5

Problema 3. Se $1abc$ é o primeiro número natural de quatro algarismos que é múltiplo de 7, então $a+b+c$ é igual a

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Problema 4. Maria escreveu os números naturais de 10 a 99 em sequência; isto é: 101112131415...... Em seguida ela apagou 20 algarismos da sequência. Se a soma dos algarismos apagados foi a maior possível, qual o valor dessa soma?

a) 178 b) 179 c) 180 d) 190 e) 200

Problema 5. Num ônibus viajam o motorista e alguns passageiros, sendo alguns homens e algumas mulheres. Se descerem duas mulheres, ficarão no ônibus o mesmo número de homens e de mulheres, mas, se ao invés disso, descerem nove homens e sete mulheres, o número de mulheres que ficarão no ônibus será o dobro do número de homens que ficarão no ônibus. Portanto, o número de passageiros homens que viajam no ônibus é:

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

Problema 6. Maria entrou numa pizzaria e percebeu que para comprar três pizzas do tipo brotinho, precisaria ter mais R$ 9,50, mas para comprar duas pizzas, faltaria apenas R$ 2,00, quanto Maria tinha no bolso?

a) R$ 10,00 b) R$ 12,50 c) R$ 13,00 d) R$ 13,50 e) R$ 14,00

Problema 7. Paulo tinha que determinar os pesos de três tipos de moedas: A, B e C, sabendo o peso de uma moeda do tipo B e usando uma balança de dois pratos. Após algumas tentativas, Paulo percebeu que o peso de uma moeda do tipo A era o dobro do peso de uma moeda do tipo B e que o peso de uma moeda do tipo C era o dobro do peso de uma moeda do tipo A. Portanto, ele também poderia concluir, corretamente, que o peso de uma moeda do tipo C é:

a) 1,5 vezes o peso de uma moeda do tipo B.

b) 2 vezes o peso de uma moeda do tipo B.

c) 2,5 vezes o peso de uma moeda do tipo B.

d) 3 vezes o peso de uma moeda do tipo B.

e) 4 vezes o peso de uma moeda do tipo B.

Problema 8. Para ir a pé para a escola, Joãozinho leva em média 30 minutos, mas quando vai de carro com os pais, leva em média apenas 12 minutos. Um certo dia, ele saiu a pé para a escola e faltando dois terços do caminho, encontrou o pai, que o levou de carro o restante do caminho. Se o caminho de casa até a escola seguido a pé e de carro foi o mesmo de sempre e com as mesmas velocidades habituais; neste dia, Joãozinho, para ir de casa até a escola, levou

a) 18 minutos

b) 21 minutos

c) 24 minutos

d) 25 minutos

e) 28 minutos

Problema 9. João, Paulo e Maria foram a um restaurante para almoçar. Cada um comeu um tipo de comida e tomou um tipo de refrigerante. Na hora de pagar a conta verificaram que o total da conta deu R$ 88,00. Se Paulo gastou R$ 4,00 a mais que João e R$ 2,00 a menos que Maria, quanto Paulo pagou?

a) R$ 27,00 b) R$ 28,00 c) R$ 29,00 d) R$ 30,00 e) R$ 32,00

Problema 10. Maria dividiu um certo número natural por 7 e obteve o quociente igual a 5 e resto igual a 2. Se tivesse dividido este mesmo número por 9, teria obtido como quociente e resto:

a) 2 e 5 b) 1 e 4 c) 2 e 3 d) 4 e 1 e) 5 e 2

Problema 11. Considere a sequência: 1, 2, 0, 0, 1, -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$,...., construída segundo a lei de formação: soma 1, subtrai 2, divide por 2, soma 1, subtrai 2, divide por 2, etc. Qual é a soma dos primeiros 31 termos da sequência?

a) $20-\frac{5}{2^8}$ b) $\frac{5}{2^8}-21$ c) $-19-\frac{3}{2^9}$ d) $20+\frac{5}{2^8}$ e) $-20-\frac{5}{2^9}$

Problema 12. Igual ao Problema 11 do Nível 2

Problema 13. Quantos números naturais de quatro algarismos distintos e maiores que 9200 existem, em que a soma dos dois primeiros algarismos é igual à soma dos outros dois?

a) 10 b) 12 c) 15 d) 22 e) 24

Problema 14. Igual ao Problema 12 do Nível 2

Problema 15. Escrevendo todos os números naturais de 1 a 2017 e apagando todos os quadrados perfeitos e os cubos perfeitos, quantos números seriam apagados?

a) 48 b) 50 c) 53 d) 56 e) 60

Problema 16. Igual ao Problema 16 do Nível 1

Problema 17. Igual ao Problema 17 do Nível 1

Problema 18. Igual ao Problema 18 do Nível 2

Problema 19. Igual ao Problema 18 do Nível 1

Problema 20. Igual ao Problema 19 do Nível 1

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
d	e	b	b	a	c	e	a	d	d
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
c	a	Anulada	c	c	b	d	b	d	a

Segunda Fase

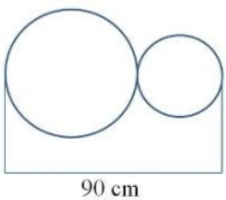
Problema 1. Num grupo de 100 estudantes, 60 gostam de Matemática, 47 gostam de Física e 71 gostam de apenas uma dessas ciências. Quantos desses 100 estudantes não gostam nem de Matemática nem de Física?

Problema 2. Um ônibus, um trem e um avião partem no mesmo horário da cidade de Aluensa para a cidade de Barricas. Se você tomar o ônibus, cuja velocidade média é de 60 km/h, chegará à Barricas às 22 horas. Se você tomar o trem, cuja velocidade média é de 120 km/h, chegará à Barricas às 16 horas. Encontre o horário de chegada do avião se sua velocidade média é de 360 km/h.

Problema 3. Resolva a equação de 1° grau a seguir:

$$x - 2\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{16}+\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{12}}$$

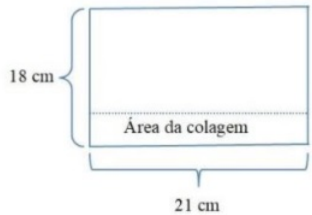
Problema 4. Observe a figura abaixo. Ela mostra duas rodas que se tocam de modo que quando uma delas é girada a outra também gira. Através da ação de um motor elétrico, a roda A dá 600 voltas por minuto fazendo com que a roda B dê 1400 voltas por minuto. Calcule os raios das duas rodas.



Problema 5. João cortou um retângulo de cartolina de 21 cm por 18 cm e depois colou os dois lados mais longos, sobrepondo uma faixa de 2 cm, formando um cilindro. A figura mostra esse primeiro retângulo. Se ele cortar outro retângulo, com as mesmas dimensões, e colar os lados menores para formar outro cilindro, sobrepondo uma faixa de 1 cm na colagem, pergunta-se:

a) Se enchermos os cilindros de areia, em qual deles caberá mais areia?

b) Se cada cm^3 de areia pesa π gramas, quantos quilos de areia cabem no cilindro com maior capacidade?



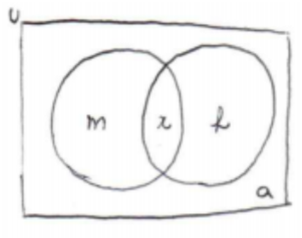
Dica: V = $\pi r^2 h$

Problema 6. Para um triângulo qualquer, prove que a soma dos ângulos internos é 180°.

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Cassiano José Kounaris Fuziki - Colégio Marista Pio XII)*

O problema pode ser resolvido através de um diagrama, como apresentado abaixo:



$m \rightarrow$ número de alunos que gostam apenas de Matemática.

$f \rightarrow$ número de alunos que gostam apenas de Física.

$x \rightarrow$ número de alunos que gostam de ambas as matérias.

$a \rightarrow$ número de alunos que não gostam de nenhuma das duas.

Podemos, portanto, escrever as seguintes equações:

$m + x = 60$ [1]

$f + x = 47$ [2]

$m + f = 71$ [3]

$m + x + f + a = 100$ [4]

Somando [1] e [2], temos:

$(m + f) + 2x = 107$ [5]

Substituindo [3] em [5], temos:

$71 + 2x = 107$

$2x = 107 - 71$

$2x = 36$

$x = 18$ [6]

Substituindo [6] em [4], temos:

$(m + f) + 18 + a = 100$

$71 + 18 + a = 100$

$89 + a = 100$

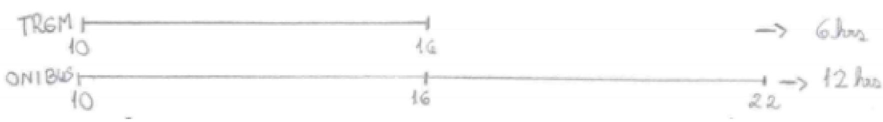
$a = 100 - 89$

$a = 11$

R = 11 alunos não gostam nem de Matemática e nem de Física.

Problema 2. *(Resolução de João Pedro Wardani de Castro - Colégio Sagrada Família)*

Sabemos que o trem possui o dobro de velocidade do ônibus, portanto percorre o trajeto na metade do tempo. Como a diferença entre a chegada do trem e do ônibus é de 6 horas, podemos definir o horário da partida como 10 horas.



O avião tem velocidade três vezes maior que o trem, portanto realizará o percurso três vezes mais rápido, em apenas duas horas.

Partindo às 10 e atravessando a distância de 2 horas, o avião chegará às 12 horas.

Problema 3. *(Resolução de Cassiano José Kounaris Fuziki - Colégio Marista Pio XII)*

Para resolvermos essa equação devemos simplificar da seguinte forma:

$$x - 2\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{16} + \sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{12}}$$

Como todos os denominadores são da forma $(a + b)$, devemos multiplicá-los por $(a - b)$, para que resultem em $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$, não se esquecendo de fazer o mesmo no numerador.

$$x - 2\sqrt{3} = \frac{1 \times (\sqrt{16} - \sqrt{15})}{16 - 15} + \frac{1 \times (\sqrt{15} - \sqrt{14})}{15 - 14} + \frac{1 \times (\sqrt{14} - \sqrt{13})}{14 - 13} + \frac{1 \times (\sqrt{13} - \sqrt{12})}{13 - 12}$$

$$x-2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{16}-\sqrt{15}}{1}+\frac{\sqrt{15}-\sqrt{14}}{1}+\frac{\sqrt{14}-\sqrt{13}}{1}+\frac{\sqrt{13}-\sqrt{12}}{1}$$

$$x-2\sqrt{3}=\sqrt{16}-\sqrt{12}$$

Passando o termo $(-2\sqrt{3})$ para o outro lado da equação, temos:

$$x=\sqrt{16}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}$$

$$x=\sqrt{16}-\sqrt{12}+\sqrt{4\times 3}$$

$$x=\sqrt{16}-\sqrt{12}+\sqrt{12}$$

$$x=\sqrt{16}$$

$$x=4$$

R = o valor de x é 4.

Problema 4. *(Resolução de Gabriel Henrique Kwiatkovski Godinho - Colégio Neo Master)*

$2R+2r=90$ cm

Comprimento das rodas:

A $=2R\pi$

B $=2r\pi$

Uma volta da roda A = $\frac{7}{3}$ da roda B, ou seja $2R\pi=2r\pi\times\frac{7}{3}$

R = $\frac{7r}{3}$, substituindo em:

$$2R+2r=90$$

$$2\times\frac{7r}{3}+2r=90$$

$$\frac{14r}{3}+2r=90$$

$$\frac{14r}{3}+6r=270$$

$$20r=270$$

$$r=13,5 \text{ cm}$$

$2R + 2r = 90$

$2R + 2 \times (13,5) = 90$

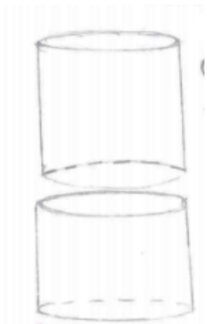
$2R + 27 = 90$

$2R = 63$

$\mathrm{R} = 31,5$ cm

O raio da roda A é igual a $31,5$ cm e o raio da roda B é igual a $13,5$ cm.

Problema 5. *(Resolução de João Pedro Wardani de Castro - Colégio Sagrada Família)*



$C_1 = 16$ cm: lados colados - área colada

$h_1 = 21$

$C_2 = 20$ cm: lados colados - área colada

$h_2 = 18$

São os dois cilindros possíveis feitos a partir do papel.

a) Para saber a quantidade de areia, precisamos do volume:

$V_1 = \pi\ R_1^2\ h_1$

$V_2 = \pi\ R_2^2\ h_2$

O raio é determinado pelo comprimento:

$C_1 = 2\ \pi\ R_1$

$16 = 2\,\pi\,R_1$

$\dfrac{8}{\pi} = R_1$

$V_1 = \pi \times \dfrac{8^2}{\pi^2} \times 21$

$V_1 = \dfrac{1344}{\pi}$ cm ^{3}

$C_2 = 2\,\pi\,R_2$

$20 = 2\,\pi\,R_2$

$\dfrac{10}{\pi} = R_2$

$V_2 = \pi \times \dfrac{10^2}{\pi^2} \times 18$

$V_2 = \dfrac{1800}{\pi}$ cm ^{3}

No segundo cilindro, que colou os lados menores.

b) $\dfrac{1800}{\pi} \times \pi = 1800$ gramas

Logo, cabem 1,8 kg de areia no cilindro de maior capacidade.

Problema 6. *(Resolução de Cassiano José Kounaris Fuziki - Colégio Marista Pio XII)*

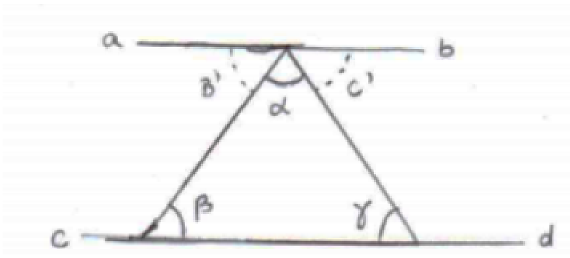
Para provar que para um triângulo qualquer a soma dos ângulos internos é 180°, podemos desenvolver o seguinte procedimento:

1 - desenha-se um triângulo qualquer;

2 - nomeia-se os três ângulos internos (α, β e γ por exemplo);

3 - traça-se sobre o vértice superior uma reta paralela à base;

O procedimento resulta da seguinte forma:



Na imagem podemos observar que os ângulos β e β', assim como γ e C' são iguais, isso porque cada um desses pares corresponde a um par de ângulos alternos internos, já que as retas $\overline{ab}$ e $\overline{cd}$ são paralelas. Dessa forma podemos concluir que os ângulos α, β e γ são suplementares, ou seja, a soma de seus valores resulta em 180°, provando assim, que este é o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

5ª OPMat - Nível 4

Primeira Fase

Problema 1. Igual ao Problema 1 do Nível 3

Problema 2. Igual ao Problema 2 do Nível 3

Problema 3. Igual ao Problema 3 do Nível 3

Problema 4. Igual ao Problema 4 do Nível 3

Problema 5. Igual ao Problema 5 do Nível 3

Problema 6. Igual ao Problema 6 do Nível 3

Problema 7. Igual ao Problema 7 do Nível 3

Problema 8. Igual ao Problema 8 do Nível 3

Problema 9. Igual ao Problema 9 do Nível 3

Problema 10. Igual ao Problema 10 do Nível 3

Problema 11. Considere a sequência: 1, 2, 0, 0, 1, -1, $\frac{-1}{2}$, $\frac{1}{2}$,...., construída segundo a lei de formação: soma 1, subtrai 2, divide por 2, soma 1, subtrai 2, divide por 2, etc. Qual é a soma dos primeiros 31 termos da sequência?

a) $20-\frac{5}{2^8}$ b) $\frac{5}{2^8}-21$ c) $-20-\frac{5}{2^9}$ d) $20+\frac{5}{2^8}$ e) $-19-\frac{3}{2^9}$

Problema 12. Igual ao Problema 12 do Nível 3

Problema 13. Igual ao Problema 1 do Nível 3

Problema 14. Igual ao Problema 14 do Nível 3

Problema 15. Igual ao Problema 15 do Nível 3

Problema 16. Igual ao Problema 20 do Nível 3

Problema 17. Uma caixa contém três bolas vermelhas, duas bolas azuis e uma bola amarela, todas do mesmo tamanho, peso e textura. João e Paulo participam de um jogo em que cada um deles, alternadamente, deve retirar uma bola da caixa. Perde o jogo aquele que retirar primeiro a bola amarela. Se João iniciar o jogo, e após cada jogada a bola retirada não for devolvida para o interior da caixa, qual a probabilidade de que seja definido o ganhador só na quarta jogada?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{7}$ e) $\frac{1}{6}$

Problema 18. Igual ao Problema 18 do Nível 3

Problema 19. Sejam x e y dois números naturais, tal que x é o sucessor de y e $x^3 - y^3 = x^2 - y^2 + 80$, então $x^4 - y^4$ é igual a:

a) 225 b) 361 c) 576 d) 671 e) 961

Problema 20. Simplificando a expressão, obtemos: $\dfrac{sen\,1° + sen\,2° + ... + sen\,100°}{cos\,1° + cos\,2° + ... + cos\,100°}$

a) $cotg\,5050°$

b) $cotg\,100°$

c) $tg\,5050°$

d) $cotg\,50,5°$

e) $tg\,50,5°$

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
d	e	b	b	a	c	e	a	d	d
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
e	a	Anulada	c	c	a	a	b	d	e

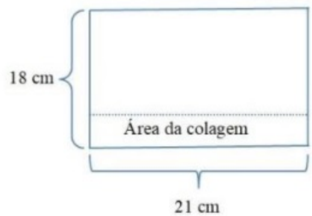
Segunda Fase

Problema 1. Sejam p e q inteiros positivos tais que $\frac{5}{9} < \frac{p}{q} < \frac{7}{9}$. Qual é o menor valor de p para que a soma de p com q seja 2017?

Problema 2. João cortou um retângulo de cartolina de 21 cm por 18 cm e depois colou os dois lados mais longos, sobrepondo uma faixa de 2 cm, formando um cilindro. A figura mostra esse primeiro retângulo. Se ele cortar outro retângulo, com as mesmas dimensões, e colar os lados menores para formar outro cilindro, sobrepondo uma faixa de 1 cm na colagem, pergunta-se:

a) Se enchermos os cilindros de areia, em qual deles caberá mais areia?

b) Se cada cm^3 de areia pesa π gramas, quantos quilos de areia cabem no cilindro com maior capacidade?



Dica: $V = \pi r^2 h$

Problema 3. Três números reais formam uma progressão aritmética de razão r. Os dois números menores também estão em uma progressão geométrica de razão q. Sabendo que o menor número é 2 e que $\frac{r}{q} = \frac{7}{4}$, calcule a soma desses três números.

Problema 4. Resolva a equação:

$$x - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$$

Problema 5. Prove que $\frac{a^2}{b} + \frac{b}{a^2} \geq 2$, para todos os números reais a e b.

Problema 6. Para um triângulo qualquer, prove que a soma dos ângulos internos é $180°$.

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Murilo Henrique de Souza Chociai - Colégio Integral Plus)*

Como $\dfrac{p}{q} > \dfrac{5}{9}$, o menor valor de p ocorrerá quando $\dfrac{p}{q} \approx \dfrac{5}{9}$;

$$\frac{p}{q} = \frac{5}{9} \Rightarrow p = \frac{5q}{q}$$

$$p + q = 2017$$

Primeiro vamos descobrir q:

$$5q + 9q = 2017 \times 9$$

$$q = \frac{2017 \times 9}{14}$$

$$q = 1276 + \frac{9}{14}$$

Agora basta descobrir quem é p

$$p = \frac{5 \times \left(1276 + \dfrac{9}{14}\right)}{9}$$

$$p = 720 + \frac{5}{14}$$

Sendo p e q inteiros, e sabendo que $\dfrac{p}{q} > \dfrac{5}{9}$, o menor valor para p será $\left(720 + \dfrac{5}{14}\right) + \dfrac{9}{14}$. Para manter a igualdade $p + q = 2017$, que deverá ser $\left(1276 + \dfrac{9}{14}\right) - \dfrac{9}{14}$.

$$\cdot \left(p + \frac{9}{14}\right) + \left(q - \frac{9}{14}\right) = 2017$$

$$721 + 1276 = 2017$$

$$2017 = 2017$$

$$\cdot \ \frac{p + \frac{9}{14}}{q - \frac{9}{14}} = \frac{721}{1276} \ \therefore$$

$$\frac{5}{9} < \frac{721}{1276} < \frac{7}{9}$$

O menor valor de p é 721.

Problema 2. *(Resolução de Larissa Almeida Busnello - Colégio Pontagrossense Sepam)*

a) O segundo cilindro.

$$V_{primeiro} = \frac{1344}{\pi} cm^3.$$

$$V_{segundo} = \frac{1800}{\pi} cm^3$$

Na primeira situação:

1º) Como os lados mais longos foram colados, eles equivalem à altura do cilindro (então $h = 21$ cm), já os lados menores delimitam o perímetro da circunferência que corresponde à base do cilindro (como 2 cm foram usados para a colagem, o perímetro da circunferência é de 16 cm, utilizando a fórmula que determina o comprimento da circunferência é possível descobrir a medida do raio da mesma:

$$C = 2\,\pi\,R$$

$$16 = 2\,\pi\,R$$

$$R = \frac{8}{\pi}\ cm$$

2º) Aplicando esses dados na fórmula do volume do cilindro é possível determinar o volume de areia que cabe dentro dele:

$$V = \pi \times R^2 \times h$$

$$V = \pi \times \left(\frac{8}{\pi}\right)^2 \times 21 = \frac{1344}{\pi}\ cm^3$$

Na segunda situação:

1º) Os lados menores correspondem à altura ($h = 18$ cm), já os lados maiores ao perímetro da circunferência que delimita a base do cilindro (como 1 cm foi usado para a colagem, o perímetro é de 20 cm utilizando a fórmula do comprimento da circunferência é possível determinar o raio da mesma:

$$C = 2\,\pi\,R$$

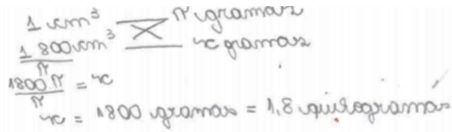
$$20 = 2\,\pi\,R$$

$$R = \frac{10}{\pi}\ cm$$

2º) Aplicando os dados na fórmula do volume do cilindro conclui-se que o volume de areia que cabe dentro dele é:

$$V = \pi\ R^2\ h = \pi \times \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \times 18 = \frac{100 \times 18}{\pi} = \frac{1800}{\pi}\ cm^3$$

b) É possível descobrir quantos quilos cabem através de uma regra de três.



Portanto, cabem 1,8 quilogrmas de areia no cilindro com maior capacidade.

Problema 3. *(Resolução de Tiago Daniel Gueiber - Colégio Marista Pio XII)*

Os três números: (a,b,c) [I]

Como estão em PA de razão r: $(a, a+r, a+2r)$ [II]

E como $a = 2$:

$(2, 2+r, 2+2r)$ [III]

E também como a e b então em PG de razão q:

$a \times q = b$ [IV]

Como $b = 2 + r$ ao substituir [I] em [III]; ao substituir então [III] em [IV]:

$2+r = a \times q$ [V]

Como $\dfrac{r}{q} = \dfrac{7}{4}$, ou seja,

$r = \dfrac{7q}{4}$ [VI]

Substituindo [VI] em [V]:

$$2 + \frac{7q}{4} = aq.$$

Como $a = 2$:

$$2 + \frac{7q}{4} = 2q$$

$$2 = \frac{8q}{4} - \frac{7q}{4}$$

$$2 = \frac{1q}{4}$$

$$q = 8 \qquad \text{[VII]}$$

Substituindo [VII] em [VI]:

$$r = \frac{7}{4} \times 8 = 14$$

E como $b = 2 + r$ e $c = 2 + 2r$, substituindo r por 14:

$$b = 2 + 14 = 16; c = 2 + 28 = 30$$

Como o enunciado pede $a + b + c$:

$$a + b + c = 2 + 16 + 30 = 48$$

Problema 4. *(Resolução de Murilo Henrique de Souza Chociai - Colégio Integral Plus)*

A fim de racionalizar todos os termos do 2º membro da equação, multiplica-se o numerador e denominador de $\dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$ por $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

$$x - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{8}}{9-8} + \frac{\sqrt{8} - \sqrt{7}}{8-7} + \dots + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{4-3}$$

$$x - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{8} + \sqrt{8} - \sqrt{7} + \sqrt{7} - \sqrt{6} - \sqrt{6} + \sqrt{6} - \sqrt{5} + \sqrt{5} - \sqrt{4} + \sqrt{4} - \sqrt{3}}{1}$$

$$x - \sqrt{x} = \sqrt{9} - \sqrt{3}$$

$$x - \sqrt{x} = 3 - \sqrt{3}$$

$$x = 3$$

$$S = \{3\}$$

Problema 5. *(Resolução de Larissa Almeida Busnello - Colégio Pontagrossense Sepam)*

1º) Para colocarmos o mesmo divisor nas frações teremos que calcular o mínimo múltiplo comum entre b, a^2, e 1. Como a^2 e b são incógnitas, o MMC se dá pela multiplicação dos 3:

MMC = $a^2 \times b \times 1 = a^2 \times b$

$$\frac{a^2 \times a^2 + b \times b}{a^2 \times b} \geq \frac{2a^2 \times b}{a^2 \times b}$$

$a^4 + b^2 \geq 2a^2 \times b$

$a^4 - 2a^2 b + b^2 \geq 0$

2º) $a^4 - 2a^2 b + b^2$ é um produto notável (quadrado da diferença de dois termos):

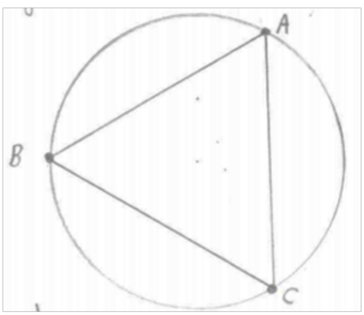
$(a^2 - b)^2$

3º) Temos então $(a^2 - b)^2 \geq 0$

4º) Com essa inequação, podemos dizer que para todos os números reais a e b, sendo eles inteiros, positivos, negativos, fracionários ou iguais a 0, o quadrado da diferença de dois termos sempre será maior que 0 já que qualquer número ao quadrado será positivo ou igual a 0.

Problema 6. *(Resolução de Tiago Daniel Gueiber - Colégio Marista Pio XII)*

Exemplo 1:
Considere o triângulo circunscrito ABC abaixo:



Sabe-se que a soma dos arcos $\widehat{BC} + \widehat{BA} + \widehat{AC} = 360°$ [I]

Também sabe-se que:

$$\widehat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}, \widehat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \text{ e } \widehat{C} = \frac{\overset{\frown}{BA}}{2} \qquad [II]$$

Substituindo [II] em [I]:

$$\frac{2\widehat{A} + 2\widehat{C} + 2\widehat{B}}{2} = \frac{360°}{2}$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$$

Isso mostra que a soma dos ângulos internos de um triângulo será sempre 180º, pois três pontos distintos e não colineares em um mesmo plano sempre delimitarão um único triângulo e uma única circunferência, onde esse triângulo será circunscrito a essa circunferência e apresentará sempre como a soma dos ângulos internos, a metade do valor do arco da circunferência, como no exemplo 1.

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Curiosidades

O número gugol

Você consegue ler o número 10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.00 0.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.00 0.000? Se você conseguiu, parabéns! Mas se não conseguiu, eu ajudo, trata-se do número 1 seguido de 100 zeros (ou 10^{100}). Ele também é conhecido como o número gugol e foi "criado" no início do século passado por Edward Kasner, enquanto ele buscava explicar conceitos matemáticos complexos, chamando atenção para núme-ros grandes, por meio de seus significados e quantidades. Na verdade, quem disse o termo pela primeira vez foi o sobrinho do matemático, Milton Sirotta, de apenas 9 anos. Edward pediu ao sobrinho que dissesse um nome para um número muito grande, com muitos zeros, e por isso teria que ter muitas letras "o" para representá-lo. Então, Milton disse: gugol! (em inglês: googol). Sim, esse nome foi uma das inspirações para o nome do Google. Entretanto, atribuir nomes a números muito grandes não é novidade, existem vários outros. Por exemplo, o número de Shannon (um 1 seguido de 120 zeros), que surge da estimativa da quantidade de partidas possíveis para um jogo de xadrez.

Dobrando papel

Vamos fazer uma brincadeira? Pegue uma folha de papel simples (qualquer uma). Agora, dobre no meio. Depois dobre novamente. E assim por diante, até onde conseguir. Provavelmente você conseguiu apenas 7 ou 8, mas não fique chateado, o recorde mundial são 12, não é tão distante. Claro, se o papel for maior fica mais fácil dobrar, e se ele for muito grande, você consegue dobrar quantas vezes quiser. Entretanto, quando você tiver dobrado 103 vezes o papel, a sua espessura será maior que a do universo observável. É sério! Isso se justifica porque acontece um crescimento exponencial. Se você dobrar perfeitamente o papel no meio, ele vai automaticamente dobrar de espessura, e assim por diante, logo, o crescimento é muito rápido. Você pode conferir no site https://gizmodo.uol.com.br/dobrar-papel-ao-meio/ o tamanho do papel de acordo com cada dobra, entretanto, recomendamos que se você tentar dobrar as 103 vezes, utilize um traje espacial.

O cíclico número 142857

Este número, se for multiplicado por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 ou 9, tem como resultado outro número cujos algarismos estão na mesma ordem do primeiro. Se por acaso, o resultado tiver 7 algarismos ao invés de 6, basta somar o primeiro com o último número para se obter novamente a sequência. Verifique:

$142857 \times 5 = 714285$

$142857 \times 8 = 1142856$, somando os extremos $(1+6) = 7 \Rightarrow 142857$

Ainda mais curioso: não é necessário utilizar o número 142857, nesta ordem. Podemos utilizar qualquer ordem desde que sejam utilizados os 6 algarismos. Repare:

$428571 \times 2 = 857142$

$285714 \times 3 = 857142$

$285714 \times 9 = 2571426$, somando os extremos $(2+6) = 8 \Rightarrow 571428$

E o que acontece se for multiplicado por 7?

Bom, nesse caso, vamos obter uma sequência só com o algarismo 9. Se forem mais de 6 algarismos, os que não forem 9 podem ser somados para dar 9.

$142857 \times 7 = 999999$

$857142 \times 7 = 5999994$ $(5+4=9)$

O número de ouro

O número de ouro é uma das teorias mais surpreendentes da Matemática e também a que mais está envolvida em mentiras. Ela fala de uma unidade irracional que estaria presente em vários elementos da natureza, da arquitetura e até do corpo humano. Representado pelo símbolo grego Phi(Φ), o número (arredondado com três casas decimais) 1,6180, que seria equivalente à razão diagonal/lado de um pentágono regular, é estudado desde a antiguidade por matemáticos. Ele indicaria a harmonia, por isso estaria presente em obras de Leonardo da Vinci, em construções, como as pirâmides do Egito, e até no comprimento das falanges humanas. Para saber mais, visite: https://www.unicesumar.edu.br/blog/curiosidades-sobre-matematica/

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Soluções dos Problemas Propostos

Soluções dos Problemas Propostos

Problema 1. Encontre todas as soluções reais para a equação:

$$(x^2-7x+11)^{x^2-13x+42}=1.$$

Solução de Leonardo Ferreira - Colégio Marista Pio XII:

Note que, como $x \in \mathbb{R}$, então $x^2-7x+11$, $x^2-13x+42 \in \mathbb{R}$. Sendo assim, só existem 3 casos:

(1) $x^2-7x+11=1$

(2) $x^2-7x+11=-1$ e $x^2-13x+42=2k, k \in \mathbb{Z}$

(3) $x^2-13x+42=0$ e $x^2-7x+11 \neq 0$

Caso (1):

$x^2-7x+11=1$

$x^2-7x+10=0$

$x=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times1\times10}}{2\times1}$

$x=\dfrac{7\pm3}{2}$

$x=2$ ou $x=5$

Caso (2):

$x^2-7x+11=-1$

$x^2-7x+12=0$

$x=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times1\times12}}{2\times1}$

$x=\dfrac{7\pm1}{2}$

$x=3$ ou $x=4$

Quando $x=3$, temos que $3^2-13\times3+42=12=2\times6,\ 6\in\mathbb{Z}$

Quando $x = 4$, temos que $4^2 - 13 \times 4 + 42 = 6 = 2 \times 3,\ 3 \in \mathbb{Z}$

Caso (3):

$x^2 - 13x + 42 = 0$

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \times 1 \times 42}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{13 \pm 1}{2}$$

$x = 6$ ou $x = 7$

Quando $x = 6$, temos que $6^2 - 7 \times 6 + 11 = 5 \neq 0$

Quando $x = 7$, temos que $7^2 - 7 \times 7 + 11 = 11 \neq 0$

Portanto, as soluções são: 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Problema 2. Em um quadrado $ABCD$, marque o ponto P no lado AB tal que $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{2}$ e marque o ponto Q na diagonal AC tal que $\frac{AQ}{QC} = 4$. Quais são as medidas dos ângulos do triângulo PDQ?

Solução da Pauta:

Vamos desenhar quatro linhas verticais e quatro linhas horizontais que dividem o quadrado $ABCD$ em 25 quadrados congruentes de lado l. Ambos os pontos P e Q são vértices de dois desses quadrados menores. Além disso, cada segmento PQ e DQ é a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos de comprimento l e $4l$ e cada um desses triângulos pode ser obtido do outro por uma rotação de 90^o em torno do ponto Q. Portanto, PDQ é um triângulo retângulo isósceles com um ângulo reto em Q.

Problema 3. Quatro amigos viajam para Caiobá - PR: Zeca está dirigindo um carro, Tom pilota uma moto, Juca está de caminhão e Manuel de bicicleta. Cada meio de transporte está mantendo velocidade constante. Zeca estava ao lado de Juca ao meio dia, estava ao lado de Manuel às 14h e estava ao lado de Tom às 16h. Já Tom estava ao lado de Juca às 17h e estava ao lado de Manuel às 18h. Em qual instante Manuel estava ao lado de Juca?

Solução da Pauta:

Considere um sistema de coordenadas com o eixo horizontal representando o tempo (em horas, com 0 correspondendo ao meio-dia) e o eixo vertical representando a distância. Como todos se movem com velocidade constante, seus movimentos serão representados por retas. Suponha que as retas k, l, m e n representam, respectivamente, o carro, o caminhão, a bicicleta e a moto. De acordo com o enunciado do problema, teremos

k passa pelos pontos $(0,a)$, $(2,b)$ e $(4,c)$;

l passa pelos pontos $(0,a)$ e $(5,d)$;

m passa pelos pontos $(2,b)$ e $(6,e)$;

n passa pelos pontos $(4,c)$, $(5,d)$ e $(6,e)$.

Devemos encontrar as coordenadas x do ponto de interseção das retas l e m. Para tanto, notamos que

(i) O coeficiente angular de k satisfaz $\dfrac{b-a}{2} = \dfrac{c-b}{2}$, isto é, $2b = a + c$.

(ii) Para o coeficiente angular de n: $\dfrac{d-c}{1} = \dfrac{e-d}{1}$, ou seja, $2d = c + e$.

(iii) O coeficiente angular de l é $\dfrac{d-a}{5}$ e sua equação é dada por $y = \dfrac{d-a}{4}x + a$.

(iv) O coeficiente angular de m é $\dfrac{e-b}{4}$ e sua equação é dada por $y - b = \dfrac{e-b}{4}(x-2)$.

Logo, l e m se intersectam em um ponto onde

$$\frac{d-a}{4}x + a = \frac{e-b}{4}(x-2) + b.$$

Resolvendo a equação acima para a variável x e usando (i) e (ii), obtemos

$$x = \frac{10(3b-e-2a)}{-4a+5b+4d-5e} = \frac{10(6b-2e-4a)}{-8a+10b+8d-10e} = \frac{10(-a+3c-2e)}{3(-a+3c-2e)} = \frac{10}{3}\,h.$$

Portanto, às 15h 20min Manuel estava ao lado de Juca.

Problema 4. Considere $a, b, c \in \mathbb{N}$. Quantas soluções existem para a equação: $a! + b! = c!$?

Solução da Pauta:

Notamos que $c > a$ e $c > b$, pois do contrário a expressão à esquerda do sinal da igualdade seria maior do que a expressão à direita. Logo, $c - 1 \geqslant a$ e $c - 1 \geqslant b$. Além disso, $c < 3$, pois senão

$$c! = c \cdot (c-1)! \geqslant 3(c-1)! = (c-1)! + (c-1)! + (c-1)! \geqslant a! + b! + (c-1)! > a! + b!$$

Precisamos examinar os casos restantes: $c = 0$, $c = 1$ ou $c = 2$. Não há soluções para os dois primeiros casos. Para $c = 2$, obtemos as soluções:

$$0! + 1! = 2!;\ 1! + 0! = 2! \text{ e } 1! + 1! = 2!$$

Problema 5. Os três zeros da função: $f(x) = x^3 - 3x^2 + \alpha x + 1$ estão em progressão aritmética. Qual o valor de α?

Solução de Leonardo Ferreira - Colégio Marista Pio XII:

Sejam a, b, c, com $a \leqslant b \leqslant c$ os zeros de $f(x)$, temos que, como a, b e c estão em PA, existe $r \in \mathbb{R} \geqslant 0$ tal que $a = b - r$ e $c = b + r$. Utilizando as relações de Girard, obtemos que:

$$a + b + c = \frac{-(-3)}{1}$$

$$(b - r) + b + (b + r) = 3$$

$$3b = 3$$

$$b = 1$$

$$abc = \frac{-1}{1}$$

$$(b - r)b(b + r) = -1$$

$$b^3 - br^2 = -1$$

$$1 - r^2 = -1$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$ab + ac + bc = \frac{\alpha}{1} = \alpha$$

Além disso, temos que

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$3^2 = (b - r)^2 + b^2 + (b + r)^2 + 2\alpha$$

$$9 = b^2 - 2br + r^2 + b^2 + b^2 + 2br + r^2 + 2\alpha$$

$$9 = 3b^2 + 2r^2 + 2\alpha$$

$$9 = 3 \times 1^2 + 2 \times 2 + 2\alpha$$

$$9 = 3 + 4 + 2\alpha$$

$$2 = 2\alpha$$

$$\alpha = 1$$

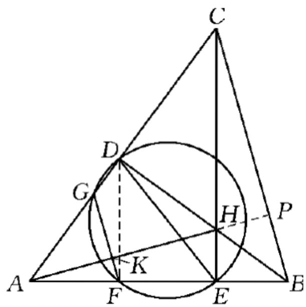
Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Problemas Propostos

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos. As melhores soluções serão publicadas na próxima edição e os autores receberão certificação de congratulação e um exemplar da mesma (Veja "Informações Gerais").

1. Encontre todos os números naturais m de 5 algarismos, m divisível por 11, cuja soma de seus algarismos seja 43.

2. Em um triângulo acutângulo ABC, H é o ponto de interseção das alturas CE e BD como mostra a figura abaixo:



Um círculo com diâmetro DE intersecta AB e AC nos pontos F e G, respectivamente. Os segmentos FG e AH concorrem no ponto K. Se $BC = 25$, $BD = 20$ e $BE = 7$, qual o comprimento de AK?

3. Considere uma função $f(x)$ definida em $\mathbb{R}$ satisfazendo $f(1) = 1$ e $f(x+5) \geqslant f(x)+5$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $g(x) = f(x)+1-x$, qual o valor de $g(2021)$?

4. Dada uma sequência (a_n) de números reais satisfazendo $a_0 = 1$ e

$$a_{n+1} = \frac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que

a) a_n é um inteiro positivo para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) $a_n a_{n+1} - 1$ é um quadrado perfeito para todo $n \in \mathbb{N}$.

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Informações Gerais

Envio de Artigos e Soluções

Os **Artigos** podem ser submetidos nas próximas edições da Revista da OPMat. Os documentos devem ser, preferencialmente, redigidos em Latex. As **Soluções** para os desafios encontrados na seção "Problemas Propostos" devem ser claras e submetidas juntamente com o nome do participante e o número da respectiva questão.

As submissões de artigos e soluções podem ser feitas pelo e-mail:

revistaopmat@gmail.com

Como Adquirir a Revista

Todos os alunos premiados com medalhas na 8^a OPMat receberão uma cópia física da Revista. A versão eletrônica está disponível no link:

https://www2.uepg.br/opmat/revista-da-opmat/

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, apresentar sugestões ou fazer correções através dos contatos:

Comitê Editorial
revistaopmat@gmail.com

Olímpiada Pontagrossense de Matemática
opmat@uepg.br - (42) 3220-3048
www2.uepg.br/opmat/
facebook.com/olimpiada.pontagrossensedematematica
Instagram: @opmat_uepg

Departamento de Matemática e Estatística da
Universidade Estadual de Ponta Grossa
Campus Uvaranas - Bloco L - Uvaranas
Avenida General Carlos Cavalcanti, 4748
Ponta Grossa - Paraná - CEP 84030-000
demat@uepg.br - (42) 3220-3050
www2.uepg.br/demat/

Realização:

UEPG Universidade Estadual de Ponta Grossa

proex PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO E ASSUNTOS CULTURAIS

DEMAT Departamento de Matemática e Estatística

Apoio:

Olimpíada Brasileira de Matemática

impa

Informações:

www2.uepg.br/opmat **E-mail: opmat@uepg.br**

www.facebook.com/olimpiada.pontagrossensedematematica

Fones: 99831-1222 / 3220-3048