UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ChaMat
Curso de aperfeiçoamento de habilidades Matemáticas

Terceiro Ciclo: 03/08 a 30/08
Encontro Presencial: 03/08 às 08h30min na Central de Salas

Primeira Semana:

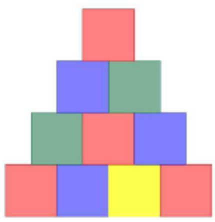
Desafio 2.1 Quantos sapos foram caçados pelos três pelicanos mostrados na figura abaixo?

Solução: Vamos chamar o pelicano do meio de Lica; se Peli pega dois sapos (o mínimo), Lica deve pegar um número maior, mas que deve ser menor do que 4, que é o número máximo de sapos pegados por Cano. Logo, Lica pode pegar 3 sapos, que é o número entre 2 e 4. Se Peli pega três sapos (um a mais que o mínimo), Lica deve pegar um número maior (pelo menos 4), mas que deve ser menor do que 4, que é o número máximo de sapos pegados por Cano. Logo, não é possível Peli pegar três sapos. Argumentando de forma análoga, concluímos que Peli não pode pegar mais do que dois sapos. Portanto Peli pegou dois sapos, Lica três e Cano quatro, e o total de sapos é $2 + 3 + 4 = 9$.

Resposta: Foram caçados 9 sapos.

Desafio 2.2 Luísa tem quatro cubos vermelhos, três cubos azuis, dois cubos verdes e um cubo amarelo. Ela constrói a torre mostrada na figura ao lado de tal forma que dois cubos que se encostam têm sempre cores diferentes. Qual é a cor do cubo que fica na posição marcada com o ponto de interrogação?

Solução: Uma estratégia é colocar primeiro os cubos vermelhos (em maior número), de modo que não sejam vizinhos; em seguida colocar os azuis, os verdes e o amarelo. Olhando de frente, uma das configurações possível é:



Observe que esta é a única configuração possível para os cubos vermelhos, de modo que eles não sejam vizinhos. Os cubos verdes e o amarelo podem trocar de lugar.

Resposta: A cor do cubo é vermelha.

Desafio Extra: Encontre todos os números de três algarismos cuja soma dos algarismos é 24.

Solução: O número de três algarismos que tem a maior soma de algarismos é $999 : 9 + 9 + 9 = 27$. Como queremos soma 24, devemos "tirar" três unidades nos algarismos de 999; vamos listar as possibilidades:

a) Tirar 3 unidades de um algarismo apenas: 699, 969, 996;

b) Tirar 2 unidades de um algarismo e 1 unidade de outro: 789, 798, 879, 897, 978, 987;

c) Tirar uma unidade de cada algarismo: 888.

Resposta: Os números são 699, 969, 996, 789, 798, 879, 897, 978, 987 e 888.

Segunda Semana:

Desafio 2.3 Dizemos que um número de dois algarismos é *bacana* quando a soma de seus algarismos resulta em um número par. Por exemplo, 46 é bacana pois $4 + 6 = 10$ é par; 35 também é bacana, pois $3 + 5 = 8$ é par. Mas 56 não é bacana, pois $5 + 6 = 11$ não é par. Quantos números bacanas existem?
Solução: Note que cada número bacana tem dois algarismos pares, ou dois algarismos ímpares. O zero não pode ser algarismo das dezenas, mas pode ser algarismo das unidades.

Algarismo das dezenas	Números com soma par dos algarismos
1	11, 13, 15, 17, 19
2	20, 22, 24, 26, 28
3	31, 33, 35, 37, 39
4	40, 42, 44, 46, 48
5	51, 53, 55, 57, 59
6	60, 62, 64, 66, 68
7	71, 73, 75, 77, 79
8	80, 82, 84, 86, 88
9	91, 93, 95, 97, 99

Há $5 \times 9 = 45$ possibilidades de soma par.
Resposta: Ao todo, existem 45 números bacanas.

Desafio 2.4 Na Rua das Cores há uma casa azul, uma vermelha, uma amarela, uma rosa e uma verde. Essas casas são numeradas de 1 a 5, conforme a figura.

- As casas vermelha e verde são vizinhas.
- As casas amarela e azul também são vizinhas.
- A casa rosa é vizinha das casas verde e azul.
- A casa amarela não é a de número 5.

De que cor é a casa de número 4?

Solução: A casa rosa não pode estar em uma das duas pontas da rua pois ela possui duas vizinhas e as casas dos extremos (1 e 5) só possuem uma casa vizinha. A casa rosa também não pode ser a casa 2 pois, já que as casas azul e verde são suas vizinhas, então:

- se a casa 1 for azul, a casa amarela não poderia ser vizinha da azul, o que contraria o enunciado.
- se a casa 1 for verde, a casa vermelha não poderia ser vizinha da casa verde, o que também contraria o enunciado.

A mesma maneira de pensar nos mostra que a casa rosa também não pode ocupar a casa de número 4. Logo, a casa rosa é a central, a de número 3. Como as casas azul e verde são vizinhas da rosa, há duas possibilidades para o ordenamento das casas:

- 1 – amarela, 2 – azul, 3 – rosa, 4 – verde, 5 – vermelha ou
- 1 – vermelha, 2 – verde, 3 – rosa, 4 – azul, 5 – amarela

Como a casa 5 não pode ser a amarela, as casas estão dispostas na seguinte ordem: 1 – amarela, 2 – azul, 3 – rosa, 4 – verde, 5 – vermelha e, portanto, a casa de número 4 tem cor verde.

Desafio Extra: O *pin* de um número é o produto de seus algarismos. Por exemplo, o pin de 421 é $4 \times 2 \times 1 = 8$. Encontre todos os números de três algarismos cujo pin é 12.
Solução: Vamos ver de quantas maneiras podemos escrever 12 como produto de três fatores, cada um deles um algarismo:

$$12 = 1 \times 2 \times 6 \ ; \ (1)$$
$$12 = 1 \times 3 \times 4 \ ; \ (2)$$
$$12 = 2 \times 2 \times 3 \ ; \ (3)$$

Observe que não analisamos, por exemplo, o caso em que $12 = 1 \times 1 \times 12$, pois 12 não é um algarismo. De (1), podemos escrever os números: 126, 162, 216, 261, 612 e 621. De (2), podemos escrever os números: 134, 143, 314, 341, 413 e 431. Finalmente de (3), podemos escrever os números: 223, 232 e 322.

Resposta: Os números de três algarismos que têm *pin* igual a 12 são: 126, 162, 216, 261, 612, 621, 134, 143, 314, 341, 413, 431, 223, 232 e 322.

Terceira Semana:

Desafio 2.5 No tabuleiro 4×4 ao lado as casas rosadas escondem carinha ☺ ou número. O número escrito numa casa indica quantas casas vizinhas têm a carinha. Duas casas são vizinhas quando têm um lado ou um canto comum. Na figura, aparecem algumas casas numeradas. A casa com o número 1, por exemplo, tem somente uma casa vizinha com a carinha. Quantas carinhas estão escondidas no tabuleiro?

	3	3	
2			
		2	
	1		

Solução: Na primeira linha, a primeira casa à esquerda com o número 3 tem cinco casas vizinhas. Duas delas têm números, logo as outras três casas têm que ter a carinha. Na primeira casa da segunda linha, com o número 2, já há duas casas vizinhas com a carinha e uma com o número 3. Logo, as outras duas casas vizinhas devem ter números, que representamos por X. Vemos então que a casa da terceira linha, com o número 2, já tem duas casas vizinhas com carinhas. Logo, as demais casas vizinhas têm um número X. Com isso, fica claro que há mais uma carinha em cada uma das casas que restaram. Concluímos que foram colocadas escondidas carinhas em cinco casas.

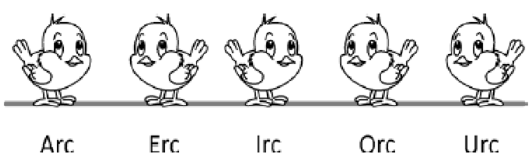
☺	3	3	
2	☺	☺	
		2	
	1		

☺	3	3	
2	☺	☺	
X	X	2	
	1		

☺	3	3	
2	☺	☺	X
X	X	2	X
	1	X	X

☺	3	3	☺
2	☺	☺	X
X	X	2	X
☺	1	X	X

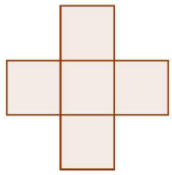
Desafio 2.6 Cinco pardais pousam num galho, conforme a figura.



Cada pardal pia tantas vezes quantos outros pardais ele vê. Por exemplo, Arc pia 4 vezes. Então um dos pardais virou a cabeça na direção oposta. Novamente todos eles piaram nas mesmas condições, só que nesta segunda vez o número total de piados foi maior. Qual dos pardais foi o que virou a cabeça?

Solução: Inicialmente, o número total de piados foi $4+1+2+3+4=14$. Perceba que se Arc ou Irc ou Orc ou Urc virarem a respectivas cabeça na direção oposta, todos os quatros verão uma quantidade de pardais menor ou igual a da situação inicial. Apenas Erc verá mais pardais ao virar a cabeça: inicialmente vê 1 e, se virar, verá 3. Assim, o número total de piados passou para $4+3+2+3+4=16$.

Desafio Extra: Os números 2, 3, 5, 6 e 7 devem ser escritos nos quadrados da figura ao lado, de modo que a soma dos números da linha (horizontal) seja igual à soma dos números da coluna (vertical). Quais números podem ser escritos no quadrado do centro?

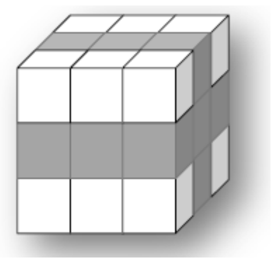


Solução: Começamos analisando a paridade do número do centro. Como temos 3 números ímpares e 2 números pares entre 2; 3; 5; 6 e 7, se colocarmos um número par no centro, restariam 3 ímpares e um par, mas neste caso a soma da linha seria par e da coluna ímpar ou vice-versa. Concluímos que o número do centro deve ser ímpar. Agora, escolhido um número ímpar para o centro devemos ver se os números restantes podem ser agrupados de dois em dois de forma que a soma seja a mesma. Vemos que isso é possível para o $5(2+7=3+6)$ e para o 7 $(2+6=3+5)$, mas não é possível para o 3 $(2+5 \neq 6+7;\ 2+6 \neq 5+7$ e $2+7 \neq 5+6)$.

Resposta: Podem ser escritos o 5 ou o 7.

Quarta Semana:

Desafio 2.7 *(Avaliativo)* (4^a OPMAT - 2016) Lucas montou um cubo com 27 cubinhos, alguns da cor branca e outros da cor cinza e apenas um da cor vermelha que ficou no centro do cubo, conforme a figura abaixo.



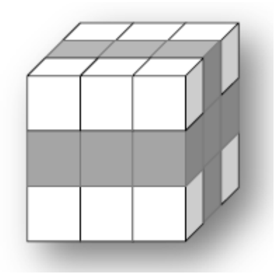
O cubo tem duas faces opostas contendo uma cruz cinza e cada uma das demais faces têm uma faixa cinza. Em cada face desse cubo podemos contar 9 quadradinhos. Responda, explicando o teu raciocínio:

a) Quantos são os cubinhos da cor cinza?

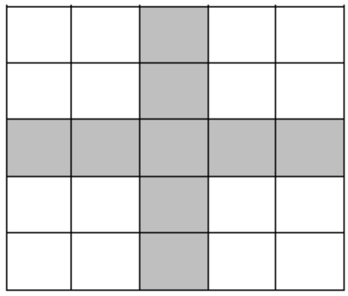
b) Se Lucas montar outro cubo similar ao primeiro, de modo que em cada face possamos contar 25 quadradinhos, no mínimo quantos cubinhos da cor cinza ele terá que usar?

Solução:

a) Cada faixa usa 3 cubinhos. Como há 4 faces com faixas, então para fazer as faixas são usados $4 \times 3 = 12$ cubinhos. Em cada face que tem a cruz aparecem 4 cubinhos que são das faixas e apenas o cubinho central precisa ser contado. Como há duas faces com cruz, devemos adicionar $2 \times 1 = 2$ cubinhos aos 12 já contados nas faixas. Portanto, são $12+2=14$ cubinhos da cor cinza.



b) Como cada face do cubo é 5×5, então cada faixa conterá 5 cubinhos. Como haverá 4 faces com faixas, então para fazer as faixas serão usados $4 \times 5 = 20$ cubinhos.



Em cada face que tem a cruz aparecem 4 cubinhos que são das faixas e apenas a cruz central, formada por 5 cubinhos, precisa ser contada. Como há duas faces com cruz, devemos adicionar $2 \times 5 = 10$ cubinhos aos 20 já contados nas faixas. Portanto, são $20 + 10 = 30$ cubinhos da cor cinza.
