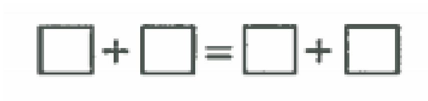
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ChaMat
Curso de aperfeiçoamento de habilidades Matemáticas

Gabarito do Primeiro Ciclo

Primeira Semana:

Desafio 1.1 Escolha quatro entre os números 1, 3, 4, 5 e 7 e escreva cada um deles nos quadradinhos ao lado, de forma que a igualdade das somas seja verdadeira. Qual dos números listados acima não será usado?

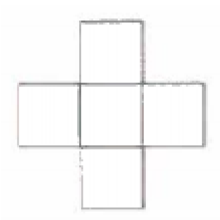


Solução. Observe que $1 + 3 + 4 + 5 + 7 = 20$. Se subtrairmos um número ímpar de 20, o resultado será ímpar e, portanto, não poderá ser dividido em dois grupos com a mesma soma. Logo, para podermos dividir em duas somas iguais, devemos escolher os quatro ímpares. Podemos dividi-los como $1 + 7 = 3 + 5$, e então quem não é escolhido é o 4.

Desafio 1.2 Guilherme escreveu dois números de 3 algarismos, utilizando cada um dos algarismos: 1, 2, 3, 4, 5 e 6 uma só vez e efetuou a soma desses números. Qual é o maior valor que a soma pode ter?

Solução. Como queremos o maior número, basta que coloquemos os maiores algarismos possíveis nas posições de centena, ou seja, devemos usar o 5 e o 6 nas centenas. Do mesmo modo, devemos usar o 3 e o 4 para as dezenas e o 1 e 2 para as unidades, nos dando, por exemplo a soma $642 + 531 = 1173$.

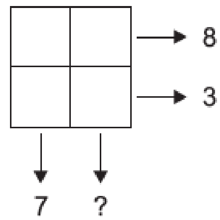
Desafio 1.3 *(Extra)* Os números 3, 5, 7, 8 e 9 devem ser escritos nos quadrados da figura abaixo, de modo que a soma dos números da linha (horizontal) seja igual à soma dos números da coluna (vertical). Qual número deve ser escrito no quadrado do centro?



Solução. A soma dos números dados é $3 + 5 + 7 + 8 + 9 = 32$. Ao escrevermos um número no centro, sobram quatro números. A soma dos dois números na horizontal deve ser igual à soma dos outros dois. Portanto, se subtrairmos de 32 o número do centro, o resto tem que ser um número par, pois é a soma de duas somas iguais. Logo, o número escrito no centro é o 8, pois é o único número par da lista. Não podemos escrever um número ímpar no centro, porque ao subtraí-lo de 32, o resto será ímpar e não poderá ser a soma de dois números iguais.

Segunda Semana:

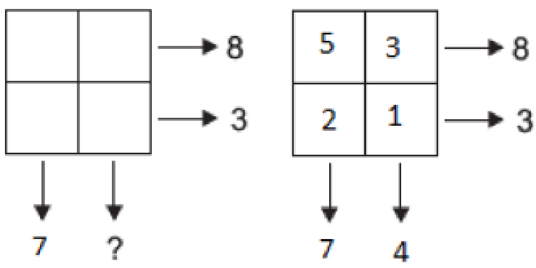
Desafio 1.4 (OBMEP Nível A 2018) Carlinhos escreveu um número em cada uma das quatro casas do tabuleiro abaixo:



A soma dos números escritos na primeira linha é 8, na segunda linha é 3 e na primeira coluna é 7. Qual é a soma dos números que Carlos escreveu na segunda coluna?

Solução: Não é necessário preencher a tabela para descobrir que o número que deve ser colocado no lugar do sinal de interrogação é 4. Vejamos o motivo: se quatro números forem escritos nas casas da tabela, somando-os linha a linha obteremos $3 + 8 = 11$. Por outro lado, somando-os coluna a coluna também devemos obter o mesmo resultado (propriedade comutativa da soma) e isto só é possível quando o sinal de interrogação for trocado pelo número 4 pois $4 + 7 = 11$. Logo, a soma dos números que Carlos escreveu na segunda coluna é 4.

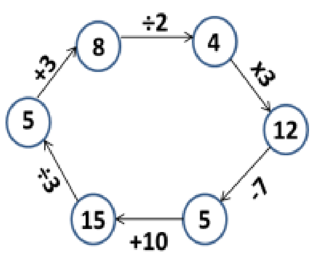
Observação: Em qualquer preenchimento da tabela compatível com os dados do enunciado poderemos encontrar o número 7 como sendo a soma dos números que Carlos escreveu na segunda coluna. Por exemplo:



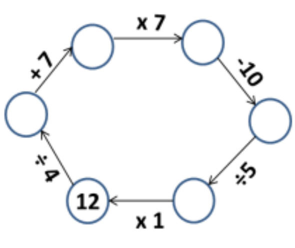
Desafio 1.5 Isabela queria multiplicar um número natural por 301, mas esqueceu-se do zero e multiplicou o número por 31, obtendo corretamente 372. Qual o resultado que ela deveria ter obtido?

Solução. Fazendo a operação inversa, percebemos que o tal número multiplicado por 31 é $372 \div 31 = 12$. Logo, o resultado que Isabela deveria ter obtido é $12 \times 301 = 3612$.

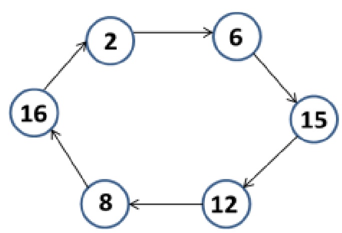
Desafio 1.6 *(Extra)* (6^a OPMat - 2018) A figura abaixo mostra círculos contendo números que satisfazem as operações indicadas nas setas:



a) Preencha os círculos com os valores corretos:

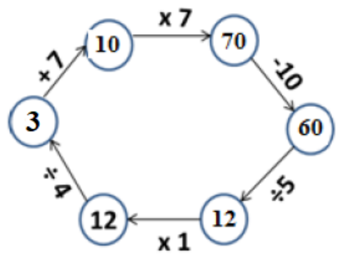


b) Preencha agora com as operações corretas:

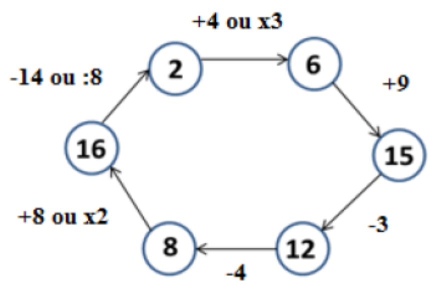


Solução:

a) Para as operações apresentadas, tem-se os seguintes valores:



b) Para os seguintes valores, tem-se as seguintes operações:



Terceira Semana:

Desafio 1.7 Um filhote de grilo pode dar pulos de duas distâncias: 4 e 5 metros. Ele disputa uma corrida de 50 metros que vai até a beira de um penhasco. Com quantos pulos o grilo chega ao fim da corrida sem passar do ponto final e cair do penhasco? Há mais de uma solução para este desafio?

Solução: Observe que 50 metros correspondem a 10 pulos de 5 metros cada um; neste caso o grilo só usa seus pulos de 5 metros. Esta é uma solução. Note que o grilo não pode usar só pulos de 4 metros, pois 50 não é múltiplo de 4. O grilo também pode "combinar" pulos de 4 e de 5 metros; neste caso, é preciso encontrar múltiplos de 4 e de 5 cuja soma seja 50. Vamos explorar as possibilidades em um quadro:

Múltiplos de 4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
Múltiplos de 5					30					10
Soma					50					50

Observe que os múltiplos de 5 terminam em zero ou 5. Como os múltiplos de 4 não terminam em 5, devemos procurar múltiplos de 4 que terminem em zero, pois a soma termina em zero. Temos assim mais duas soluções:

- 5 pulos de 4 metros ($5 \times 4 = 20$) e 6 pulos de 5 metros ($6 \times 5 = 30$), $20 + 30 = 50$.
- 10 pulos de 4 metros ($10 \times 4 = 40$) e 2 pulos de 5 metros ($2 \times 5 = 10$), $40 + 10 = 50$.

Resposta: Há três soluções: 10 pulos de 5 metros; 5 pulos de 4 metros e 6 pulos de 5 metros; 10 pulos de 4 metros e 2 pulos de 5 metros.

Desafio 1.8 Pedro possui mais que 30 e menos que 100 figurinhas. Se ele organizar as figurinhas em linhas de 7, sobrará uma. Caso ele organize em linhas de 10, sobrarão duas. Quantas figurinhas Pedro possui?

Solução: Se ele organizar as figurinhas em linhas de 7, sobrará uma, o que significa que o número de figurinhas de Pedro é um múltiplo de 7 somado com 1. Por outro lado, organizando em filas de 10 sobrarão duas, o que significa que este mesmo número é um múltiplo de 10 somado com 2. Estamos então procurando um número entre 30 e 100 que seja múltiplo de 7 mais 1, e também múltiplo de 10 mais 2. Vamos listar estes números, a partir de 30 até 100:

Múltiplos de 7 mais 1	36	43	50	57	64	71	78	85	**92**
Múltiplos de 10 mais 2	32	42	52	62	72	82	**92**		

Apenas o número 92 é ao mesmo tempo múltiplo de 7 mais 1 e múltiplo de 10 mais 2.

Resposta: Pedro possui 92 figurinhas.

Observação: Outra possibilidade é considerar os múltiplos de 10 somados com 2 entre 30 e 100: 32, 42, 52, 62, 72, 82 e 92, e dentre eles verificar que apenas 92 deixa 1 quando dividido por 7.

Desafio 1.9 *(Extra)* Professora Maria dividiu sua turma de 43 alunos em equipes. Cada equipe tem cinco ou seis membros. Quantas equipes foram formadas?

Solução. Dividindo 43 por 5, obtemos o quociente 8 e o resto 3. O número de equipes seria 8 de 5 membros, se não houvesse essa sobra de 3 pessoas. Na verdade, cada uma dessas 3 pessoas faz parte de uma equipe com 6 membros. Logo, o número de equipes é 8.

Observação: Importante destacar que não é possível termos exatamente 6 grupos de 5 alunos, pois nesse caso restariam $43 - 6 \times 5 = 13$ que não é múltiplo de 6. Usando o mesmo raciocínio, não será possível formar mais do que 5 grupos de 5 alunos.

Quarta Semana:

Desafio Avaliativo. (6^a OPMat - 2018) Marcos e Anita devem colocar bolinhas de plástico dentro de um saco e de uma caixa. Marcos tem que colocar, dentro do saco, uma bolinha no primeiro minuto, duas bolinhas no segundo minuto, três bolinhas no terceiro, quatro no quarto e assim por diante. Anita, por sua vez, tem que colocar, dentro da caixa, 30 bolinhas no primeiro minuto, 29 bolinhas no segundo minuto, 28 bolinhas no terceiro, 27 no quarto, etc.

a) Após quantos minutos, o saco conterá 45 bolinhas?

b) Após cinco minutos, quantas bolinhas haverá na caixa?

c) Após quantos minutos, o saco e a caixa terão a mesma quantidade de bolinhas?

Solução:

a) Sabendo que o saco é responsabilidade de Marcos tem-se

Minuto	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
Total de bolas no saco	1 1	$1+2=$ 3	$3+3=$ 6	$6+4=$ 10	$10+5=$ 15	$15+6=$ 21	$21+7=$ 28	$28+8=$ 36	$36+9=$ 45

Portanto, após 9 minutos o saco conterá 45 bolinhas.

b) Como a caixa é responsabilidade de Anita, tem-se que

Minuto	1'	2'	3'	4'	5'
Total de bolas no saco	30 30	$30+29=$ 59	$59+28=$ 87	$87+27=$ 114	$114+26=$ 140

Portanto, haverá 140 bolinhas na caixa após 5 minutos.

c) Observe que a quantidade de bolinhas torna-se a mesma após 30 minutos, uma vez que

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+28+29+30}_{\text{quantidade de bolinhas no saco}} = \underbrace{30+29+28+\cdots+3+2+1}_{\text{quantidade de bolinhas na caixa}}.$$

A quantidade de bolinhas não será a mesma antes de 30 minutos. Por exemplo, transcorridos exatamente 20 minutos, a quantidade de bolinhas no saco será

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 9 + 10 + 11 + \cdots + 18 + 19 + 20,$$

enquanto que na caixa teremos

$$30 + 29 + 28 + \cdots + 21 + 20 + 19 + 18 + \cdots + 11 + 10.$$

Perceba que as somas destacadas em azul são iguais, entretanto o restante dessas quantidades, destacado em vermelho, são diferentes. Logo, passados exatamente 20 minutos, a quantidade de bolinhas no saco e na caixa são diferentes. Esse raciocínio se aplica para qualquer outro minuto inferior a 30.

Portanto, após 30 minutos, o saco e a caixa terão a mesma quantidade de bolinhas.