Quinto Ciclo: 30/09 a 01/11
Gabarito referente ao Ciclo 5

Primeira Semana:

Desafio 5.1 Ester vai a uma papelaria para comprar cadernos e canetas. Nesta papelaria, cada caderno custa R$ 12,00. Se ela comprar 3 cadernos, sobram R$ 4,00. Se o seu irmão tivesse emprestado R$ 20,00, com o total Ester conseguiria comprar 2 cadernos e 6 canetas iguais, e não sobraria troco. Quanto custa cada caneta?

Solução: A quantia que Ester tem é $3 \times 12 + 4 = 40$ reais. Se o irmão tivesse emprestado os R$ 20,00, Ester teria $40 + 20 = 60$ reais. Como os dois cadernos custam $12 \times 2 = 24$ reais, para as canetas sobram $60 - 24 = 36$ reais. As 6 canetas são iguais, então cada caneta custa $36 \div 6 = 6$ reais (lembre que ela não recebe troco).
Resposta: Cada caneta custa R$ 6,00.

Desafio 5.2 José tem quatro brinquedos: um carrinho, um boneco, uma bola e um navio. Ele quer guardar esses brinquedos um ao lado do outro numa prateleira. O navio deve ficar ao lado do carrinho e o boneco também. De quantas maneiras José pode arrumar seus brinquedos nessas condições?

Solução: Como o navio e o boneco devem ficar ao lado do carrinho, o carrinho deve estar "no meio", ou seja, com duas possibilidades de posição. Com o carrinho na 2^a posição temos as possibilidades:

1ª posição	2ª posição	3ª posição	4ª posição
Navio	**Carrinho**	Boneco	Bola
Boneco	**Carrinho**	Navio	Bola

Com o carrinho na 3^a posição temos as possibilidades:

1ª posição	2ª posição	3ª posição	4ª posição
Bola	Navio	**Carrinho**	Boneco
Bola	Boneco	**Carrinho**	Navio

Ao todo, temos 4 possibilidades para dispor os brinquedos na prateleira.
Resposta: José pode arrumar seus brinquedos de quatro maneiras.

Desafio Extra: Um filhote de grilo pode dar pulos de duas distâncias: 4 e 5 metros. Ele disputa uma corrida de 50 metros que vai até a beira de um penhasco. Com quantos pulos o grilo chega ao fim da corrida sem passar do ponto final e cair do penhasco? Há mais de uma solução para este problema?

Solução: Observe que 50 metros correspondem a 10 pulos de 5 metros cada um; neste caso o grilo só usa seus pulos de 5 metros. Esta é uma solução. Note que o grilo não pode usar só pulos de 4 metros, pois 50 não é múltiplo de 4. O grilo também pode "combinar" pulos de 4 e de 5 metros; neste caso, é preciso encontrar múltiplos de 4 e de 5 cuja soma seja 50. Vamos explorar as possibilidades em um quadro:

Múltiplos de 4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
Múltiplos de 5					30					10
Soma					50					50

Observe que os múltiplos de 5 terminam em zero ou 5. Como os múltiplos de 4 não terminam em 5, devemos procurar múltiplos de 4 que terminem em zero, pois a soma termina em zero. Temos assim mais duas soluções:

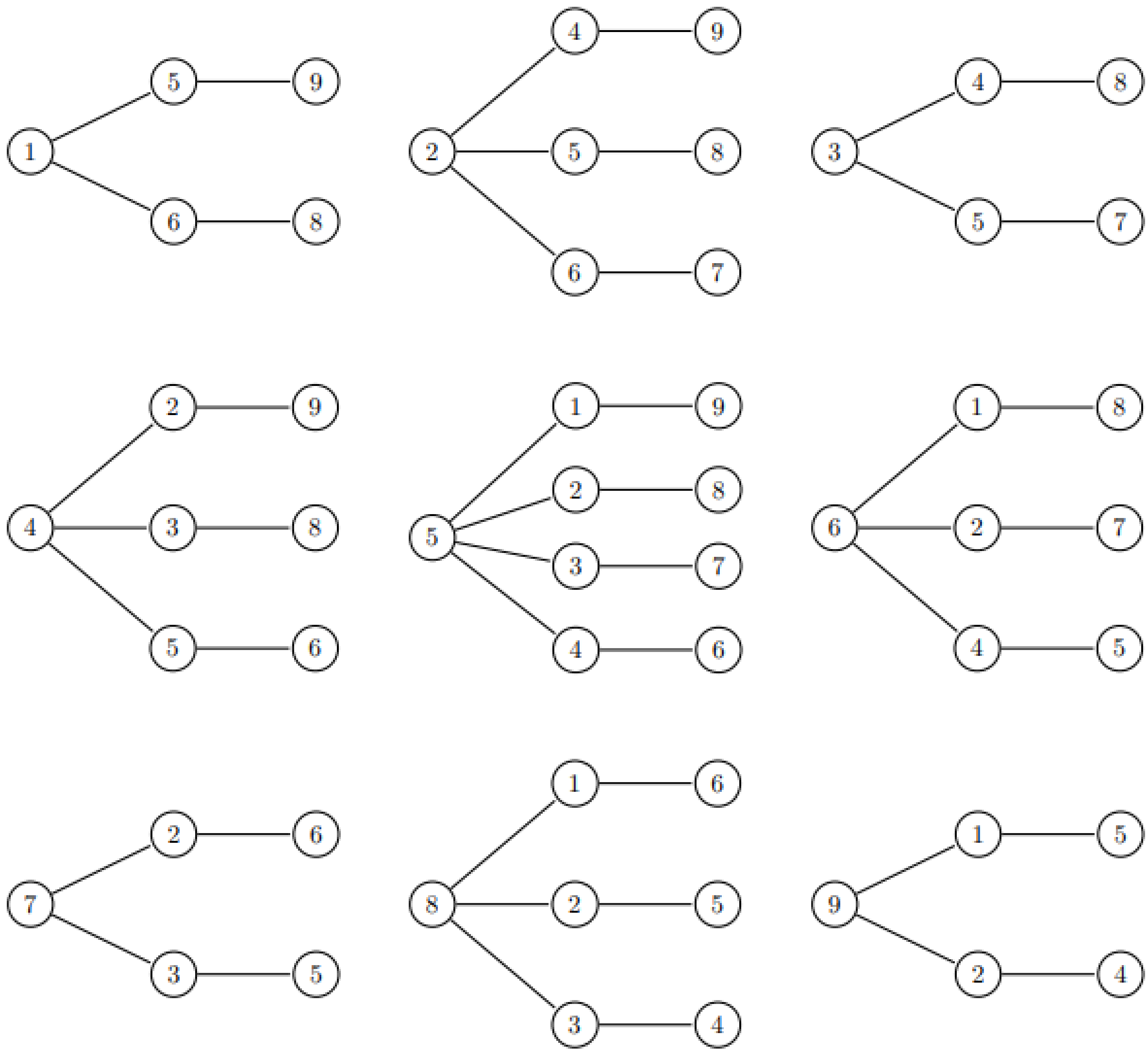
- 5 pulos de 4 metros ($5 \times 4 = 20$) e 6 pulos de 5 metros ($6 \times 5 = 30$), $20 + 30 = 50$.
- 10 pulos de 4 metros ($10 \times 4 = 40$) e 2 pulos de 5 metros ($2 \times 5 = 10$), $40 + 10 = 50$.

Resposta: Há três soluções: 10 pulos de 5 metros; 5 pulos de 4 metros e 6 pulos de 5 metros; 10 pulos de 4 metros e 2 pulos de 5 metros.

Segunda Semana:

Desafio 5.3 Encontre uma maneira de separar todos os números de 1 a 9 em três conjuntos com três números cada um, de modo que cada conjunto tenha a mesma soma. Há mais de uma solução para este problema?

Solução: Como cada conjunto deve ter a mesma soma, esta soma é um terço da soma de 1 a 9, ou seja, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ e $45 \div 3 = 15$. Devemos procurar três conjuntos de três números cada um, com os números de 1 a 9 (todos diferentes), cada um com soma 15. As árvores de possibilidades permitem listar todas as formas de obter 15 com números não repetidos de 1 a 9 (teremos algumas soluções repetidas):



Note que as árvores que começam com um número par têm 3 ramos, e as que começam com um número ímpar têm 2 ramos, com exceção do 5 (que tem 4 ramos). Para construir as soluções, podemos começar a partir da árvore do número 1 que tem só dois ramos. Se o problema admitir solução, um dos conjuntos tem que ser 1, 5, 9 ou 1, 6, 8. Olhando agora para a árvore do 2, vemos que, escolhido um dos conjuntos para o 1, só temos uma opção de conjunto para o 2: 2, 6, 7 e 2, 4, 9 respectivamente. Em cada um dos casos, basta observar que os três números restantes de fato somam 15, e assim obtemos as seguintes soluções:

$$\{1, 5, 9\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 8\} \text{ ou } \{1, 6, 8\}, \{2, 4, 9\}, \{3, 5, 7\}.$$

Este problema é equivalente a construir um quadrado mágico 3 por 3, com os números de 1 a 9, que apresenta como possível solução:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Observe que as duas soluções correspondem a escolher as linhas do quadrado mágico ou as colunas dele.
Resposta: Os conjuntos são $\{1, 5, 9\}$, $\{2, 6, 7\}$, $\{3, 4, 8\}$ ou $\{1, 6, 8\}$, $\{2, 4, 9\}$, $\{3, 5, 7\}$.

Desafio 5.4 Havia alguns bombons em uma caixa. Sílvia pegou metade deles e depois Antônio pegou metade do que sobrou. Em seguida, Clara pegou metade do que havia restado na caixa, deixando lá seis bombons. Quantos bombons havia inicialmente na caixa?

Solução:
Primeira solução: Começamos de trás para frente. Clara pegou metade do que tinha na caixa e sobraram seis. Isso quer dizer que ela pegou seis bombons e tinham 12 na caixa. Repetindo o mesmo raciocínio para Antônio, concluímos que tinham 24 bombons na caixa, dos quais 12 ele pegou e 12 sobraram. Finalmente, para Sílvia também fazemos o mesmo e chegamos a conclusão que a caixa continha 48 bombons no começo.

Segunda solução: Vamos calcular as frações da quantidade de bombons que foram retirados da caixa por Sílvia, Antônio e Clara. Sílvia pegou metade dos bombons, deixando metade deles na caixa; Antônio pegou "metade da metade", ou seja,

$$\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ao todo, Sílvia e Antônio tiraram da caixa

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

dos bombons. Sobraram portanto na caixa

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

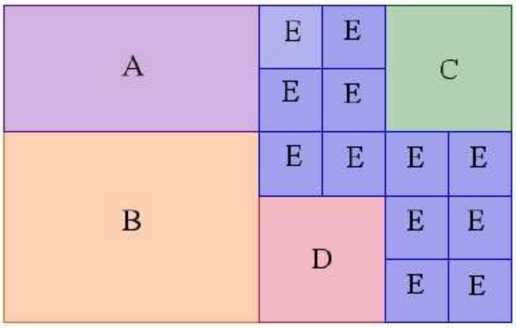
dos bombons. Clara por sua vez pegou metade do que havia restado na caixa, ou seja, na caixa restaram

$$\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

dos bombons, que corresponde a 6 bombons. Se $\frac{1}{8}$ do total de bombons é 6 bombons, devemos ter $6 \times 8 = 48$ bombons inicialmente na caixa.
Resposta: Havia inicialmente na caixa 48 bombons.

Comentários: Problemas com frações são constantes em competições deste nível; o grau de dificuldade pode ser alterado para os anos anteriores ao quinto. Por exemplo: Havia 30 bombons em uma caixa. Abelardo pegou a metade deles, depois Breno pegou um terço do que sobrou. Carlos chegou depois *de Breno e pegou um quinto do que ainda havia na caixa. Damião ficou com o restante. Quantos bombons sobraram para Damião?*

Desafio Extra: Um jardim retangular foi dividido como na figura a seguir.



Sabemos que

- Os canteiros C, D e E são quadrados.
- A e B são canteiros retangulares.
- Cada canteiro E tem 1 metro quadrado de área.
- O canteiro A tem área de 8 metros quadrados.

Pergunta-se:

a) Qual é a área do canteiro B?

b) Qual é a área total do jardim?

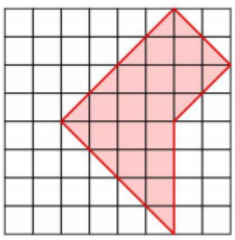
Solução:

a) Cada canteiro E tem uma unidade de área, de forma que medida de cada lado de E é 1 m. Assim, o lado menor do canteiro A mede 2 m; como sua área é 8 m^2, seu lado maior mede o número que multiplicado por 2 resulta 8, ou seja, mede 4 m. O maior lado do canteiro A é também o maior lado do canteiro B, isto é, mede 4 m. O menor lado do canteiro B corresponde a três lados do canteiro E, ou seja, mede $3 \times 1 = 3$ m. A área do canteiro B é o produto das medidas de seus lados: $4 \times 3 = 12$ m^2. Resposta: A área do canteiro B é 12 m^2.

b) O lado maior de todo o jardim mede quatro lados do canteiro E mais o lado maior do canteiro A: $4 + 4 = 8\,m$. O lado menor do jardim corresponde a cinco lados do canteiro E: $5 \times 1 = 5\,m$. A área de todo jardim é $8 \times 5 = 40\,m^2$.

Resposta: A área de todo o jardim é $40\,m^2$.

Comentários: Também com áreas as figuras mais exploradas são quadrados e retângulos; mas é possível trabalhar também com triângulos, como metade da área de um quadrado ou retângulo. Por exemplo: "A figura a seguir é um quadrado cujo lado mede 8 cm. Qual é a área da figura em vermelho dentro do quadrado?"



Terceira Semana:

Desafio 5.5 Ana, Berta, Carlos, Davi e Elisa estiveram assando biscoitos durante o fim de semana (sábado e domingo). Nesses dias, Ana fez 24 biscoitos, Berta 25, Carlos 26, Davi 27 e Elisa 28. Uma dessas pessoas fez ao todo o dobro do que fez no sábado, outra fez o triplo do que fez no sábado, outra fez o quádruplo, outra o quíntuplo e outra o sêxtuplo do que fez no sábado. Qual delas assou o maior número de biscoitos no sábado?

Solução: Observe que o número de biscoitos assado por cada um corresponde aos múltiplos que aparecem no enunciado; no entanto, estes múltiplos se referem ao número de biscoitos que foram assados no sábado. Vamos colocar as informações em um quadro, observando que:

1. a pessoa que fez o dobro do que fez no sábado, fez no total um múltiplo de 2; se fez n no sábado, fez também n no domingo, fazendo um total de $n + n = 2n$ biscoitos;

2. a pessoa que fez o triplo do que fez no sábado, fez no total um múltiplo de 3; se fez m no sábado, fez $2m$ no domingo, fazendo um total de $m + 2m = 3m$ biscoitos;

3. a pessoa que fez o quádruplo do que fez no sábado, fez no total um múltiplo de 4; se fez q no sábado, fez $3q$ no domingo, fazendo um total de $q + 3q = 4q$ biscoitos;

4. a pessoa que fez o quíntuplo do que fez no sábado, fez no total um múltiplo de 5; se fez p no sábado, fez $4p$ no domingo, fazendo um total de $p + 4p = 5p$ biscoitos;

5. a pessoa que fez o sêxtuplo do que fez no sábado, fez no total um múltiplo de 6; se fez w no sábado, fez $5w$ no domingo, fazendo um total de $w + 5w = 6w$ biscoitos.

Observe também que os totais de biscoitos feitos por cada um deve ser um múltiplo de 2, 3, 4, 5 ou 6; vemos então que o múltiplo de 2 é o 26, já que 26 não é múltiplo de 3, 4, 5 e nem de 6. O múltiplo de 5 tem que ser o 25, já que 25 não é múltiplo de 2, 3, 4 e nem de 6. O múltiplo de 3 tem que ser o 27, já que 27 não é múltiplo de 2, 4, 5 e nem de 6. O múltiplo de 4 tem que ser o 28, já que 28 não é múltiplo de 3, 5 e nem de 6. Note que 28 é também múltiplo de 2, mas já determinamos qual é o número que deve ser múltiplo de 2. Por fim, o 24 será o múltiplo de 6. Vamos agora construir um quadro com estas informações:

Nome	Total	Múltiplo de	Sábado	Domingo	Total
Ana	24	6: $6 \times 4 = (1+5) \times 4 = 24$	4	$5 \times 4 = 20$	$20 + 4 = 24$
Berta	25	5: $5 \times 5 = (1+4) \times 5 = 25$	5	$4 \times 5 = 20$	$20 + 5 = 25$
Carlos	26	2: $2 \times 13 = (1+1) \times 13 = 26$	13	13	$13 + 13 = 26$
Davi	27	3: $3 \times 9 = (1+2) \times 9 = 27$	9	$2 \times 9 = 18$	$18 + 9 = 27$
Elisa	28	4: $4 \times 7 = (1+3) \times 7 = 28$	7	$3 \times 7 = 21$	$21 + 7 = 28$

Analisando o quadro, temos a resposta:
Resposta: Carlos assou o maior número de biscoitos no sábado.

Comentários: O mais importante na resolução é descobrir que as informações nos dizem que cada quantidade total de biscoitos é múltiplo de um número. Feito isso, descobrir cada um deles se torna um trabalho simples. A ideia é a mesma do problema de Dido, que fizemos num treinamento anterior: um número mais seu dobro resulta no triplo desse número. A diferença é que o problema do Dido trazia apenas uma informação, e a tarefa era descobrir a posição de Dido. Abaixo o enunciado do problema do Dido: "Ao final de uma corrida com 100 participantes, Dido percebeu que o número de participantes que estavam atrás dele era o dobro do número de participantes que estavam à sua frente. Em que posição chegou Dido?"

Desafio 5.6 A área de um retângulo é $12\,cm^2$ e as medidas dos seus lados são números naturais. Quais são as possibilidades para o perímetro deste retângulo?

Solução: Como a área de um retângulo é calculada fazendo o produto da medida da base pela medida da altura, vamos estudar as possibilidades de fatoração de 12 em dois fatores.

Área(fatoração de 12)	Lado menor	Lado maior	Perímetro
$12 = 1 \times 12$	1	12	$1 \times 2 + 12 \times 2 = 26$
$12 = 2 \times 6$	2	6	$2 \times 2 + 6 \times 2 = 16$
$12 = 3 \times 4$	3	4	$3 \times 2 + 4 \times 2 = 14$
$12 = 4 \times 3$	3	4	$3 \times 2 + 4 \times 2 = 14$
$12 = 6 \times 2$	2	6	$2 \times 2 + 6 \times 2 = 16$
$12 = 12 \times 1$	1	12	$1 \times 2 + 12 \times 2 = 26$

Resposta: As possibilidades para o perímetro são 26 cm, 16 cm ou 14 cm.

Desafio Extra: Marcelo criou uma lista de cinco músicas A, B, C, D e E, que duram, respectivamente, 3min, 2min30s, 2min, 1min30s e 4min. As cinco músicas tocam repetidamente nessa ordem e sem interrupção. Quando Marcelo saiu de casa, a música C estava tocando. Ao retornar, exatamente uma hora depois, que música estava tocando?

Solução: Observe que a sequência ABCDE dura 13 minutos (são 3 + 2 + 2 + 1 + 4 = 12 minutos, mais 30 + 30 = 60 segundos, que corresponde a 1 minuto). Quando Marcelo saiu, estava tocando a música C. A sequência CDE (com C já tendo começado e não acabado), dura mais de 5min30s (o tempo das músicas DE) e menos do que 7min30s (o tempo completo das músicas CDE). Em uma hora, a sequência ABCDE toca 4 vezes e sobram 8 minutos, pois 60 = 4 × 13 + 8 = 52 + 8. A sequência, começando com a música C, em uma hora é:

$$\underbrace{CDE}_{\text{no máximo } 7min30s} \quad \underbrace{ABCDEABCDEABCDEABCDE}_{52min}\ A.$$

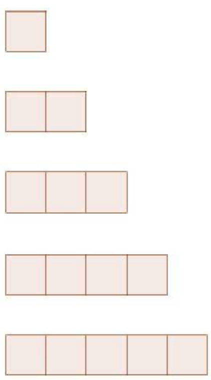
Como a soma de 52min com 7min30s é 59min30s (considerando a duração máxima de CDE), a soma de 52min com 5min30s é 57min30s (considerando a duração "mínima"de CDE), e a música A dura 3min, quando Marcelo chegou estava tocando a música A.

Resposta: Estava tocando a música A.

Comentários: O problema envolve "fazer contas"com horas (base 60), minutos e segundos, além do reconhecimento da sequência. Para crianças mais jovens, o problema pode ser alterado para horas cheias, com menos músicas.

Quarta Semana:

Desafio 5.7 *(Avaliativo)* Observe a sequência abaixo. Cada lado de cada quadrado abaixo é construído com um palito. Lados que são comuns a dois quadrados usam um único palito. Assim, no primeiro desenho usamos 4 palitos, no segundo usamos 7 palitos, no terceiro 10, etc.



a) Quantos palitos são usados para fazer uma fila com 500 quadrados como na sequência?

b) Quantos quadrados podemos colocar em fila com 1050 palitos como na sequência? Haverá sobra?

Solução: Observe que a cada quadrado que aumentamos, acrescentamos 3 palitos. A quantidade de palitos em uma fila de n quadrados é $3n + 1$.

Quantidade de quadros	Quantidade de palitos	
1	4	$3 \times 1 + 1 = 4$
2	$4 + 3 = 7$	$3 \times 2 + 1 = 7$
3	$7 + 3 = 10$	$3 \times 3 + 1 = 10$
4	$10 + 3 = 13$	$3 \times 4 + 1 = 13$
5	$13 + 6 = 16$	$3 \times 5 + 1 = 16$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n		$3n + 1$

a) Para uma fila de 500 quadrados, usamos $3 \times 500 + 1 = 1501$ palitos.

b) Devemos procurar o múltiplo de 3 mais 1 mais próximo de 1050 e menor do que 1050. 1050 é múltiplo de 3, e o múltiplo anterior à ele é $1050 - 3 = 1047 = 3 \times 349$. Então o múltiplo de 3 mais 1 mais próximo de 1050 é $1047 + 1 = 1048$. Com 1048 palitos podemos fazer 349 quadrados; com 1050 palitos podemos fazer 349 quadrados e sobram 2 palitos.

Resposta

a) 1501 palitos são usados para construir 500 quadrados.

b) Com 1050 palitos podemos fazer 349 quadrados e sobrarão 2 palitos.

Comentários: Problemas de reconhecimento de padrões são frequentes em competições olímpicas. O cuidado que devemos ter neste nível é apresentar uma quantidade razoável de termos, e identificar que se trata de uma sequência com um padrão (em nosso problema, a expressão "fazer uma fila"é o padrão identificado pelo desenho). Lembramos que a palavra "sequência"não significa que há um padrão, apenas que temos uma lista de termos ordenados (1º termo, 2º termo, etc.). A rigor, a resolução formal de problemas deste tipo envolve outros argumentos que não estão disponíveis para os alunos deste nível (como o princípio de indução, por exemplo). No entanto, se problemas deste tipo forem bem formulados, podem contribuir desde muito cedo para desenvolver a estratégia de reconhecer padrões numéricos e padrões em figuras.