Volume 5
2023

Revista da OPMat UEPG

"Promovendo a inclusão social e ajudando a mudar o cenário da educação."

Universidade Estadual de Ponta Grossa,
Setor de Ciências Exatas e Naturais
Departamento de Matemática e Estatística

Revista da OPMat

v.5 (2023)

Olimpíada Pontagrossense de Matemática
UEPG

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Reitor: Miguel Sanches Neto
Vice-Reitor: Ivo Mottin Demiate

PRÓ-REITORIA DE ASSUNTOS ADMINISTRATIVOS - PROAD

Pró-Reitor: Emerson Martins Hilgemberg

PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO - PROEX

Pró-Reitora: Beatriz Gomes Nadal

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO - PROGRAD

Pró-Reitor: Miguel Arcanjo de Freitas Júnior

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Chefe: Deyse Márcia Pacheco Gebert
Chefe Adjunto: Jocemar de Quadros Chagas

Apoio:

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA - IMPA

CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UEPG

Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática - OPMat/ Universidade Estadual de Ponta Grossa. Departamento de Matemática e Estatística. v.1 (2019). Ponta Grossa: UEPG/ DEMAT, 2023.

Anual
v. 2, 2020
v.3, 2021
v.4, 2022
v.5, 2023
Link: https://www2.uepg.br/opmat/revista-da-opmat/

1. Matemática – competições. 2. Matemática – questões problemas. 3. Matemática – exercícios. I. Universidade Estadual de Ponta Grossa. II. Departamento de Matemática e Estatística. III. T.

CDD: 510

Ficha Catalográfica elaborada por Maria Luzia Fernandes Bertholino dos Santos – CRB9/986

Arte da Capa:
CCOM - Coordenadoria de Comunicação Social

Postagem:
Segundo semestre de 2023

Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática v. 5 (2023)

Sumário

Apresentação

Caro Leitor,

A *Revista da Olímpiada Pontagrossense de Matemática* é resultado do projeto de extensão: *Olímpiadas de Matemática: Promovendo a Inclusão Social e ajudando a mudar o cenário da Educação*, desenvolvido pelo Departamento de Matemática e Estatística da UEPG. Tem periodicidade anual, sendo este o seu 5° volume.

Esta edição apresentará os problemas e as soluções referentes à 8^a OPMat - Olimpíada Pontagrossense de Matemática. O principal objetivo da Revista é compor um material robusto em conteúdos matemáticos com vista a ser utilizado como recurso pedagógico ao letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e como fonte de estudo e treinamento para olimpíadas de matemática.

Encorajamos todos os leitores a nos enviar soluções para os desafios encontrados na seção "Problemas Propostos", bem como submeter artigos, que serão publicados na próxima edição, desde que sejam aprovados pelo Comitê Editorial da Revista.

Para ficar por dentro das notícias da Olimpíada Pontagrossense de Matemática, próximas edições, fotos e resultados, acompanhe-nos pelas nossas redes sociais:

`https://www.facebook.com/opmat.uepg`

`instagram.com/opmat_uepg/`

e pela homepage:

`www2.uepg.br/opmat/revista-da-opmat/`

Ponta Grossa, 28 de novembro de 2023.

Comitê Editorial

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

8ª OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

"Promovendo a inclusão social e ajudando a mudar o cenário da educação."

Premiados

A Cerimônia de Premiação da *8ª Olimpíada Pontagrossense de Matemática* ocorreu no dia 03 de dezembro de 2022, no Auditório da UniCesumar, em dois horários distintos: às 09h30 para os alunos do **Nível Júnior** (4º e 5º anos do Ensino Fundamental) e às 14h30 para os alunos do Níveis **1** (6º e 7º anos do Ensino Fundamental II), **2** (8º e 9º anos do Ensino Fundamental II), **3** (1ª e 2ª séries do Ensino Médio) e **4** (3ª e 4ª séries do Ensino Médio e aqueles estudantes que tenham concluído o Ensino Médio há menos de um ano e não tenham ingressado em nenhum curso superior, quando da realização da primeira fase da OPMat).

No período da manhã, a Cerimônia de Premiação contou com a presença das seguintes autoridades:

- Prof. Ivo Mottin Demiate - Vice-Reitor da Universidade Estadual de Ponta Grossa
- Profa. Maria Salete Marcon Gomes Vaz - Pró-Reitora de Extensão e Assuntos Culturais da UEPG
- Profa. Sandra Maria Scheffer - Diretora de Extensão Universitária da PROEX-UEPG
- Profa. Sandra Mara Dias Pedroso - Representante do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa
- Profa. Silvia Aparecida Medeiros Rodrigues - Representante da Secretaria Municipal de Educação de Ponta Grossa e Coordenadora do Ensino Fundamental
- Profa. Agnes Regina Krambeck Cabrini - Coordenadora de Matemática e Assessora Pedagógica da Secretaria Municipal de Educação
- Profa. Luzia de Fátima Medeiros de Carvalho - Coordenadora de Matemática e Assessora Pedagógica da Secretaria Municipal de Educação
- Prof. Luiz Alexandre Gonçalves Cunha - Diretor do Setor de Ciências Exatas e Naturais da UEPG

- Profa. Deyse Marcia Pacheco Gebert - Chefe do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG
- Prof. José Trobia - Vice Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPG e membro da comissão organizadora da OPMat
- Profa. Marli Terezinha Van Kan - Coordenadora do curso de Licenciatura em Matemática EAD
- Profa. Elisangela dos Santos Meza - Coordenadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Nessa Cerimônia foram premiados 120 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 13,17% dos alunos que participaram do Nível Júnior da 8ª OPMat): 6 com medalhas de ouro; 13 com medalhas de prata; 52 com medalhas de bronze e 49 com medalhas de menção honrosa.

Também foram entregues troféus para as escolas e para os professores dos alunos que obtiveram a maior pontuação na 8ª OPMat da rede particular e da rede pública. Todos os professores cujos alunos foram premiados receberam certificados de congratulações, assim como todas as escolas participantes da 8ª OPMat.

No período da tarde, a Cerimônia de Premiação contou com a presença das seguintes autoridades:

- Prof. Miguel Sanches Neto - Reitor da Universidade Estadual de Ponta Grossa
- Profa. Maria Salete Marcon Gomes Vaz - Pró-Reitora de Extensão e Assuntos Culturais da UEPG
- Profa. Sandra Mara Dias Pedroso - Representante do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa
- Prof. Luiz Alexandre Gonçalves Cunha - Diretor do Setor de Ciências Exatas e Naturais da UEPG
- Prof. Marcos Teixeira Alves - Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPG e membro da comissão organizadora da OPMat
- Prof. Marciano Pereira - Coordenador do Curso de Bacharelado em Matemática Aplicada da UEPG

- Profa. Marli Terezinha Van Kan - Coordenadora do curso de Licenciatura em Matemática EAD
- Profa. Elisangela dos Santos Meza - Coordenadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Na ocasião foram premiados 269 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 28,38% dos alunos que participaram da segunda fase da 8ª OPMat): 18 com medalhas de ouro; 38 com medalhas de prata; 98 com medalhas de bronze e 115 com medalhas de menção honrosa.

Também foram entregues troféus para as escolas e para os professores dos alunos que obtiveram a maior pontuação na 8ª OPMat da rede particular e da rede pública em cada nível (1, 2, 3 e 4). Todos os professores cujos alunos foram premiados receberam certificados de congratulações, assim como todas as escolas participantes da 8ª OPMat.

Nível Júnior

Troféu

- Israel Leonardo Los Barbosa (Escola Elite Tales de Mileto)
- Adrian Christopher Guimarães Ferreira (Escola Municipal Dr. Edgar Sponholz)

Ouro

- Israel Leonardo Los Barbosa (Escola Elite Tales de Mileto)
- Adrian Christopher Guimarães Ferreira (Escola Municipal Dr. Edgar Sponholz)
- Luis Gustavo Baggio Mongurel (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Vitor Arthur Marçal Beck (Colégio Santo Ângelo)
- Rafael Merenda Izidoro (Colégio Alfa Plus)
- Gabriel Andrei de Amorim Presotto (Escola Municipal Fioravante Slaviero)

Prata

- Maria Eduarda de Figueiredo Penteado de Moura Jorge (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Conrado Mika Velasco (Colégio Sant'Ana)
- Vitor Hugo Gebeluca da Silva (Escola Municipal Profa. Ecléa dos Passos Horn)
- Ana Caroline Maiéski Nogueira (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Priscila Sarah Souza de Andrade (Escola Municipal Profa. Ruth Holzmann Ribas)
- João Victor Zampieri (Colégio Sant'Ana)
- João Carlos Telchinski Borges (Colégio Sant'Ana)
- Gabriel da Silva Kava (Escola Municipal Pref. Theodoro Batista Rosas)
- Murilo Vidal Moschen (CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha)
- Miguel Engelmann Maekawa (Colégio Marista Pio XII)
- Lívia Gorte Dutko (Colégio Integração)
- Isadora Perufo da Cruz (Colégio Alfa Plus)
- Henrique Chuartz dos Santos (Escola Municipal Pref. Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)

Bronze

- Mariana Saad Vargas (Colégio Alfa Plus)
- Lucas Francischinelli Freitas (Colégio Santo Ângelo)
- Leonardo Guimarães de Almeida (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Julia Lievore Levandowski (Colégio Marista Pio XII)
- Clara Gama de Jesus (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Cecilia Bandeira (Escola Elite Tales de Mileto)

- Eduardo Caieiro (Colégio Sagrada Família São Zygmunt)
- Vitor Adamo Milani (Colégio Positivo Master)
- Yasmin Gaspar Sampaio da Cruz (Colégio Marista Santa Mônica)
- Natália Bordinhão Bomfati (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Manuela Meotti de Almeida (Colégio Alfa Plus)
- Enzo Gonçalves Silva (Colégio Sagrada Família)
- Alexandre Vinicius Pereck (Colégio Sagrada Família)
- Yuri Ferreira de Oliveira (Colégio Sagrada Família)
- Vicente Matuch Valenga (Colégio Marista Pio XII)
- João Inácio Bonardi Kniphoff da Cruz (Colégio Alfa Plus)
- Cassia Müller Giebeluka (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Ana Luísa Nasser Matos Gueiber (Colégio Santo Ângelo)
- Nicolas Toledano (Colégio Santo Ângelo)
- Ana Rosa Scoczynski Ribeiro Martins (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Marco Delinski de Mattos (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Leonardo Souza Adamowicz (Escola Rosazul)
- João Miguel de Freitas Adriano (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Helena Rauber Borges (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Guilherme Otávio Elias (Colégio Alfa Plus)
- Emily Vitória Lopes (Colégio Marista Santa Mônica)
- Thiago Alexandre Almeida Bonet (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- Ícaro Augusto Jesus de Souza (Escola Municipal Profa. Maria Coutin Riesemberg)

- Felipe Guedes Coelho (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Samuel Isaias Dias Ferreira (Escola Municipal Pref. Dr. Plauto Miró Guimarães)
- Karlos Eduardo Has (Escola Municipal Profa. Maria Antônia de Andrade)
- Isabelly dos Santos Teixeira (Escola Municipal São Jorge)
- Ane Gabriely Guimarães (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Victor Kauan Santos Moraes (Escola Municipal Dep. Mário Braga Ramos)
- Théo Teixeira dos Santos (Escola Municipal Pref. Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Davi Cunha Hinkel (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Renato Assunção Sommer (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Jhonatan Cardoso de Mello (Escola Municipal Profa. Maria Antônia de Andrade)
- Davi Rosa Yoshizaki (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Camila Scheidt Pereira (Escola Municipal Profa. Dércia do Carmo Noviski)
- João Bernardo Rodrigues Soares (Escola Municipal Pref. José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Evillyn Eduarda Fernandes (Escola Municipal Profa. Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Melyssa Sarnieski Rodrigues (Escola Municipal Profa. Loise Foltran de Lara)
- Melissa Marques Palhão (Escola Municipal Dr. Raul Pinheiro Machado)
- Livia Gabriela Sabatovicz de Paula (Escola Municipal Profa. Kazuko Inoue)
- Laura D'Avila Manys (Escola Municipal São Jorge)
- Isadora Aparecida Ferreira Nepomuceno dos Santos (CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha)
- Guilherme Krüger Schust (Escola Municipal Humberto Cordeiro)

- Gabriel Czanoski Pereira (Escola Municipal Prof. Paulo Grott)
- Felipe Teixeira Baldo (Escola Municipal Prof. Jorge Dechandt)
- Anny Vitoria Morais Oliveira (Escola Municipal Prof. Osni Vilaca Mongruel)
- Alana da Silva Jacumasso (CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha)

Menção Honrosa

- Maria Eduarda Regalio Campagnoli (Colégio Marista Pio XII)
- João Eduardo Bueno Antunes (Escola Municipal Profa. Judith Macedo Silveira)
- Isabelly Vitória dos Santos Costa (Escola Municipal Dr. José Pinto Rosas)
- Aron Stahlschmidt Trechinski (Colégio Sagrada Família São José)
- Sabrina Grisoski de Oliveira (Escola Municipal Dr. José Pinto Rosas)
- Nicolas Marques Cardozo (Escola Municipal Prof. Rubens Edgard Furstenberger)
- Myrian Castro Witchemichen (Escola Municipal Pref. Major Manoel Vicente Bittencourt)
- Melyssa Vitória Régis Matuani (Escola Municipal Profa. Guitil Federmann)
- Maria Luiza Nogare Gabriel da Silva (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Maria Luiza Janúario de Paula Raycoski (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Julia Do Amaral Schena (Colégio Pontagrossense Sepam)
- João Carlos da Luz (Colégio Marista Pio XII)
- Heitor Bienias (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Guilherme dos Santos de Oliveira (Escola Municipal Pref. José Bonifácio Guimarães Vilela)

- Gabriel Mainardes da Silva (Escola Municipal Prof. Paulo Grott)
- Estevam Ferraz Costa Siqueira (Escola Municipal Profa. Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Daniel da Silva Cardoso (Escola Municipal Profa. Adelaide Thomé Chamma)
- Wendril de Abreu dos Santos (Escola Municipal Profa. Lucia Pacher)
- Rafaela Monteiro de Carvalho (Colégio Marista Pio XII)
- Maria Eduarda Lopes de Auda (Escola Municipal Profa. Maria Laura Pereira)
- Letícia Nogaroto Vicari (Escola Elite Tales de Mileto)
- Jeferson Matheus Paliano Dias (Escola Municipal Profa. Braulina Carneiro de Quadros)
- Heitor Hablich Silvestre (Colégio Positivo Master)
- Gabrielly Fagundes de Deus (Escola Municipal Pref. Dr. Fulton Vitel Borges de Macedo)
- Bernardo Silva Ferreira (Escola Municipal Profa. Maria Laura Pereira)
- Ana Paula de Freitas Matter (Colégio Positivo Master)
- Mayumi Beatriz Umezaki Wolf (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Lorenzo Henrique Gerlinger de Souza (Escola Municipal Profa. Maria Laura Pereira)
- João Gusttavo de Oliveira (Escola Municipal Profa. Marta Filipkowski de Lima)
- Danilo Blasczak Petla Silva (Escola Municipal Zanoni Rogoski)
- Arthur Martins (Colégio Sagrada Família São José)
- Arthur Alves Christane (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Pietro Gabriel Pedroso (Escola Municipal Dep. Mário Braga Ramos)
- Pedro Kobay Prestes (Colégio Sagrada Família)

- Nicole Luise Monteiro dos Santos (Escola Municipal Profa. Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Miguel Augusto Lara (Escola Municipal Pref. José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Mario Yudi Benício Teodoro (Escola Municipal Pref. Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Maria Fernanda Kviatcoviski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Lucas Emanuel Maravieski Ferreira (Escola Municipal Prof. Osni Vilaca Mongruel)
- Leonardo Silvestre da Silva (Escola Municipal Vereador Adelino Machado de Oliveira)
- Laura Barbosa de Christo (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Lais Gabrielly Resende (Escola Municipal Profa. Marly Cecília Camargo Chiafitela)
- Isadora Vitória Alves Machado da Rosa (Escola Municipal Pref. Ernesto Guimarães Vilela)
- Guilherme Lammerhirt de Souza (Colégio Sant'Ana)
- Gabriela Vitória Vozniak Koza (Escola Municipal Profa. Ruth Holzmann Ribas)
- Erick Rodrigo Antunes Braga (Escola Municipal Pref. Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Emanuelly Ardengui Nadal Oyarzabal (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Daniel Shemitzler de Almeida (Escola Desafio)
- Bianca Gabrielly Klosowski de Souza (Escola Municipal Prof. Zair Santos Nascimento)

Nível 1

Troféu

- Lucas Galvan Calçada (Colégio Integração)
- Sophie Victória Fernandes de Jesus (Colégio Estadual Cívico-Militar Professor Colares)

Ouro

- Lucas Galvan Calçada (Colégio Integração)
- Pedro Kaito Yasuda (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Henrique Galvan Calçada (Colégio Integração)
- Haroldo Borg Filho (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Carlos Eduardo Gonçalves Reis (Escola Elite Tales de Mileto)

Prata

- Lorenzo Barbosa Oberg da Cruz (Colégio Marista Pio XII)
- Sofia Siduoski Wendler (Colégio Marista Pio XII)
- Ana Julia Schafranski Coelho (Escola Elite Tales de Mileto)
- Manuela Sabedotti (Colégio Marista Pio XII)
- Valentina da Fonseca Hey (Colégio Marista Pio XII)
- Massayuki Munefiça (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- João Vitor Lourenço Girardi (Colégio Marista Pio XII)
- Nicolas Zampieri Rosa (Colégio Sant'Ana)
- Tomás Samoilenko Polachini (Colégio Santo Ângelo)
- Francisco Fahr Do Porto (Escola Desafio)

Bronze

- Sophie Victória Fernandes de Jesus (Colégio Estadual Cívico-Militar Professor Colares)
- Allanys Eduarda Maciel Sikorski (Escola Estadual Profa. Halia Terezinha Gruba)
- Guilherme Raphael Edmilton dos Santos (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)
- Henrique Pereira Coutinho (Colégio Estadual Prof. Júlio Teodorico)
- Mayra Caetano (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)
- Ana Belly Tomaz de Miranda (Colégio Estadual Dorah G. Daitschman)
- David Cesar Nusda Junior (Colégio Estadual 31 de Março)
- Antoniel Rauch (Colégio Estadual Cívico-Militar Professor Colares)
- Jhonatan Wesley Ferreira de Freitas (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Ana Clara de Araujo Fernandes (Colégio Estadual Prof. Eugenio Malanski)
- Rafaela Fagundes Lauber (Colégio Estadual Profa. Linda Salamuni Bacila)
- Vinícius Oliveira Neves (Colégio Estadual Prof. Becker E Silva)
- Tabita Klein Ferreira (Colégio Estadual Francisco Pires Machado)
- Ingrid Bencks de Souza (Colégio Estadual 31 de Março)
- Alexandre Rech Batista (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)
- João Victor Vedan de Ramos (Colégio Integração)
- Gustavo Grachinski de Souza (Colégio Sagrada Família)
- Isabela Canavez (Colégio Santo Ângelo)
- Lívia Zander Laroca (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Bernardo Kichileski (Colégio Sant'Ana)

- Rafael Augusto Oliveira (Colégio Sant'Ana)
- Henrique Rodrigues Machado (Escola Elite Tales de Mileto)
- Eduardo Zampieri (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Manuela Oliveira Soltes (Colégio Sant'Ana)
- Lucas Ditzel Roza (Colégio Marista Pio XII)
- Camilla Vaz Goulart (Colégio Alfa Plus)
- Gabriel Fernandes Lopes (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Heitor Mello de Lima (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Rafael Paulinski (Escola Desafio)
- Anne Caroline Polette (Colégio Pontagrossense Sepam)

Menção Honrosa

- Gabriel André Brim (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Igor Augusto Bucholdz Wosgrau (Colégio Positivo Master)
- Emanuel Cecato Pachla (Escola Elite Tales de Mileto)
- Valentina Binotto de Souza (Colégio Positivo Master)
- Paola de Moraes Silva (Colégio Sagrada Família)
- Lucas Assink Agostini (Colégio Pontagrossense Sepam)
- João Vitor Collesel Martins (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Clarice Lima Pontes (Escola Desafio)
- Hector Viutika (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)
- Melissa Kalva Machado (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Beatriz Regina Duarte Neotti (Colégio Pontagrossense Sepam)

- Arthur Izaias Chafka (Colégio Estadual Prof. Júlio Teodorico)
- Isabella Franczak Pereira (Colégio Estadual 31 de Março)
- Luiz Roberto Franco Neto (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Luiz Otávio de Souza Freo (Colégio Estadual Prof. Júlio Teodorico)
- João Vitor Biuk Weber (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Alice Borges Ferreira (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Nicole Neras Gonçalves (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Bernardo Soares de Araújo (Colégio Alfa Plus)
- Murilo Costa Pedroso (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Emilie Mayer Eurich (Colégio Integração)
- Giovanna Beatriz Migdalski (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Matheus Pavilak Kozan (Colégio Estadual Nossa Sra. das Graças)
- Daniel Alberto Fernandes Henrique (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Davih Mainardes (Colégio Sant'Ana)
- Endrew Paes Carneiro (Colégio Estadual Santa Maria)
- Diogo Fernandes Eichelban (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)
- Letícia Fernanda Ribeiro (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Eduardo Augusto Estácio (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Alice Gollin Ferracini (Escola Desafio)
- Yasmin Caldeira Candido (Colégio Integração)
- Vinicius Gabriel Carneiro de Godoi (Colégio Estadual Dorah G. Daitschman)
- Gabriela de Ávila Nunes (Colégio Sagrado Coração de Jesus)

Nível 2

Troféu

- Luis Eduardo Cosseti Correia (Colégio Alfa Plus)
- Vitória de Quadros (Colégio Estadual Santa Maria)

Ouro

- Luis Eduardo Cosseti Correia (Colégio Alfa Plus)
- Pedro Luiz Scheifer de Souza (Colégio Vila Militar Cescage)
- Mariele Breda (Colégio Sagrada Família São José)
- Amanda Orizzi Moutinho de Souza (Colégio Marista Pio XII)
- Francisco Grokoviski (Escola Elite Tales de Mileto)

Prata

- Vanessa Ribeiro dos Santos (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Antonella Mello Fassini (Colégio Sant'Ana)
- Pedro Dias Carrara (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Vitória de Quadros (Colégio Estadual Santa Maria)
- Kairon Henrique Bomfim da Silva (Colégio Estadual Prof. Júlio Teodorico)
- Camila Brasil Silva (Colégio Marista Pio XII)
- Maria Laura Corrêa Viana (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Vitória Lara Elizeu (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Maria Fernanda da Silva Schmitz (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Eduardo Caillot Schroeder Lesiko (Colégio Sagrada Família São José)

Bronze

- Bruna Vitória de Melo Delgobo (Escola Estadual Profa. Halia Terezinha Gruba)
- Marcos Roberto Baranski (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Gabriel Domingues Correia (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Frederico Hendges Roube (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Bernardo Cordeiro Melek (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Rafael Henrique Freire (Escola Estadual Profa. Halia Terezinha Gruba)
- Ryan Caio Maurer (Colégio Estadual Prof. Júlio Teodorico)
- Allan Rafael de Lima Almeida (Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Natã Matheus Ferreira (Colégio Estadual Cívico-Militar Professor Colares)
- Lucas Vinicius de Lara Ribeiro (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Felipe Daniel de Araujo (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Vitor Henrique Mendes (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Bruno Leão Mota Lucas da Silva (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Davi Guilherme Pereira Borges da Costa (Colégio Estadual Prof. Eugenio Malanski)
- Alysson Rafael de Paula César (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Matheus Miguel Rodrigues Donha (Colégio Santo Ângelo)
- Guilherme Stanislaurzuk Do Nascimento (Colégio Marista Pio XII)
- Emanuel Peron Lameira (Colégio Marista Pio XII)
- Leonardo Luiz Chaves Domingues (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Maria Júlia de Paiva (Colégio Sagrado Coração de Jesus)

- Davi Grando Primor (Colégio Integração)
- Arthur Henrique Kruger Geronimo (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lívia Souza Jardim (Colégio Marista Pio XII)
- Leonardo Henrique Maravieski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Bernardo Laskavski Atz (Colégio Marista Pio XII)
- Ana Caroline Abrão (Colégio Sagrada Família São José)
- Lucas Sasse (Colégio Sant'Ana)
- Julia de Luca (Colégio Marista Pio XII)
- Pedro Gabriel Sansana (Colégio Marista Pio XII)
- Rafael Boiko Neto (Colégio Santo Ângelo)

Menção Honrosa

- Ana Clara Fogaça Souza (Colégio Integração)
- Cassiano Schwade Januário (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Antonio Marcos Bueno dos Santos (Colégio Marista Santa Mônica)
- Caio Augusto Fernandes (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Gustavo Wolski Franco (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- André Fellipe Soistak (Colégio Sagrada Família São José)
- Lavinia de Morais Ferreira (Colégio Santo Ângelo)
- Victor Davi Avila de Oliveira (Colégio Sant'Ana)
- Ana Julia Correia dos Santos (Colégio Sant'Ana)
- Ana Júlia Cavalheiro Pucci (Colégio Positivo Master)
- Gabriel Henrique Ribeiro (Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga)

- Heitor Fernando Brandalize (Escola Elite Tales de Mileto)
- Samuel Hass Alves (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Maria Lívia Calixto Vendrami (Colégio Sagrada Família São José)
- Murilo Daniel Malinoscky (Colégio Sagrada Família)
- Sofia Sokolowski Galvani (Colégio Santo Ângelo)
- Carolina Giacchini Kloth (Escola Desafio)
- Artur Markovicz Martins (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Carolina Regalio Campagnoli (Colégio Marista Pio XII)
- Marcelo Wisniewski Bevervanso (Colégio Alfa Plus)
- Eduardo Borsuk (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Emanoelle Vitoria Santana dos Santos (Colégio Estadual Prof. Júlio Teodorico)
- Cauã Gabriel Rettig da Luz (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gustavo Pinheiro Pedroso (Colégio Sagrada Família)
- Nicolas Andrade de Mattos (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Maísa Pompeu Sansana (Colégio Sant'Ana)
- Guilherme Shrzechowski (Colégio Alfa Plus)
- Brayan Gustavo Vidal (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Victor Leonardo Alves de Jesus (Instituto de Educação Prof. César Prieto Martinez)
- Lucas Carbonar Milão (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Marcus Vinicius Ilkiu Ferreira (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Giovana Boin Pavelecini (Colégio Sagrado Coração de Jesus)

- Marcela Meira da Rosa (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Andrielly Tinale de Carvalho (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Gustavo Ferreira (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Carlos Eduardo Souza Fogaça (Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Altair Naumann Neto (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Rafael de Souza Francisco (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Henrique Janoski (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Millena Batista dos Santos (Colégio Estadual Polivalente)
- Renan Johann Cota Mendes (Colégio Estadual Polivalente)
- Gabriel Fontana Moreira (Colégio Sagrada Família)

Nível 3

Troféu

- Felipe Mandalozzo Tebcherani (Colégio Positivo Master)
- Ruan Enéias Ferreira (Colégio Estadual Prof. Meneleu Almeida Torres)

Ouro

- Felipe Mandalozzo Tebcherani (Colégio Positivo Master)
- Ruan Enéias Ferreira (Colégio Estadual Prof. Meneleu Almeida Torres)
- Rodrigo Catto Menin (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Rafael Barbosa Vaz (Colégio Marista Pio XII)
- João Augusto Canani (Colégio Positivo Master)

Prata

- Rodrigo Dimbarre Ingles (Colégio Alfa Plus)
- Lucas dos Santos (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Mariana Sochodolak Praisner (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lavínia Borges da Silva (Escola Elite Tales de Mileto)
- Gustavo Henrique Rodrigues (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Arthur Martins Daux Medeiros (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Laura Moscardi Milléo (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Beatriz Stadler Ribas (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Manuela Rolim Carneiro (Colégio Marista Pio XII)
- Ana Julia da Silva (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)

Bronze

- Luan Matheus Emiliano Moraes (Instituto de Educação Prof. César Prieto Martinez)
- João Gustavo Verner Eidam (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Isadora Benvenutti Langer (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Victor Hugo dos Santos (Instituto de Educação Prof. César Prieto Martinez)
- Felipe Ozório Iurk Dias (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Emilly Victória Coronado Cheremeta (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Eduardo Henrique Carneiro de Godoi (Colégio Estadual Dorah G. Daitschman)
- Anny Lavinia Candida Pereira de Vicente (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)

- Carlos Henrique Arving (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)
- Gabriella Ferraz Costa Siqueira (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Luiz Gustavo Scheifer (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Denis Rauch (Colégio Estadual Cívico-Militar Professor Colares)
- Sandro Gabriel Dias Valões (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Gabriel Vinicius Andrioli (Colégio Estadual Profa. Linda Salamuni Bacila)
- Rafaela Ichi Carneiro (Colégio Sagrada Família)
- Felipe Tramontin (Colégio Sant'Ana)
- Mitzi Vedan de Ramos (Colégio Integração)
- Maria Eduarda Schmidt Werlang (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Yasmin Castilho Ouriques (Colégio Positivo Master)
- Tiago de Anhaia Polski (Colégio Sant'Ana)
- Maria Eduarda Onesko Slusaz (Escola Elite Tales de Mileto)
- Lavínia Machado Canova (Colégio Alfa Plus)
- Vinicius Ribas Bida (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gabriel Nofeke (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Gustavo Stocco (Colégio Positivo Master)
- Pedro Augusto Sant'Anna (Colégio Positivo Master)
- Kauanne Davila Souza Santos (Colégio Sagrada Família)
- Maria Beatriz Mongruel Voorsluys (Colégio Pontagrossense Sepam)

Menção Honrosa

- Lorena Grollmann (Colégio Sagrada Família)

- João Vitor Simões Cipolari (Escola Elite Tales de Mileto)
- Maria Fernanda Ruppel Sanches (Colégio Sagrada Família)
- Ágatha Bauer Venske (Colégio Sagrada Família)
- Nathalia Ribeiro Goedert (Colégio Marista Pio XII)
- Daniel dos Santos Pereira Rodrigues (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Murilo Borato (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Gustavo Marques da Silva (Colégio Sesi Ponta Grossa)
- Ana Julia Zimmermann Barkema (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Thierre de Arruda (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Eduardo Dimbarre Ingles (Colégio Alfa Plus)
- Pedro Henrique Farina dos Santos (Colégio Alfa Plus)
- Lorena Stadler Faria (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Bruno Ribeiro Graciano (Colégio Sant'Ana)
- Lorenzo Bazeggio Licodiedoff (Colégio Marista Pio XII)
- Joyce Nirelly Carraro (Colégio Sagrada Família)
- Enzo Jozviak Do Amaral (Colégio Sant'Ana)
- Murilo Branco (Colégio Dynâmico)
- Francisco Galvão Coloda (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Kamile Emanuele Luck Manjinski (Colégio Sagrada Família)
- Leonardo Antonio Peruzzo (Colégio Lobo Ponta Grossa)
- Luis Otávio Bochnia (Colégio Dynâmico)
- Erick dos Santos Monteiro (Colégio Sagrada Família São José)
- Luiza Mendes (Colégio Sesi Internacional Ponta Grossa)

- Ester Sara Ribeiro (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Felipe Mayer de Almeida (Colégio Estadual Profa. Linda Salamuni Bacila)
- Guilherme Henrique Militello Braga (Colégio Sagrada Família)

Nível 4

Troféu

- Pedro Henrique Cieslak (Colégio Alfa Plus)
- Claudiney Gustavo Rodrigues dos Santos (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)

Ouro

- Pedro Henrique Cieslak (Colégio Alfa Plus)
- Vinícius Scremin (Colégio Marista Pio XII)
- Ramon Augusto Teixeira (Colégio Sagrada Família)

Prata

- Isabella Yukari Fujita (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Claudiney Gustavo Rodrigues dos Santos (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Vitor Brandelero (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Brayan Becher Scorçato (Colégio Lobo Ponta Grossa)
- Gabriel Luigi Galli (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Nicoli Saldanha Ricardo (Colégio Integração)
- Bernardo Detzel Coimbra (Colégio Estadual Senador Correia)
- Bárbara Hoffman Wosiack (Colégio Sant’Ana)

Bronze

- Laiane Vitória Pedrozo de Mello (Colégio Estadual Prof. João Ricardo von Borell du Vernay)
- Gabriela Wurm (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Leon Vitor Amadeo Anater (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Gustavo de Lara Gonçalves (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Giovana Presner Semionatto (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Luiz André Baldani Pinto (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Giovanne Ribeiro Mika (Colégio Sant'Ana)
- Fernando Antônio de Lima Torres Filho (Colégio Marista Pio XII)
- Luiz Henrique Bahls (Colégio Integração)
- Sofia Silva de Freitas (Colégio Alfa Plus)

Menção Honrosa

- Ricardo Catapan Fidelis (Colégio Sagrada Família)
- Bruno Massoqueto Móres (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Daphiny Krystin Neves de Carvalho (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Heloisa Stadler Ribas (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Felipe de Souza Forte (Colégio Sagrada Família)
- Adriana Pereira de Souza e Silva (Escola Elite Tales de Mileto)
- Hebert Lovato Silva Ferreira (Colégio Lobo Ponta Grossa)
- Nickolas Quadros Jordão da Silva (Colégio Dynâmico)
- Ana Julia Pereira de Souza e Silva (Escola Elite Tales de Mileto)

- Sayuri Pereira Oyama (Colégio Integração)
- Guilherme Douhei (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Alannys Piontek da Luz (Colégio Sagrada Família)
- Letícia Renkert de Oliveira Kampa (Colégio Sagrado Coração de Jesus)

Professores Premiados

Abaixo consta a relação de todos os professores que receberam troféus nos respectivos níveis:

Nível Júnior - Troféu:

- Professora Keyti Alyne Francisco de Souza (Escola Elite Tales de Mileto)
- Professora Márcia Alves de Oliveira (Escola Municipal Dr. Edgar Sponholz)

Nível 1 - Troféu:

- Professora Luzybel Turski Bida (Colégio Integração)
- Professora Pricila Gawronski Galvão (Colégio Estadual Cívico-Militar Professor Colares)

Nível 2 - Troféu:

- Professora Mariana Andrade de Oliveira Vieira (Colégio Alfa Plus)
- Professora Simone Daiane Pisnisk (Colégio Alfa Plus)
- Professora Eliane Tulio Xavier (Colégio Estadual Santa Maria)

Nível 3 - Troféu:

- Professor Fabrício Gonçalves dos Santos (Colégio Positivo Master)
- Professora Claudia Almeida Aires (Colégio Estadual Prof. Meneleu Almeida Torres)

Nível 4 - Troféu:

- Professor Felipe Eduardo Cavichiolo (Colégio Alfa Plus)
- Professor Francisco Fanchin Neto (Colégio Alfa Plus)
- Professor Augusto Rangel Selski (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Professor José Schimiguel (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)

A seguir consta a relação de todos os professores que tiveram alunos premiados na 8ª OPMat no ano de 2022:

- Roseli Niedjevski Dambrovski (Colégio Estadual 31 de Março)
- Fabio Roberto da Silva (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Juliana Pereira Coutinho (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Nathaly Cris Diogo da Silva Kazmierczak (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Luana Karini Rossi (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Felipe Eduardo Cavichiolo (Colégio Alfa Plus)
- Francisco Fanchin Neto (Colégio Alfa Plus)
- Gabriel Alberti Torrens (Colégio Alfa Plus)
- Igor Alberto Dantas Abrami (Colégio Alfa Plus)
- Índia Nara Binotto (Colégio Alfa Plus)
- Mariana Andrade de Oliveira Vieira (Colégio Alfa Plus)
- Simone Daiane Pisnisk (Colégio Alfa Plus)
- Paola Soares de Oliveira (Colégio Alfa Plus)
- Iolanda Gebiluka Mauda (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Ivania Mara Gabardo (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Luciano Roque Leite (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Malui Sergio Siqueira (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Neli Garcia Catossi (Colégio Estadual Prof. Becker E Silva)

- Adnilson Ribeiro Mantuani (Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Maria Inez Solak (Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Augusto Rangel Selski (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- José Schimiguel (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Hilda Borkoski de Souza e Silva (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Iara Fernanda Michelson Grochovski (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Alzenir Virginia Ferreira Soistak (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Ingrid da Silva Milléo (Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas)
- Lenilton Kovalski (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Marcos Sant'Anna Modrow (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Ana Paula Pinheiro (Colégio Estadual Cívico-Militar Professor Colares)
- Ilbiamara Aparecida Rupel Bobeck (Colégio Estadual Cívico-Militar Professor Colares)
- Pricila Gawronski Galvão (Colégio Estadual Cívico-Militar Professor Colares)
- Vanderlei da Silva (Colégio Estadual Cívico-Militar Professor Colares)
- Maura Cristina Almeida Dicenha (Colégio Estadual Senador Correia)
- Elisangela Guse Gomes (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- Noeli Meira Lopes (Escola Municipal Dep. Mário Braga Ramos)
- Michelle Hilbert Dipp (Escola Desafio)
- Paulo Henrique Carvalho (Escola Desafio)
- Maria Eliete Francischinelli Freitas (Colégio Estadual Dorah G. Daitschman)
- Willians Fernandes (Colégio Estadual Dorah G. Daitschman)

- Márcia Alves de Oliveira (Escola Municipal Dr. Edgar Sponholz)
- Elenice Maria da Silva Ribas (Escola Municipal Dr. José Pinto Rosas)
- Dione Ines Do Nascimento (Escola Municipal Dr. Raul Pinheiro Machado)
- Osvaldo Cardoso (Colégio Dynâmico)
- Renan Ramos Costa (Colégio Dynâmico)
- Alisson Lima Emiliano (Escola Elite Tales de Mileto)
- Kelen Cristina dos Santos Abrami (Escola Elite Tales de Mileto)
- Keyti Alyne Francisco de Souza (Escola Elite Tales de Mileto)
- Luzybel Turski Bida (Escola Elite Tales de Mileto)
- Suellen Karina Palhano Iochucki (Escola Elite Tales de Mileto)
- Carla Cristiane Dal-Col de Oliveira (Colégio Estadual Prof. Eugenio Malanski)
- Regiane Gomes Araújo (Colégio Estadual Prof. Eugenio Malanski)
- Celia Regina Azevedo Silveira (Escola Municipal Fioravante Slaviero)
- Renata Gonçalves Vieira (Colégio Estadual Francisco Pires Machado)
- Cristina Machado Mikowski (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Liliamari Bastos (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Rosine Stocco (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Regiane Aparecida Auer (Escola Estadual Profa. Halia Terezinha Gruba)
- Valquiria Glinski (Escola Estadual Profa. Halia Terezinha Gruba)
- Denise Do Rocio Mezzadri Lopes (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Maria Elisabete Mann (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Ana Cristina Schirlo (Instituto de Educação Prof. César Prieto Martinez)

- Carlos Roberto Schebeleski (Instituto de Educação Prof. César Prieto Martinez)
- Rubens Edgard Furstenberger Filho (Instituto de Educação Prof. César Prieto Martinez)
- Fabio Borges (Colégio Integração)
- Juliana Carla da Silva (Colégio Integração)
- Luzybel Turski Bida (Colégio Integração)
- Mariana Andrade de Oliveira Vieira (Colégio Integração)
- Adriane de Castro (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Amélia Aparecida Moro (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Débora de Lima Moscardi dos Santos (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Gleoceia Rodrigues (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Débora Laranjeira Colodel (Colégio Estadual Prof. João Ricardo von Borell du Vernay)
- Carlo Emanoel Marenda (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)
- Elaine de Fátima Fávaro (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)
- Sheila Sayuri Yano Ohi (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)
- Arilei Rodrigues Albach (Colégio Estadual Prof. Júlio Teodorico)
- Edmir Ferreira Neves (Colégio Estadual Prof. Júlio Teodorico)
- Giovana Aparecida Schambakler Viante (Colégio Estadual Prof. Júlio Teodorico)
- Marli Ribeiro Maia Eslompo (Colégio Estadual Prof. Júlio Teodorico)
- Muriele Ferreira Ribeiro (Colégio Estadual Prof. Júlio Teodorico)
- Giane Correia Silva (Colégio Estadual Profa. Linda Salamuni Bacila)
- Juliana Vogivoda (Colégio Estadual Profa. Linda Salamuni Bacila)

- Gabriel Machado (Colégio Lobo Ponta Grossa)
- Alessandra de Fátima Boianoski Ferreira (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Daniele Do Carmo Ruth Lopes (Colégio Marista Santa Mônica)
- Fabiane Wiesinieski Canteri (Colégio Marista Santa Mônica)
- Andrea Ostrufka Maximiv (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Jeanine Alves de Oliveira (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Karla Adriane Boamorte (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Ronilze de Fátima Tozetto (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Rosiane Fidelis (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Claudia Almeida Aires (Colégio Estadual Prof. Meneleu Almeida Torres)
- Edna Mara de Mattos Bezerra (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Mônica Teixeira Motta (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Andrea Ostrufka Maximiv (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Eva Aparecida Carvalho e Silva (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Gisele Aparecida Carvalho e Silva (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Maurício Fernandes (Colégio Estadual Nossa Sra. das Graças)
- Ana Cláudia Adriano de Alvarenga (Colégio Marista Pio XII)
- Ana Cristina Delinski Stiirmer (Colégio Marista Pio XII)
- Bianca Kanawate Capri (Colégio Marista Pio XII)
- Debora Christine Baiak de Almeida (Colégio Marista Pio XII)
- Diefrei Alves (Colégio Marista Pio XII)
- Elisa Carolina Silveira (Colégio Marista Pio XII)

- Geane Dias de Moura Jorge (Colégio Marista Pio XII)
- Luan Elias Do Nascimento (Colégio Marista Pio XII)
- Maria Marta Antunes (Colégio Marista Pio XII)
- Giovanni Gaeski da Silva (Colégio Estadual Polivalente)
- Angelis Hass (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Bianca Aparecida Holm de Oliveira (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Fernanda Fetzer Valente (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Karoline Aparecida Antunes (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Kelly Lillian da Silva (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lucas Gicorski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Luciano Gomes Ferreira (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Rubens Edgard Furstenberger Filho (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Samara Aparecida Cordeiro dos Santos (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Daniela Aparecida Teixeira Maciel (Colégio Positivo Master)
- Fabrício Gonçalves dos Santos (Colégio Positivo Master)
- Franciane Braga Machado Gonçalves (Colégio Positivo Master)
- Isabelle Alves Trobia (Colégio Positivo Master)
- Mirely Christina Dimbarre (Colégio Positivo Master)
- Célia Piekarski (Escola Municipal Pref. Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Elimar Cristina Ferreira da Silva (Escola Municipal Pref. Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Roseli de Fatima Rodrigues (Escola Municipal Pref. Dr. Fulton Vitel Borges de Macedo)

- Ursula Carraro (Escola Municipal Pref. Dr. Plauto Miró Guimarães)
- Sueli Nabozny Rodrigues da Silva (Escola Municipal Pref. Ernesto Guimarães Vilela)
- Simone Aparecida Ioungblod (Escola Municipal Pref. Heitor Ditzel)
- Lucélia Aparecida Costa Franco (Escola Municipal Pref. José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Lucimary Corréa Gomes de Araújo (Escola Municipal Pref. José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Helenise Aparecida de Oliveira Mezadri (Escola Municipal Pref. Major Manoel Vicente Bittencourt)
- Marta Maria Misga Zyskowski (Escola Municipal Pref. Theodoro Batista Rosas)
- Evelyn Emanuelle Verneke (Escola Municipal Prof. Jorge Dechandt)
- Dayane de Almeida (Escola Municipal Prof. Jorge Dechandt)
- Camila Oriette Rennó Rodrigues da Silva (Escola Municipal Prof. Osni Vilaca Mongruel)
- Sandra Elisa Gelber (Escola Municipal Prof. Osni Vilaca Mongruel)
- Gisele Ferraz de Melo (Escola Municipal Prof. Paulo Grott)
- Deborah Cristhina Stadler Ferreira (Escola Municipal Prof. Rubens Edgard Furstenberger)
- Adriana Aparecida Prestes Francisco Zander (Escola Municipal Prof. Zair Santos Nascimento)
- Luciane Cristina Teixeira Borges Pitlovanciv (Escola Municipal Profa. Adelaide Thomé Chamma)
- Eliane Cristina de Matos (Escola Municipal Profa. Braulina Carneiro de Quadros)
- Norma Lori Santos de Lima (Escola Municipal Profa. Dércia Do Carmo Noviski)

- Aline Hildebrant (Escola Municipal Profa. Eclea dos Passos Horn)
- Maira Cristina Muller Rocha Maravieski (Escola Municipal Profa. Guitil Federmann)
- Carla Cristina Justus Guarnieri (Escola Municipal Profa. Judith Macedo Silveira)
- Rosmeri Fernandes Fagundes (Escola Municipal Profa. Kazuko Inoue)
- Fabiane Mello (Escola Municipal Profa. Loise Foltran de Lara)
- Kareyn Hladyszwski (Escola Municipal Profa. Lucia Pacher)
- Heloísa Roseni Jorge Correira (Escola Municipal Profa. Maria Antônia de Andrade)
- Letícia Pacheco Wendler (Escola Municipal Profa. Maria Antônia de Andrade)
- Rubia Carla Dias da Silva (Escola Municipal Profa. Maria Coutin Riesemberg)
- Patricia Fernanda da Silva (Escola Municipal Profa. Maria Elvira Justus Schimidt)
- Celia Regina Barche (Escola Municipal Profa. Maria Laura Pereira)
- Mariane Eliza Weinert (Escola Municipal Profa. Maria Laura Pereira)
- Johny Maikon Costa (Escola Municipal Profa. Marly Cecília Camargo Chiafitela)
- Franciele Cristine de Souza Serafim (Escola Municipal Profa. Marta Filipkowski de Lima)
- Dione Woiciechowski Lopes (Escola Municipal Profa. Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Deize Ester Stilli (Escola Municipal Profa. Ruth Holzmann Ribas)
- Gisele Mugnaine (Escola Municipal Profa. Ruth Holzmann Ribas)
- Antônio Marcelo de Oliveira (Colégio Estadual Regente Feijó)
- Daniele Regina Penteado (Colégio Estadual Regente Feijó)

- Franciane Barros Garcia (CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha)
- Gláucia de Fátima Colesel (CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha)
- Neide Gonçalves dos Santos (CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha)
- Patricia Bandeira (Escola Rosazul)
- Caroline Kuller (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Gisele Do Rocio Soares Pacheco (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Rosilda Aparecida Chociai Scremin (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Suzane Machado Daer Costa (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Gisele Do Rocio Soares Pacheco (Colégio Sagrada Família São José)
- Maria Regina Urban (Colégio Sagrada Família São José)
- Marina Marra (Colégio Sagrada Família São José)
- Suzane Machado Daer Costa (Colégio Sagrada Família São José)
- Edilaine Botão da Silva (Colégio Sagrada Família São Zygmunt)
- Bruna Elizabeth Adamowicz da Luz (Colégio Sagrada Família)
- Elyzandra Maia Cano Perreto (Colégio Sagrada Família)
- Fábio Augusto Souto Rosa (Colégio Sagrada Família)
- Flávia Nocera Wiechineski (Colégio Sagrada Família)
- Gabriel Machado (Colégio Sagrada Família)
- Marina Marra (Colégio Sagrada Família)
- Rosilda Aparecida Chociai Scremin (Colégio Sagrada Família)
- Suzane Machado Daer Costa (Colégio Sagrada Família)
- Caroline Alves (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Fernanda Cassimiro (Colégio Sagrado Coração de Jesus)

- Izabelle Cristiane Matkovski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Jorge Davi Navarro (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Lucas Gicorski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Luis Henrique Sansana (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Claudia Danielle de França Otoni (Colégio Sant'Ana)
- Daniel Carlos Beusso (Colégio Sant'Ana)
- Francine Mayara Gomes (Colégio Sant'Ana)
- Idilceia Aparecida Hilgenberg Loderer (Colégio Sant'Ana)
- Luciano Gomes Ferreira (Colégio Sant'Ana)
- Luiz Eduardo Krett (Colégio Sant'Ana)
- Paulo Fernando Zaratini Oliveira e Silva (Colégio Sant'Ana)
- Eliane Tulio Xavier (Colégio Estadual Santa Maria)
- Maria Inez Solak de Souza (Colégio Estadual Santa Maria)
- Arnold Vinicius Prado Souza (Colégio Santo Ângelo)
- Cynthia Cristiane Mendes (Colégio Santo Ângelo)
- Eviele Ferreira Cunha (Colégio Santo Ângelo)
- Maria Eliete Francischinelli Freitas (Colégio Santo Ângelo)
- Ariadne Antunes da Silva (Escola Municipal São Jorge)
- Karina Martins Barbosa (Escola Municipal São Jorge)
- Joel Lopes da Silva Júnior (Colégio Sesi Internacional Ponta Grossa)
- Joel Lopes da Silva Júnior (Colégio Sesi Ponta Grossa)
- Fernanda Felex Carneiro Do Carmo (Escola Municipal Vereador Adelino Machado de Oliveira)

- Maria Elisabete Mann (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Kareyn Hladyszwski (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves (Colégio Vila Militar Cescage)
- Indyana Popoviski Almeida (Escola Municipal Zanoni Rogoski)

Escolas Participantes

Abaixo consta a relação de todas as escolas participantes da 8^a OPMat no ano de 2023:

CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha
Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa
Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas
Colégio Alfa Plus
Colégio Dynâmico
Colégio Estadual 31 de Março
Colégio Estadual Cívico-Militar Frei Doroteu de Pádua
Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio
Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha
Colégio Estadual Cívico-Militar Professor Colares
Colégio Estadual Colônia Dona Luiza
Colégio Estadual Dorah G. Daitschman
Colégio Estadual Dr. Epaminondas Novaes Ribas
Colégio Estadual Dr. Munhoz da Rocha
Colégio Estadual Francisco Pires Machado
Colégio Estadual General Osorio
Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga
Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória
Colégio Estadual Nossa Sra. das Graças
Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny
Colégio Estadual Polivalente
Colégio Estadual Presidente Kennedy
Colégio Estadual Prof. Becker E Silva
Colégio Estadual Prof. Eugenio Malanski
Colégio Estadual Prof. João Ricardo von Borell du Vernay
Colégio Estadual Prof. Júlio Teodorico
Colégio Estadual Prof. Meneleu Almeida Torres
Colégio Estadual Profa. Linda Salamuni Bacila
Colégio Estadual Profa. Sirley Jargas
Colégio Estadual Regente Feijó
Colégio Estadual Santa Maria
Colégio Estadual Senador Correia
Colégio Integração

Colégio Lobo Ponta Grossa
Colégio Marista Pio XII
Colégio Marista Santa Mônica
Colégio Pontagrossense Sepam
Colégio Positivo Master
Colégio Sagrada Família
Colégio Sagrada Família Auxiliadora
Colégio Sagrada Família São José
Colégio Sagrada Família São Zygmunt
Colégio Sagrado Coração de Jesus
Colégio Sant'ana
Colégio Santo Ângelo
Colégio Sesi Internacional Ponta Grossa
Colégio Sesi Ponta Grossa
Colégio Vila Militar Cescage
Escola Bom Pastor Martinus
Escola Desafio
Escola Elite Tales de Mileto
Escola Estadual de Vila Velha
Escola Estadual Jesus Divino Operário
Escola Estadual Medalha Milagrosa
Escola Estadual Monteiro Lobato
Escola Estadual Profa. Halia Terezinha Gruba
Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato
Escola Municipal Catarina Miró
Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci
Escola Municipal Deodoro Alves Quintiliano
Escola Municipal Dep. Djalma de Almeida Cesar
Escola Municipal Dep. Mário Braga Ramos
Escola Municipal Dr. Carlos Ribeiro de Macedo
Escola Municipal Dr. Edgar Sponholz
Escola Municipal Dr. José Pinto Rosas
Escola Municipal Dr. Leopoldo Pinto Rosas
Escola Municipal Dr. Raul Pinheiro Machado
Escola Municipal Felício Francisquiny
Escola Municipal Fioravante Slaviero
Escola Municipal Frederico Constante Degraf

Escola Municipal Frei Elias Zulian
Escola Municipal General Aldo Bonde
Escola Municipal Glacy Camargo Secco
Escola Municipal Guaracy Paraná Vieira
Escola Municipal Humberto Cordeiro
Escola Municipal João Maria Cruz
Escola Municipal Ludovico Antonio Egg
Escola Municipal Padre José Bugatti
Escola Municipal Pref. Claudio Mascarenhas
Escola Municipal Pref. Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães
Escola Municipal Pref. Dr. Amadeu Puppi
Escola Municipal Pref. Dr. Elyseu de Campo Mello
Escola Municipal Pref. Dr. Fulton Vitel Borges de Macedo
Escola Municipal Pref. Dr. Othon Mader
Escola Municipal Pref. Dr. Plauto Miró Guimarães
Escola Municipal Pref. Eng. Eurico Batista Rosas
Escola Municipal Pref. Ernesto Guimarães Vilela
Escola Municipal Pref. Heitor Ditzel
Escola Municipal Pref. José Bonifácio Guimarães Vilela
Escola Municipal Pref. José Hoffmann
Escola Municipal Pref. Major Manoel Vicente Bittencourt
Escola Municipal Pref. Theodoro Batista Rosas
Escola Municipal Prof. Aristeu Costa Pinto
Escola Municipal Prof. Édgar Zanoni
Escola Municipal Prof. Eloy Avrechak
Escola Municipal Prof. Faris Antonio Michaele
Escola Municipal Prof. Ivon Zardo
Escola Municipal Prof. Jorge Dechandt
Escola Municipal Prof. Kamal Tebcherani
Escola Municipal Prof. Nelson Pereira Jorge
Escola Municipal Prof. Osni Vilaca Mongruel
Escola Municipal Prof. Paulo Grott
Escola Municipal Prof. Plácido Cardon
Escola Municipal Prof. Rubens Edgard Furstenberger
Escola Municipal Prof. Sebastião dos Santos e Silva
Escola Municipal Prof. Zair Santos Nascimento
Escola Municipal Profa. Adelaide Thomé Chamma

Escola Municipal Profa. Agenoridas Stadler
Escola Municipal Profa. Ana de Barros Sholzmann
Escola Municipal Profa. Armida Frare Garcia
Escola Municipal Profa. Braulina Carneiro de Quadros
Escola Municipal Profa. Dércia do Carmo Noviski
Escola Municipal Profa. Eclea dos Passos Horn
Escola Municipal Profa. Guitil Federmann
Escola Municipal Profa. Haydee Ferreira de Oliveira
Escola Municipal Profa. Idalia Góes
Escola Municipal Profa. Judith Macedo Silveira
Escola Municipal Profa. Kazuko Inoue
Escola Municipal Profa. Loise Foltran de Lara
Escola Municipal Profa. Lucia Pacher
Escola Municipal Profa. Maria Antônia de Andrade
Escola Municipal Profa. Maria Coutin Riesemberg
Escola Municipal Profa. Maria Elvira Justus Schimidt
Escola Municipal Profa. Maria Eulina Santos Scheena
Escola Municipal Profa. Maria Laura Pereira
Escola Municipal Profa. Maria Vitória Braga Ramos
Escola Municipal Profa. Marly Cecília Camargo Chiafitela
Escola Municipal Profa. Marta Filipkowski de Lima
Escola Municipal Profa. Minervina França Scudlareck
Escola Municipal Profa. Otacília Hasselmann de Oliveira
Escola Municipal Profa. Ruth Holzmann Ribas
Escola Municipal Profa. Shirley Aggi Moura
Escola Municipal Profa. Zahira Catta Preta Mello
Escola Municipal Profa. Zeneida de Freitas Schnirmann
Escola Municipal Profa. Zila Bernadete Bach
Escola Municipal Protazio Scheifer
Escola Municipal São Jorge
Escola Municipal Senador Flávio Carvalho Guimarães
Escola Municipal Vereador Adelino Machado de Oliveira
Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins
Escola Municipal Zanoni Rogoski
Escola Rosazul
Instituto de Educação Prof. César Prieto Martinez

Nível Júnior

Prova Objetiva

Problema 1. Mário foi trabalhar às 8 horas e voltou às 12 horas, 4 horas depois. Carlos foi trabalhar às 9 horas e voltou 9 horas depois. Que horas Carlos voltou?

a) 14 horas b) 17 horas c) 18 horas d) 19 horas e) 21 horas

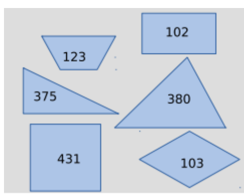
Problema 2. Qual é o valor de $11100 \div 6$?

a) 1850 b) 1805 c) 1680 d) 1950 e) 1905

Problema 3. A pedido de sua mãe, Chico saiu para fazer algumas compras. Inicialmente passou no açougue e comprou R$$15,00$ em carne, em seguida passou na padaria e comprou R$$8,00$ em pães e antes de voltar para casa, passou na farmácia e comprou um remédio para dor de cabeça por R$$17,00$. Quanto Chico gastou?

a) R$$39,00$ b) R$$40,00$ c) R$$41,00$ d) R$$50,00$ e) R$$51,00$

Problema 4. A diferença entre o total dos números que estão no interior das figuras com quatro lados e o total dos números do interior das figuras com três lados é igual a:

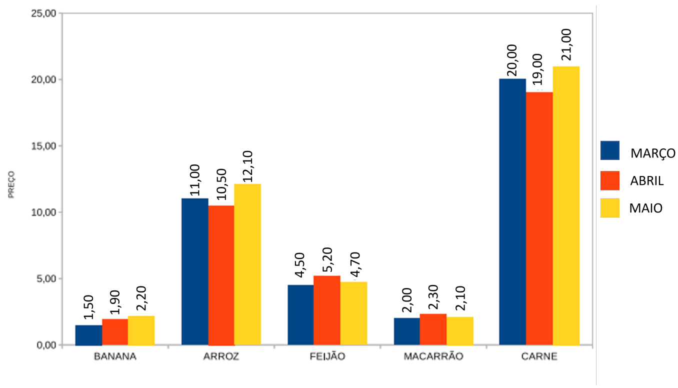


a) 11 b) 2 c) 3 d) 10 e) 4

Problema 5. A soma dos algarismos do número 2314 é 10. Qual a diferença entre o próximo número de 4 algarismos que também tem soma 10 e o número 2314?

a) 5 b) 9 c) 7 d) 11 e) 13

Problema 6. O gráfico abaixo apresenta informações sobre o preço na compra de alguns produtos da merenda escolar, de um fornecedor, em três meses do ano.



Analisando os dados do gráfico, é possível afirmar que:

a) O mês com menor preço total de todos os produtos de merenda foi em março.
b) Todos os produtos da merenda tiveram os seus preços de venda aumentados de março a maio.
c) Em comparação com os meses anteriores, no mês de maio houve uma redução no preço da compra de feijão.
d) Houve uma redução no preço total na compra dos produtos da merenda no mês de abril, em comparação com março.
e) O maior preço na compra da carne ocorre no mês de março.

Gabarito da Prova Objetiva

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
c	a	b	e	b	d

Prova Dissertativa

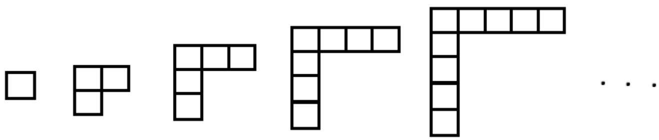
Problema 1. Um canguru pode dar saltos de duas distâncias: 8 e 10 metros. Para chegar até o Rio Nevado, ele percorre 100 metros em linha reta.

a) É possível que esse canguru chegue no rio saltando apenas de 10 em 10 metros? Quantos saltos serão necessários?

b) De quantas maneiras ele pode chegar ao Rio Nevado?

c) Qual a quantidade mínima de saltos para o canguru chegar ao rio?

Problema 2. Manuel desenhou várias figuras segundo um código secreto que ele inventou:



A primeira figura é formada por um único quadradinho, a segunda é formada por três quadradinhos e assim por diante.

a) Desenhe a sexta figura de Manuel.

b) Quantos quadradinhos há na décima figura?

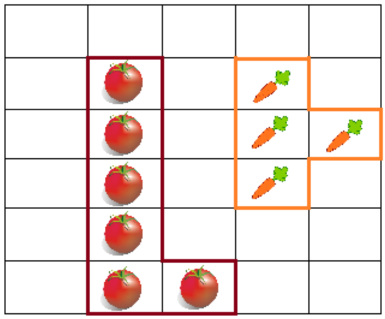
c) Quantos quadradinhos há ao todo nas 20 primeiras figuras?

Problema 3. Joãozinho foi a feira e percebeu que uma maçã custa o mesmo que duas bananas; um abacaxi custa o mesmo que quatro maçãs e uma banana custa o mesmo que seis laranjas.

a) Quantas bananas custam um abacaxi?

b) Se o preço de uma laranja é de 50 centavos, qual o preço do abacaxi (em reais)?

Problema 4. Dona Maria dividiu sua horta em regiões retangulares em que o comprimento do maior lado é igual ao dobro do comprimento do menor lado. Ela decidiu colocar dois cercados, como na figura abaixo, um para plantar cenouras e outro para plantar tomates.



a) Se o perímetro do cercado das cenouras tem 42 metros, qual é perímetro do cercado dos tomates?

b) Se na região fora dos cercados de sua horta Dona Maria ainda não plantou legumes, quanto de área ela tem à disposição?

Gabarito da Prova Dissertativa

Problema 1. *(Resolução de Adrian Christopher Guimarães Ferreira - Colégio Dr. Edgar Sponholz)*

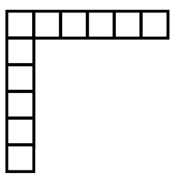
a) Sim, porque se ele der 10 saltos, chegará no rio, pois $10 \times 10 = 100$.

b) Dando 10 saltos de 8 metros e 2 saltos de 10 metros, dando 5 saltos de 8 metros e 6 saltos de 10 metros e dando 10 saltos de 10 metros, totalizando 3 maneiras.

c) 10 saltos, pois se o canguru der 10 saltos de 10 metros ele chegará lá, pois 10×10 é igual a 100. E não tem como ele chegar em menos saltos, pois como mostrei na questão anterior, são três maneiras de ele chegar ao rio. E se for somado o número de saltos de cada maneira a menor quantidade são 10 saltos.

Problema 2. *(Resolução de Israel Leonardo Los Barbosa - Colégio Elite Tales de Mileto)*

a) Existe um padrão: a cada nova figura são adicionados 2 quadradinhos, um quadradinho na vertical e outro na horizontal. Portanto, a sexta figura terá 11 quadradinhos:



b) Podemos utilizar de uma relação, pois o número de quadradinhos das figuras é igual ao dobro do número da figura menos 1.

$$2 \times 10 = 20 \text{ e } 20 - 1 = 19.$$

Portanto a décima figura possui 19 quadradinhos.

c) Utilizando o padrão de que a cada nova figura se adicionam dois quadradinhos sabemos as quantidades de quadradinhos de cada figura.

Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Número de quadradinhos	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39

Somando os números de quadradinhos de todas as figuras, iremos obter como resposta: há 400 quadradinhos nas 20 primeiras figuras.

Problema 3. *(Resolução de Vitor Arthur Marçal Beck - Escola Santo ângelo)*

a) Oito bananas custa um abacaxi, pois 1 abacaxi custa 4 maçãs e 4 maçãs custam 8 bananas.

b) Um abacaxi custa R$ 24,00, pois uma banana equivale a 6 laranjas e um abacaxi equivale a 8 bananas. Então, $6 \times 8 = 48$ e $48 \times 0,5 = 24$.

Problema 4. *(Resolução da pauta)*

a) A horta de cenouras possui 4 lados do maior lado do retângulo e 6 lados do lado menor do retângulo. Como o maior lado é o dobro do menor lado, temos

$$4 \times 2 + 6 \text{ do menor lado}$$
$$8 + 6 = 14 \text{ do menor lado}$$

Então, o perímetro é igual a 14 vezes o menor lado. Então, o menor lado mede $\frac{42}{14} = 3$ m. Consequentemente, o maior lado mede $6\,m$. Observando a horta de tomates, nota-se que são 4 lados do lado maior e 10 lados do lado menor que formam o perímetro. Sabendo que o lado menor mede $3\,m$ e o lado maior mede $6\,m$, o perímetro da horta de tomates é:

$$4 \times 6 + 10 \times 3 = 24 + 30 = 54\,m.$$

b) Com as medidas dos retângulos do item a), temos que cada retângulo tem área de $6 \times 3 = 18m^2$. Além disso, a partir da figura, temos que a horta da

Dona Maria possui $5 \times 6 = 30$ retângulos. A partir disso, calculamos a área total da horta:

$$A_t = 30 \times 18$$

$$A_t = 540m^2$$

Pela figura, temos também que estão sendo usados 10 retângulos, que possuem área:

$$A_u = 10 \times 18$$

$$A_u = 180\ m^2$$

Portanto, a área a disposição de Dona Maria é de

$$A = 540 - 180 = 360\ m^2.$$

Nível 1

Primeira Fase

Problema 1. Um jardim tem 2 árvores, cada árvore tem 2 ramos, cada ramo tem 2 ninhos e cada ninho tem 2 pássaros. Qual o total de pássaros nessas duas árvores?

a) 2 b) 4 c) 8 d) 16 e) 32

Problema 2. A soma de quatro números consecutivos é 126. A soma entre o menor e o maior desses números é:

a) 31 b) 63 c) 80 d) 120 e) 126

Problema 3. A área de um retângulo é $36\,cm^2$ e as medidas dos seus lados são números naturais. Qual das medidas a seguir pode ser o perímetro desse retângulo?

a) 42 b) 34 c) 26 d) 64 e) 50

Problema 4. Considerando que A e B, na expressão $8\,A\,7 + B\,8\,B = 1\,A\,3\,2$, são números naturais, então $A + B$ é:

a) Um número múltiplo de três.
b) Um número primo.
c) Um número par.
d) Um número múltiplo de dois.
e) Um número múltiplo de cinco.

Problema 5. Seja $A = \dfrac{5}{7 - \dfrac{3}{1 - \dfrac{1}{4}}}$. Efetuando as operações existentes, o valor de A é reduzido a fração:

a) $\frac{5}{3}$ b) $-\frac{5}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $-\frac{3}{5}$ e) $-\frac{23}{7}$

Problema 6. Uma senha de 6 caracteres deve ser formada usando as letras minúsculas a e o e os números 0, 1, 2, 3. As senhas devem começar e terminar com letras, mas não é permitido usar o 0 (zero) ao lado do o (letra o). Sendo assim, quantas senhas podem ser formadas?

a) 40 b) 36 c) 34 d) 32 e) 30

Problema 7. Desejamos descobrir qual dos três gnomos está com a chave da casa. Sabemos que apenas um deles disse a verdade. Quando questionados sobre a chave responderam:

Gnomo Amarelo: A chave não está comigo.
Gnomo Roxo: A chave está comigo.
Gnomo Verde: A chave não está com o roxo.

Podemos concluir que:

a) A chave está com o gnomo Amarelo.
b) A chave está com o gnomo Roxo.
c) A chave está com o gnomo Verde.
d) O gnomo Roxo está falando a verdade.
e) Não conseguimos descobrir quem está com a chave com estas respostas.

Problema 8. O último algarismo do resultado da expressão $(1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2019)^2 \times (2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2020)^3$ é:

a) 0 b) 2 c) 3 d) 5 e) 8

Problema 9. Um cofrinho consegue guardar no máximo 100 moedas. Se quebrarmos esse cofrinho hoje e dividirmos as moedas em grupos com três moedas cada sobrará uma moeda. O mesmo acontecerá se dividirmos em grupos com cinco moedas cada. Caso os grupos tenham sete moedas cada não sobrará nenhuma moeda. Qual é a quantidade de moedas no cofrinho?

a) 56 moedas b) 63 moedas c) 70 moedas d) 84 moedas e) 91 moedas

Problema 10. Um jogador de *Minecraft* quer construir uma escada para alcançar sua casa, que foi construída em uma árvore, com mais facilidade. Sabendo que:

- Um bloco de madeira produz quatro tábuas;
- Duas tábuas produzem um graveto;
- Sete gravetos produzem uma parte de escada.

Sabe-se que não é possível dividir um bloco de madeira. Se o jogador precisa de cinco partes de escada para conectar sua casa ao chão, qual é a quantidade mínima de blocos de tronco que ele precisa coletar?

a) 17 b) 18 c) 19 d) 20 e) 21

Problema 11. Em uma mesa há nove cartões numerados de 1 a 9, sendo que três estão virados para baixo, três virados para cima e os demais estão empilhados. Sabemos que:

- A soma dos números dos três cartões virados para cima é 9;
- A soma dos números dos três cartões virados para baixo é 12.

Qual é a soma dos cartões empilhados?

a) 20 b) 21 c) 22 d) 23 e) 24

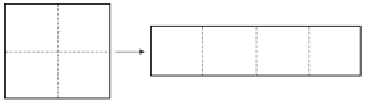
Problema 12. Em uma divisão, o quociente é 8. Se multiplicarmos o divisor e o dividendo por 5, qual será o quociente da divisão?

a) 5 b) 8 c) 16 d) 20 e) 40

Problema 13. Três amigos fizeram uma aposta tentando adivinhar quantas balas haviam em um pacote. Os palpites foram os seguintes: 245, 250 e 285. Quando abriram o pacote e contaram as balas perceberam que um dos palpites estava errado por 17, outro por 18 e outro por 22, para mais ou para menos. Quantas balas haviam no pacote?

a) 233 b) 263 c) 267 d) 272 e) 307

Problema 14. Um quadrado de perímetro 24 cm é dividido em 4 quadrados idênticos para formar um retângulo colocando um quadradinho ao lado do outro, como na figura. Qual é o perímetro desse retângulo?



a) 12 cm b) 24 cm c) 30 cm d) 32 cm e) 36 cm

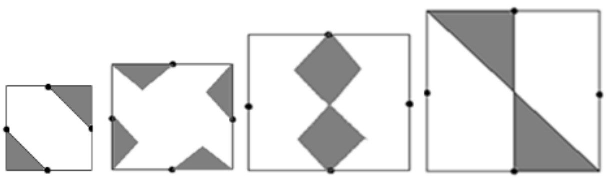
Problema 15. A mãe do Carlinhos fez um jantar com arroz, feijão, carne e três tipos de saladas: alface, tomate e cenoura. Se ao montar um prato a mãe dele exigiu que houvesse 5 ingredientes no prato, dentre estes cinco obrigatoriamente tivesse arroz, feijão e uma salada, de quantas maneiras distintas Carlinhos poderia montar seu prato?

a) 2 b) 4 c) 8 d) 12 e) 20

Problema 16. Valentina e Enzo estavam brincando de adivinhação com números. Valentina desafiou Enzo a escrever o maior número de três algarismos que é múltiplo de 3. Enzo por sua vez a desafiou a escrever o menor número de três algarismos que é múltiplo de 3. Qual é a soma dos algarismos dos dois números que eles escreveram?

a) 29 b) 30 c) 31 d) 32 e) 33

Problema 17. Os 4 quadrados de diferentes lados têm os pontos médios dos lados destacados.

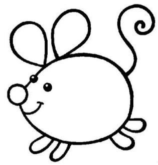


Quantos desses quadrados têm área sombreada igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Problema 18. Daniel quer pintar o ratinho da figura abaixo, obedecendo as seguintes instruções:

- As duas orelhas devem ser pintadas com a mesma cor.
- As quatro patinhas devem ser pintadas com a mesma cor.
- Regiões vizinhas do ratinho (por exemplo, o corpo e o nariz) não podem ser pintadas com a mesma cor.
- As patinhas devem ser pintadas com a mesma cor das orelhas.



Daniel tem cinco lápis de cores diferentes para colorir o ratinho. De quantas maneiras ele pode pintá-lo seguindo as instruções acima?

a) 60 b) 80 c) 120 d) 20 e) 48

Problema 19. Um auditório tem 24 fileiras, cada uma com 21 poltronas. Essas poltronas foram numeradas da esquerda para a direita, começando pela primeira fileira. Se eu estou na poltrona 240, qual é a localização dela (fileira e posição)?

a) 11ª fileira e 12ª coluna
b) 12ª fileira e 9ª coluna
c) 12ª fileira e 12ª coluna
d) 13ª fileira e 13ª coluna
e) 13ª fileira e 9ª coluna

Problema 20. Qual é o número primo cujo antecessor é divisível por 11 e o sucessor por 17?

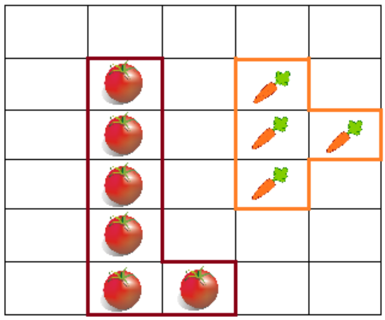
a) 11 b) 44 c) 67 d) 101 e) 103

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
d	b	c	a	a	b	a	a	e	b
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
e	b	c	c	b	b	d	b	b	c

Segunda Fase

Problema 1. Dona Maria dividiu sua horta em regiões retangulares em que o comprimento do maior lado é igual ao dobro do comprimento do menor lado. Ela decidiu colocar dois cercados, como na figura abaixo, um para plantar cenouras e outro para plantar tomates.



a) Se o perímetro do cercado das cenouras tem 42 metros, qual é perímetro do cercado dos tomates?

b) Se na região fora dos cercados de sua horta Dona Maria ainda não plantou legumes, quanto de área ela tem à disposição?

Problema 2. Ana, Beatriz e Jorge, moram em um prédio de três andares, cada um deles tem um animal de estimação e usa um tipo de transporte. Sabendo que:

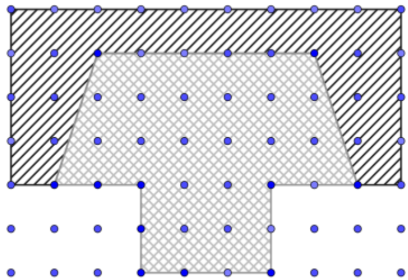
Ana mora um andar acima de Beatriz.
O coelho mora no 1º andar.
Quem anda de bicicleta mora dois andares acima de quem anda de carro.
Jorge mora no 3º andar.
O cachorro mora um andar acima do gato.

a) Quem anda de carro?

b) Quem tem um cachorro?

c) Quem anda de ônibus?

Problema 3. Na figura abaixo, sabendo que cada quadradinho tem área igual a 1 cm^2, determine:



a) A área da região tracejada.

b) A área da região quadriculada.

c) Qual a razão entre a área da região tracejada e da quadriculada?

Problema 4. Supondo que o professor de Educação Física disponha de 10 bolas, 7 apitos e 12 camisetas, e ele pretende distribuir estes objetos entre duas pessoas.

a) De quantas maneiras distintas o professor pode distribuir todos estes objetos, de tal forma que cada pessoa receba, ao menos, 4 bolas, 3 apitos e 5 camisetas?

b) De quantas maneiras distintas o professor pode distribuir todos estes objetos, de tal forma que cada pessoa receba, ao menos, 3 bolas, 2 apitos e 4 camisetas?

c) Qual é o máximo divisor comum entre os números obtidos nos itens (a) e (b)?

d) Qual é a razão entre os números obtidos nos itens (a) e (b)?

Problema 5. Lúcio estava brincando com os números e inventou uma forma de codificá-los a partir de sua estrutura. Os passos para escrever o código de um número de até nove algarismos são: o primeiro dígito representa a quantidade de algarismos primos, o segundo dígito indica a quantidade de algarismos não-primos (compostos), e finalmente, o terceiro dígito indica o total de algarismos do número.

Por exemplo, o número 5.446.902 tem 7 algarismos, sendo 2 primos e 5 compostos, logo a estrutura desse número pode ser lida como 257. Outro exemplo é o número 4689, que tem 4 algarismos, sendo nenhum primo e quatro compostos. Logo, essa estrutura gera o código 044.

a) Qual é a maior estrutura possível que pode ser gerada a partir dos passos que Lúcio inventou? E a menor estrutura possível?

b) Mostre que é impossível obter o código 222 segundo as regras de Lúcio.

c) Encontre um número que seja igual ao seu próprio código.

Problema 6. O professor Beto solicita que seus alunos contem quantos números naturais menores que 10000 tem exatamente dois dígitos 3 consecutivos. Por exemplo, nessa lista, que o professor solicita que seus alunos contem, devem aparecer os números da forma 332, 5332, 3383, porém os números da forma 3234, 4333 não aparecem.

Quantos números os alunos devem encontrar na lista do professor Beto?

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Lucas Galvan Calçada - Colégio Integração)*

a) A resposta é 54 metros. Para descobrirmos isso, chamamos de x o lado menor, e $2x$ o lado maior, como é o dobro. Agora, temos que somar, e temos $2x+2x+2x+2x+x+x+x+x+x+x = 14x$. Segundo o enunciado, o cercado tem 42 metros, por isso temos que $14x = 42\,m$, e $x = 3\,m$. Repetimos o processo com o cercado dos tomates, e temos $2x+2x+2x+2x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x = 18x$, e temos $18 \cdot 3 = 54$ metros.

b) A resposta é $360\,m^2$. Como vimos na letra a), o lado menor tem 3 metros, então o lado maior deve medir o dobro que é 6. Multiplicamos $6 \cdot 3$, e temos $18\,m$. Agora, basta contarmos quantos retângulos vazios tem, que são 20. Por fim, fazermos $20 \cdot 18\,m^2$, e temos $360\,m^2$.

Problema 2. *(Resolução de Haroldo Borg Filho - Colégio Pontagrossense Sepam)*

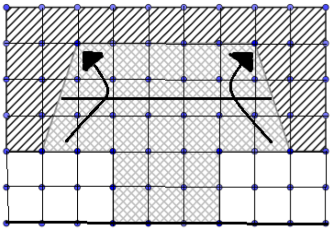
a) De acordo com as dicas 1 e 4, sabemos os andares que todos as crianças moram, Jorge no 3º andar (está escrito), Ana no 2º (ela mora um andar acima que Beatriz, não teria como ser no 1º andar, porque não existe andar 0) e Beatriz no 1º (abaixo de Ana). A dica 3 nos afirma que o carro (dois andares abaixo da bicicleta) está no 1º andar, pois não existem 4 andares $(4-2=2)$ ou 5 $(5-2=3)$ apenas 3 $(3-2=1)$ ou seja, Beatriz anda de carro.

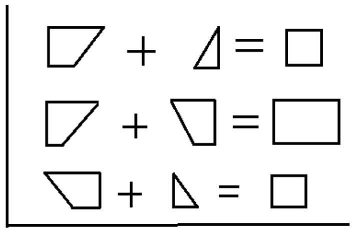
b) Dos 3 animais: coelho, cachorro e gato, o coelho está no 1º andar, Beatriz não tem cachorro, restando apenas 2 andares (2 e 3). De acordo com a dica 5, o cachorro está em um andar a cima do gato, como neste prédio não há 4 andares $(3+1=4)$, o gato só pode estar no 2º andar e o cachorro no 3º, junto com Jorge.

c) Dos 3 meios de transporte: ônibus, bicicleta e carro, adicionamos a informação dada na alternativa a), que Beatriz anda de carro, ela está no 1º andar, as dicas informam que, quem anda de bicicleta está dois andares a cima do carro (Beatriz)$(1+2=3)$, Jorge anda de bicicleta, e assim sobrando Ana, que mora no 2º andar e anda de ônibus.

Problema 3. *(Resolução de Carlos Eduardo Gonçalves Reis - Colégio Elite Tales de Mileto)*

Para as regiões retângulares, basta contar o número de quadrados. Já as regiões triângulares, se unirmos dois triângulos iguais, obtemos um retângulo de mesma base e altura, podendo posteriormente contar os quadrados:





a) 15 quadrados (retângulos) + 3 quadrados (triângulos) = 18 quadrados. Logo, a área da região tracejada é igual à 18 cm^2.

b) 21 quadrados (retângulos) + 3 quadrados (triângulos) = 24 quadrados. Logo, a área da região quadriculada é igual à 24cm².

c) A razão entre a área da região tracejada e da região quadriculada é igual a $\frac{18}{24}$.

Problema 4. *(Resolução de Lucas Galvan Calçada - Colégio Integração)*

a) Primeiro vamos analisar as possibilidades de distribuição dos objetos:

A primeira pessoa poderá receber: 4, 5 ou 6 bolas; 3 ou 4 apitos; 5, 6 ou 7 camisetas.

E para a segunda pessoa ocorrerá a mesma coisa, ela poderá receber: 4, 5 ou 6 bolas; 3 ou 4 apitos; 5, 6 ou 7 camisetas.

Totalizando: 3 possibilidades de distribuição de bolas; 2 possibilidades de distribuição de apitos; e 3 possibilidades de distribuição de camisetas. Multiplicando, os valores iremos obter:

$$3 \times 2 \times 3 = 18 \text{ possibilidades.}$$

Portanto existem 18 possibilidades.

b) Primeiro vamos analisar as possibilidades de distribuição dos objetos:

A primeira pessoa poderá receber: 3, 4, 5, 6 ou 7 bolas; 2, 3, 4 ou 5 apitos; 4, 5, 6, 7 ou 8 camisetas.

E para a segunda pessoa ocorrerá a mesma coisa, ela poderá receber: 3, 4, 5, 6 ou 7 bolas; 2, 3, 4 ou 5 apitos; 4, 5, 6, 7 ou 8 camisetas.

Totalizando: 5 possibilidades de distribuição de bolas; 4 possibilidades de distribuição de apitos; e 5 possibilidades de distribuição de camisetas. Multiplicando, os valores iremos obter:

$$5 \times 4 \times 5 = 100$$

possibilidades.

Portanto existem 100 possibilidades.

c) Para esta resolução vamos realizar o M.D.C. entre 18 e 100:

$$\begin{array}{c|c}
18\ 100 & 2 \\
\hline
9\ 50 & 2 \\
9\ 25 & 3 \\
3\ 25 & 3 \\
1\ 25 & 5 \\
1\ 5 & 5 \\
1\ 1 &
\end{array}$$

Logo, vemos que o M.D.C. é 2.

d) Sabendo os valores de a) que é 18 e b) que é 100, basta dividir:

$$\frac{18}{100}.$$

Sabendo que esses dois números possuem o 2 como M.D.C., que foi encontrado no item c), podemos simplificar a razão por 2:

$$\frac{18}{100} = \frac{9}{50}.$$

Portanto a razão entre a) e b) pode ser expressa por: $\frac{9}{50}$.

Problema 5. *(Resolução de Henrique Galvan Calçada - Colégio Integração)*

a) A resposta é: a maior estrutura é 909 e a a menor é 011. A maior é obtida por apenas primos, como 777777777 que tem 9 algarismos, 9 primos e 0 compostos: 909. E a menor pode ser obtida do número 4, tendo 0 primos, 1 composto e 1 algarismo: 011.

b) Como o último dígito é 2, o número deve ter no total 2 algarismos: sendo 2 primos e 2 compostos. Mas como não há um número primo e composto, isto não é possível, teria que ter 4 algarismos então.

c) Esse número é o 213. Como há 2 primos, o primeiro algarismo é 2; 1 composto, o segundo algarismo é 1 e ao total 3 dígitos. Para achar este número, devemos procurar por números de 3 algarismos porque o código tem 3 algarismos. Logo o último deve ser 3. A partir daí podemos achar por tentativa e erro.

Problema 6. *(Resolução da pauta)*

Os alunos devem escolher números da forma:

$$33mn,\ m33n \text{ ou } mn33$$

Dessa forma dividimos o problema em três casos:

1º caso são os números do tipo $33mn$**:** nesse caso há 9 modos de se escolher o m, uma vez que o 3 não pode ser escolhido e 10 modos de se escolher o n, uma vez que o 3 pode ser uma opção.
Logo existem $9 \times 10 = 90$ maneiras de se formar um número nesse caso.

2º caso são os números do tipo $m33n$**:** nesse caso, como todos os algarismos exceto o 3 podem ser usados, há 9 modos de se escolher os números m e n.
Assim, no total, há $9 \times 9 = 81$ maneiras de se formar um número nesse formato.

3º caso são os números do tipo $mn33$**:** para este último caso há 10 modos de se escolher m e 9 modos de se escolher n. Portanto $10 \times 9 = 90$ modos de se obter tal número.

Logo, o total de casos contados pelos alunos deve ser de $90 + 81 + 90 = 261$.

Nível 2

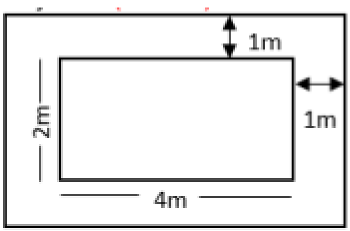
Primeira Fase

Problema 1. Em um mega cinema os bilhetes gerados exibem uma senha formada por três dígitos, sendo o primeiro dígito um número, o segundo uma consoante e o terceiro uma vogal. Qual o número de senhas diferentes que podem ser formadas?

a) 1.000 b) 1.050 c) 1.170 d) 1.300 e) 1.350

Problema 2. Igual ao **Problema 4** do Nível 1.

Problema 3. Uma piscina retangular mede 2m × 4m e em todo seu redor deseja-se construir uma calçada de 1m de largura como mostra a figura abaixo. Sabendo que as lajotas para sua construção medem 50cm × 50cm, quantas lajotas serão necessárias para cobrir a calçada?

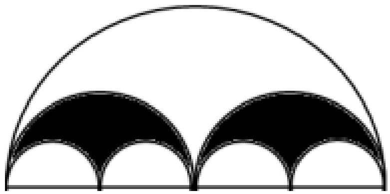


a) 256 lajotas
b) 128 lajotas
c) 64 lajotas
d) 32 lajotas
e) 16 lajotas

Problema 4. João trabalha em um restaurante determinada quantidade de horas por dia, 2 vezes na semana. Maria faz a metade da jornada diária de João no dobro da quantidade de dias. Já Isabela, faz o quadruplo de horas diárias que Maria e o triplo de dias que João. Qual a razão entre a carga horária semanal de Isabela e a carga horaria semanal de João?

a) 3/2 b) 3 c) 6 d) 7/2 e) 12

Problema 5. Na figura abaixo a semicircunferência maior tem 8 cm de raio e sobre seu diâmetro estão quatro semicircunferências menores. Qual a área da região hachurada?



a) $32\,\pi\,cm^2$ b) $24\,\pi\,cm^2$ c) $16\,\pi\,cm^2$ d) $8\,\pi\,cm^2$ e) $4\,\pi\,cm^2$

Problema 6. Qual o resto da divisão de $2019^2 + 2020^3$ por 5?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Problema 7. As páginas do livro que Laura está lendo são todas numeradas a partir do 1 e estão escritas na frente e no verso de cada folha. Nos números dessas páginas, o dígito 0 aparece exatamente sete vezes e o dígito 8 aparece exatamente oito vezes. Qual é o número da última página desse livro?

a) 68 b) 71 c) 78 d) 85 e) 88

Problema 8. Marcelo estava brincando com sua calculadora quando percebeu algo interessante. Dado dois números a e b, tais que:
- Sejam compostos por três algarismos consecutivos, sendo que o menor algarismo ocupa a casa das centenas e o maior a casa das unidades;
- A soma das unidades de a e b sempre resulta em 10.

A soma $a + b$ sempre resultará em uma constante c. Nessas condições, qual é a soma dos algarismos do número c?

a) 6 b) 9 c) 13 d) 12 e) 15

Problema 9. Igual ao **Problema 2** do Nível 1.

Problema 10. Igual ao **Problema 6** do Nível 1.

Problema 11. Igual ao **Problema 17** do Nível 1.

Problema 12. Números palíndromos são aqueles que lidos da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda são iguais. Por exemplo, 33, 232, 3443, 123321. O menor número palíndromo maior que o número 2016102 é o número:

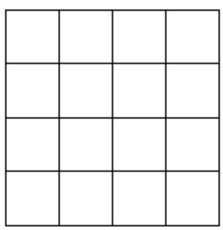
a) 2017102 b) 3016103 c) 2015102 d) 2116112 e) 2026202

Problema 13. Na igualdade $2*0*2*0*2*0*2*0*2*0*2*0*2*0*2*0*2*0*2*0 = 2*0*2*0$ todos os asteriscos devem ser substituídos pelos sinais + ou - de forma que a igualdade esteja correta. Qual é a menor quantidade possível de asteriscos que devem ser substituídos pelo sinal +?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Problema 14. Igual ao **Problema 20** do Nível 1.

Problema 15. Devemos colorir os dezesseis quadrados do tabuleiro 4×4 da figura abaixo, de modo que em cada linha, coluna e em cada uma das duas diagonais principais não tenha quadradinhos coloridos com uma mesma cor. Qual é o número mínimo de cores necessárias para que isso seja realizado?

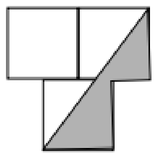


a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

Problema 16. Júlio, Augusto e Leonardo são irmãos. Em 2015 a idade de Augusto era o triplo da idade de Leonardo. Em 2020 a soma das idades de Leonardo e Augusto é o dobro da idade de Júlio. Sabendo que quando Leonardo nasceu Augusto tinha oito anos, qual é a idade atual de Júlio?

a) 10 anos b) 11 anos c) 12 anos d) 13 anos e) 14 anos

Problema 17. Na figura abaixo, há 3 quadrados de comprimento igual a $2\,cm$. Observe que o centro do quadrado da base da figura está alinhado com o lado comum dos dois quadrados de cima.

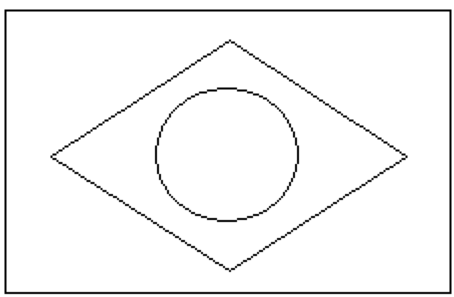


Qual a área da região em cinza?

a) $8\ cm^2$ b) $7\ cm^2$ c) $6\ cm^2$ d) $5\ cm^2$ e) $4\ cm^2$

Problema 18. Igual ao **Problema 12** do Nível 1.

Problema 19. Um esboço da bandeira do Brasil é dado abaixo, com apenas as formas retângulo, losango e círculo. De quantas formas distintas podemos pintar a bandeira utilizando as cores verde, amarelo e azul?



a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

Problema 20. Considerando-se que um anagrama da palavra OPMAT seja uma permutação das letras dessa palavra, tendo ou não significado na linguagem comum, qual a quantidade de anagramas distintos que é possível formar com essa palavra?

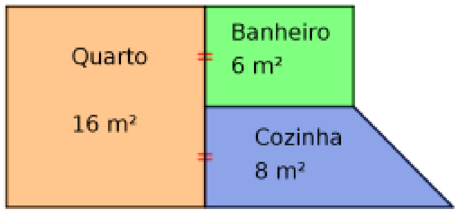
a) 30 b) 60 c) 120 d) 180 e) 240

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
b	a	c	ANULADA	d	b	c	e	b	b
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
d	a	c	c	b	ANULADA	e	b	b	c

Segunda Fase

Problema 1. Marquito tem uma construção, com paredes que medem 3 metros de altura. Nesta construção, há um quarto quadrado, um banheiro retangular e uma cozinha trapezoidal, cujas áreas estão indicadas na figura abaixo.



a) Qual é a área da construção do Marquito?

b) Quais são as medidas dos lados da cozinha?

c) Marquito quer pintar as paredes internas da cozinha e do quarto. Considerando que 1 litro de tinta pinta exatamente 10 m^2, pelo menos quantos litros de tinta Marquito precisa comprar?

Problema 2. O professor Beto solicita que seus alunos contem quantos números naturais menores que 10000 tem exatamente dois dígitos 3 consecutivos. Por exemplo, nessa lista, que o professor solicita que seus alunos contem, devem aparecer os números da forma 332, 5332, 3383, porém os números da forma 3234, 4333 não aparecem. Quantos números os alunos devem encontrar na lista do professor Beto?

Problema 3. Ana, Beatriz e Jorge, moram em um prédio de três andares, cada um deles tem um animal de estimação e usa um tipo de transporte. Sabendo que:

Ana mora um andar acima de Beatriz.
O coelho mora no 1º andar.
Quem anda de bicicleta mora dois andares acima de quem anda de carro.
Jorge mora no 3º andar.
O cachorro mora um andar acima do gato.

a) Quem anda de carro?

b) Quem tem um cachorro?

c) Quem anda de ônibus?

Problema 4. Fabiane possui uma calculadora diferente com três teclas: D, que duplica o número na tela da calculadora, T que apaga o algarismo das unidades do número e F, que soma 20 ao número que aparece na tela da calculadora.

a) Fabiane digitou o número 123 e apertou as teclas D, T, F e T, nessa ordem. Que número ela encontrou?

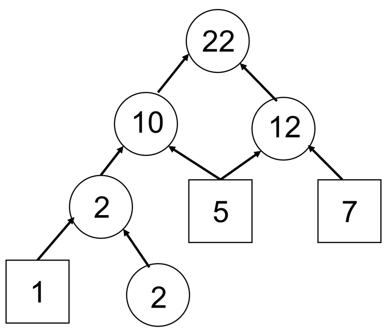
b) Após digitar um determinado número de 3 algarismos, múltiplo de 10 e apertar as teclas T, F, D e F, nessa ordem, Fabiane encontrou o número 96. Qual foi o número que ela digitou inicialmente?

c) Explique como é possível obter o número 2022, a partir do número 10018, apertando cada tecla da calculadora de Fabiane uma única vez.

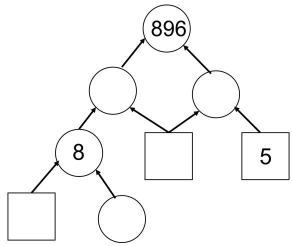
Problema 5. Augusto criou figuras utilizando quadrados e círculos. Ele preencheu essas figuras com números inteiros positivos seguindo as regras abaixo:
· Círculos só podem ser preenchidos com números pares;
· Quadrados só podem ser preenchidos com números ímpares;
· Quando há duas flechas apontando para uma mesma forma ela deve ser preenchida com o resultado de uma operação entre os números das formas de onde partem as flechas, sendo que:

- Se as formas forem iguais, os números devem ser somados;
- Se as formas forem diferentes, os números devem ser multiplicados.

A figura ao lado ilustra um exemplo em que Augusto preencheu as formas com essas regras.

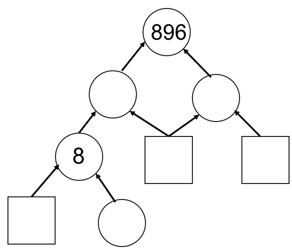


a) Preencha a figura abaixo segundo as regras de Augusto.



b) Mostre que independentemente da operação realizada entre duas formas o resultado será sempre um número par.

c) De quantas maneiras a figura abaixo pode ser preenchida?



Problema 6. Daniel foi ao banco para abrir uma conta poupança e precisa criar uma senha para poder acessar a sua conta. Para a criação dessa senha, o gerente do banco impôs as seguintes regras:

- a senha deve possuir seis algarismos distintos;
- os algarismos da 4ª, 5ª e 6ª posições devem ser maiores que 5;
- o algarismo da 3ª posição deve ser maior que 4;
- o algarismo da 2ª posição deve ser maior que 3;
- o algarismo da 1ª posição deve ser maior que 2;

Por exemplo, 345678 é uma senha possível, mas 245678 não é, pois o algarismo na primeira posição não é maior do que 2.

a) Quantas senhas bancárias distintas Daniel conseguirá formar?

b) Se a senha bancária do Daniel começar com 3469, quais devem ser os algarismos da quinta e sexta posições?

c) Se Daniel começar a formar sua senha bancária escolhendo o algarismo 7 para a quarta posição e o algarismo 6 para a sexta posição, quantas são as possibilidades de escolha para a terceira posição?

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Mariele Breda - Colégio Sagrada Família)*

a) Para solucionar este problema, ou seja, encontrar a área total da construção, é necessário apenas somar as áreas do quarto, da cozinha e do banheiro:

$$16+8+6=30\,m^2$$

Portanto, a área da construção é de $30\,m^2$.

b) Sabendo que o quarto é um quadrado, conclui-se que cada lado mede $4\,m$.

Também nota-se, pela figura do enunciado, que a parede menor do banheiro mede a metade da parede do quarto, ou seja $2\,m$, sabendo disso, podemos concluir que a parede maior do banheiro mede $3\,m$.

Com isso podemos saber que dois lados da cozinha mede $2\,m$ e $3\,m$. Sabendo que a cozinha tem formato de trapézio de base menor $3\,m$ e altura $2\,m$, aplicamos na fórmula da área do trapézio:

$$A_T=\frac{(B+b)h}{2} \implies 8=\frac{(B+3)2}{2} \implies B=8-3=5\,m.$$

Para encontrar o último lado da cozinha, aplicamos Teorema de Pitágoras:

$$a^2=b^2+c^2$$

$$a^2=2^2+2^2$$

$$a^2=8$$

$$a\approx 2{,}8\,m$$

Portanto os lados da cozinha medem: $2\,m$; $2{,}8\,m$; $3\,m$ e $5\,m$.

c) Calculando a área das paredes do quarto; e multiplicando por 4, pois o quarto possui 4 paredes;

$$4\times 3\times 4=48\,m^2$$

Para as paredes da cozinha:

$$(2\times 3)+(2{,}8\times 3)+(3\times 3)+(5\times 3)=38{,}4\,m^2.$$

Agora basta somar as áreas das paredes do quarto e da cozinha, e dividir por 10, visto que cada litro de tinta pinta $10m^2$

$$\frac{48+38,4}{10} = \frac{86,4}{10} = 8,64.$$

Portanto, serão necessários pelo menos 9 litros de tinta.

Problema 2. *(Resolução de Luis Eduardo Cosseti Correia - Colégio Alfa Plus)*

Em dois algarismos com dois números 3 consecutivos, temos: $1 \cdot 1 = 1$ possibilidade.

Em três algarismos com dois números 3 consecutivos, temos: $1 \cdot 1 \cdot 9 = 9$ possibilidades. E também temos: $8 \cdot 1 \cdot 1 = 8$ possibilidades.

Em quatro algarismos com dois 3 números consecutivos temos: $1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 10 = 90$ possibilidades. E temos: $9 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1 = 81$ possibilidades. Por último temos: $8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 = 72$ possibilidades.

Somando todas as possibilidades obteremos: $1+9+8+90+81+72 = 261$. Portanto, deverão ser encontrados 261 números.

Problema 3. *(Resolução de Pedro Luiz Scheifer de Souza - Colégio Vila Militar Cescage)*

1º andar	Beatriz	Coelho	Carro
2º andar	Ana	Gato	Ônibus
3º andar	Jorge	Cachorro	Bicicleta

Conclui-se que: no primeiro andar mora Beatriz, que tem um coelho e anda de carro. No segundo andar mora a Ana, que tem um gato e anda de ônibus. No terceiro andar mora o Jorge, que tem um cachorro e anda de bicicleta.

a) É possível afirmar conforme o esquema que é a Beatriz.

b) É possível afirmar conforme o esquema que é o Jorge.

c) É possível afirmar conforme o esquema que é a Ana.

Problema 4. *(Resolução de Amanda Orizzi Moutinho de Souza - Colégio Marista Pio XII)*

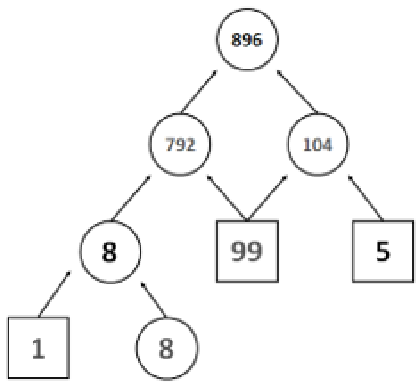
a) A resposta é 4, pois $123 \times 2 = 246$, e ao remover a unidade fica 24 que somamos 20 e fica 44 e removemos a unidade novamente e fica 4.

b) A resposta é 180. Para encontrar esse valor, basta fazer a ordem contrária com as operações inversas: $96 - 20 = 76$; $76 \div 2 = 38$; $38 - 20 = 18$ e 180 que é múltiplo de 10.

c) Retire o último algarismo "8", ficando 1001, multiplique por 2 e some 20, ficando com 2022, usando uma única vez as teclas: **T**, **D** e **F**.

Problema 5. *(Resolução da pauta)*

a) O preenchimento correto é apresentado na figura abaixo:



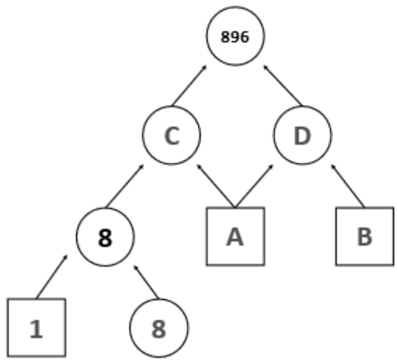
b) As regras de Augusto estabelecem três casos possíveis:

- **Dois quadrados:** Nesse caso os dois números são ímpares e devem ser somados. A soma de dois números ímpares sempre resulta em um número par.
- **Dois círculos:** Nesse caso os dois números são pares e devem ser somados. A soma de dois números pares sempre resulta em um número par.

- **Um quadrado e um círculo:** Nesse caso um número é par e o outro ímpar, ademais esses números devem ser multiplicados. O produto de um número ímpar e um par sempre resulta em um número par.

Portanto conclui-se que independentemente das formas e da paridade dos números o resultado sempre será par.

c) Inicialmente é necessário determinar dois números de paridades diferentes que multiplicados entre si resultem em 8, o único par possível é 1 e 8. Desta forma reduzimos a quantidade de números desconhecidos de 6 para 4. Sejam A, B, C e D os quatro números desconhecidos, tem-se que:



Pelas regras de Augusto sabe-se que:

- A e B são números ímpares;
- C e D são números pares;
- $8A = C$, $A + B = D$ e $C + D = 896$.

Dessas constatações segue que:

$$C + D = 896 \rightarrow 8A + A + B = 869 \rightarrow 9A + B = 896.$$

Note que $896 = 9 \times 99 + 5$, logo o maior valor possível de A é 99 e o menor valor possível de B é 5. Ademais para qualquer número ímpar entre 1 e 99 é possível obter um valor para B que satisfaça a equação acima:

A	1	3	5	7	...	97	99
9A	9	27	45	63	...	873	891
$B = 896 - 9A$	887	869	851	833	...	23	5

Constata-se que A pode ser qualquer número ímpar entre 1 e 99. Para determinar o total de casos possíveis para a figura basta calcular o total de possibilidades para A.

Para determinar o total de números ímpares entre 1 e 99 pode-se calcular a quantidade de pares e subtrair do total de números. Como $99 = 2 \times 49 + 1$ conclui-se que há 45 pares entre 1 e 99, logo há $99 - 49 = 50$ números ímpares. Portanto a figura pode ser preenchida de 50 formas diferentes.

Problema 6. *(Resolução de Luis Eduardo Cosseti Correia - Colégio Alfa Plus)*

a) Usando o princípio multiplicativo, temos $\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot\underline{4}\cdot\underline{3}\cdot\underline{2} = 192$ possibilidades.

b) Os algarismos possíveis entre os últimos 3 dígitos são: 6; 7; 8 e 9. Os algarismos 6 e 9 já foram usados. Portanto, os algarismos possíveis para a quinta e sexta posição são os números 7 e 8.

c) O número descrito é $\_\,\_\,\_\,\underline{7}\,\_\,\underline{6}$. Os algarismos possíveis para a terceira posição: 5; 6; 7; 8 e 9. No entanto, os algarismos 7 e 6 já foram utilizados. Portanto, existem 3 possibilidades de escolha, os algarismos 5; 8 e 9.

Nível 3

Primeira Fase

Problema 1. Igual ao **Problema 7** do Nível 2.

Problema 2. Que expressão pode ser utilizada no lugar do y, de tal forma que as condições fixadas na tabela abaixo sejam satisfeitas:

x	0	6	9	12
y	2	4	5	6

a) $\frac{x}{3}+2$ b) $\frac{y}{3}+2$ c) $\frac{x}{3}-2$ d) $3y+6$ e) $3y-6$

Problema 3. Paulo tem a oportunidade de jogar no máximo cinco vezes num determinado jogo. Em cada rodada desse jogo ele perde ou ganha uma ficha. Paulo começa com uma ficha e para de jogar antes de cinco vezes, se perder todas as suas fichas ou se ganhar três fichas, isto é, se tiver quatro fichas. O número de possibilidades em que o jogo poderá se desenrolar é:

a) 3 b) 5 c) 10 d) 11 e) 12

Problema 4. Benjamin estava estudando a paridade dos números, ele começou a realizar operações com o número p_1. Entretanto sua caneta estava falhando enquanto escrevia, deixando alguns números ilegíveis. A sequência de operações feitas por Benjamin é apresentada abaixo:

$$\begin{gathered} p_1 + *_1 = i_1 \\ i_1 \cdot *_2 = p_2 \\ p_2 \cdot *_3 = p_3 \\ p_3 + *_4 = i_2 \\ i_2 \cdot *_5 = i_2 \end{gathered}$$

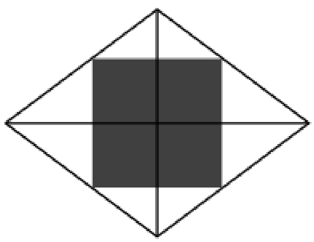
Onde $p_1,\ p_2,\ p_3 \in \mathbb{Z}$ representam números pares, $i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{Z}$ representam números ímpares e $*_1, *_2, *_3, *_4$ e $*_5$ representam os números faltantes. Além disso, sabemos que $p_1 \neq p_2 \neq p_3$ e $i_1 \neq i_2$. Qual das quíntuplas ordenadas abaixo poderia ser utilizada para substituir os $*$ e tornar as equações verdadeiras?

a) $(*_1, *_2, *_3, *_4, *_5) = (1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 3)$
b) $(*_1, *_2, *_3, *_4, *_5) = (1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1)$
c) $(*_1, *_2, *_3, *_4, *_5) = (2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 1)$
d) $(*_1, *_2, *_3, *_4, *_5) = (3,\ 2,\ 8,\ 1,\ 3)$
e) $(*_1, *_2, *_3, *_4, *_5) = (3,\ 4,\ 3,\ 7,\ 1)$

Problema 5. Sabendo que $\dfrac{a+b}{c+a} = 2$ e $\dfrac{b-c}{-a-b} = 4$, qual das expressões abaixo é equivalente a $\dfrac{c-b}{a+b}$?

a) $\dfrac{a+c}{a+b}$ b) $\dfrac{4c-4b}{b-c}$ c) $\dfrac{4b-4c}{a-b}$ d) $\dfrac{2(a+b)}{a+c}$ e) $\dfrac{2(a+c)}{a+b}$

Problema 6. Na figura abaixo, o quadrado destacado é inscrito no losango de diagonais que medem 6 e 8.



Qual o perímetro deste quadrado?

a) $\dfrac{24}{7}$ b) $\dfrac{48}{7}$ c) $\dfrac{4\sqrt{3}-2}{7}$ d) $\dfrac{96}{7}$ e) $\dfrac{120}{7}$

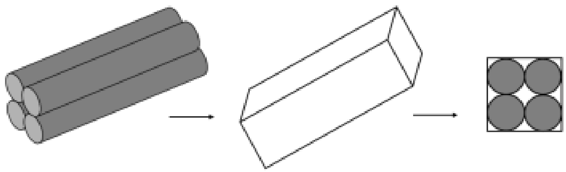
Problema 7. Em um jogo, uma moeda honesta é jogada seguidamente. Cada vez que sai cara, o jogador ganha 1 real; cada vez que sai coroa, o jogador ganha 2 reais. O jogo termina quando o jogador tiver acumulado 3 ou mais reais. Qual é a probabilidade de que o jogador ganhe exatamente 3 reais?

a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{5}{8}$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{3}{8}$ e) $\dfrac{1}{2}$

Problema 8. Qual dos números reais a, b, c, d ou e é o maior, se
$a-4=b+7=c-2=d+3=e+1$?

a) a b) b c) c d) d e) e

Problema 9. Quatro cilindros, cada um com 50 cm de comprimento e 2 cm de raio, são embalados em um paralelepípedo de mesmo comprimento, e no espaço vazio será completado com água. Qual o volume que preenche a parte vazia?



a) $800\,\pi\ cm^3$
b) $2400\,\pi\ cm^3$
c) $3200(4-\pi)\ cm^3$
d) $4000\,\pi\ cm^3$
e) $800(4-\pi)\ cm^3$

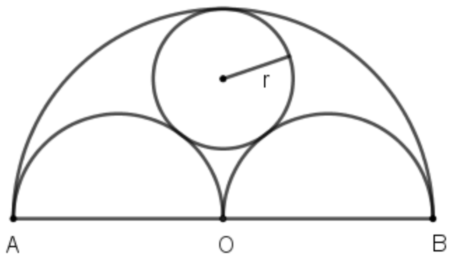
Problema 10. As faces de um dado foram numeradas de modo que a soma dos números em faces opostas é sempre a mesma. Os números das faces são: 0, -1, 2, -3, 4, -5. Se lançarmos dois dados como este, qual dos números a seguir não pode ser igual a soma das faces expostas do quadrado?

a) 8 b) 6 c) 0 d) -5 e) -9

Problema 11. No País das Maravilhas todos os meses têm 41 dias. Os feriados sempre acontecem nos dias cujo número é primo, um palíndromo ou divisível por 9. Um palíndromo numérico é um número que lido da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda permanece o mesmo. Nessas condições quantas vezes por mês um dia útil fica entre dois feriados?

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

Problema 12. Uma circunferência de raio r é tangente às duas semicircunferências menores e à semicircunferência maior. Conforme figura abaixo.



Se $\overline{AO} = \overline{BO} = 6$, então r vale:

a) $3\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) 2 e) 3

Problema 13. Igual ao **Problema 1** do Nível 2.

Problema 14. Igual ao **Problema 13** do Nível 2.

Problema 15. Igual ao **Problema 5** do Nível 2.

Problema 16. Quantos são os números ímpares de três algarismos distintos?

a) 256 b) 292 c) 320 d) 345 e) 381

Problema 17. Considere as operações

$$\begin{cases} a \otimes b = 2a^2b^2 - a^2 - b^2 \\ a \oplus b = a.b^{-1} \end{cases}$$

e responda qual expressão algébrica representa a simplificação de $(x \otimes x) \oplus 2x$:

a) $2x$ b) $x^2 + 2x$ c) $x^2 - 2x$ d) $x^3 + x$ e) $x^3 - x$

Problema 18. Igual ao **Problema 16** do Nível 2.

Problema 19. Igual ao **Problema 6** do Nível 2.

Problema 20. Durante às férias de Laura choveu 13 vezes, sabemos que:
- Se a manhã estava ensolarada, então a tarde foi chuvosa e a noite chuvosa;
- Se a manhã estava nublada, então a tarde foi nublada e a noite chuvosa;
- Se a manhã estava chuvosa, então a tarde foi nublada e a noite com céu limpo.

Houve sete noites chuvosas, cinco tardes nubladas e quatro manhãs ensolaradas. Com base nessas informações quantos dias de férias Laura teve?

a) 5 dias b) 6 dias c) 7 dias d) 8 dias e) 9 dias

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
c	a	d	e	d	d	b	a	e	e
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
b	d	b	c	d	c	e	ANULADA	b	e

Segunda Fase

Problema 1. Daniel foi ao banco para abrir uma conta poupança e precisa criar uma senha para poder acessar a sua conta. Para a criação dessa senha, o gerente do banco impôs as seguintes regras:

- a senha deve possuir seis algarismos distintos;
- os algarismos da 4ª, 5ª e 6ª posições devem ser maiores que 5;
- o algarismo da 3ª posição deve ser maior que 4;
- o algarismo da 2ª posição deve ser maior que 3;
- o algarismo da 1ª posição deve ser maior que 2;

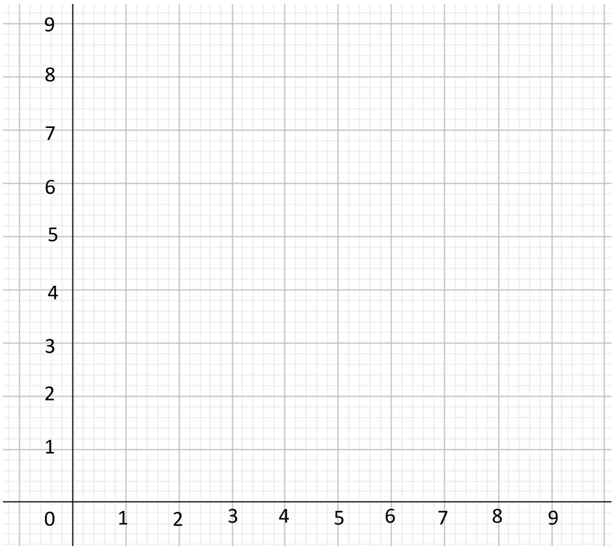
Por exemplo, 345678 é uma senha possível, mas 245678 não é, pois o algarismo na primeira posição não é maior do que 2.

a) Quantas senhas bancárias Daniel conseguirá formar?

b) Se a senha bancária do Daniel começar com 3469, quais devem ser os algarismos da quinta e sexta posições?

c) Se Daniel começar a formar sua senha bancária escolhendo o algarismo 7 para a quarta posição e o algarismo 6 para a sexta posição, quantas são as possibilidades de escolha para a terceira posição?

Problema 2. Após inserir os pontos de coordenadas A(0,0), B(5,0), C(2,3), D(4,3), E(7,0) e F(7,4) no plano cartesiano, responda as perguntas:



a) Qual é a área do polígono ABC?

b) Qual é a área do quadrilátero ACDB?

c) Qual é a razão entre as áreas dos triângulos ABC e BED?

Problema 3. Ana, Beatriz e Jorge, moram em um prédio de três andares, cada um deles tem um animal de estimação e usa um tipo de transporte. Sabendo que:

Ana mora um andar acima de Beatriz.
O coelho mora no 1º andar.
Quem anda de bicicleta mora dois andares acima de quem anda de carro.
Jorge mora no 3º andar.
O cachorro mora um andar acima do gato.

a) Quem anda de carro?

b) Quem tem um cachorro?

c) Quem anda de ônibus?

Problema 4. Em Análise Combinatória, todas as permutações possíveis entre as letras de uma palavra são chamadas de anagramas. Considerando os anagramas da palavra **OLIMPIADAS**, responda:

a) Qual é o total de anagramas?

b) Quantos destes anagramas começam com L e terminam com P?

c) Em quantos destes anagramas as letras **PIADAS** permanecem juntas e nessa ordem?

Problema 5. Considere um quadrado composto por 9 quadrados menores (casas). Cada casa deve ser preenchida com um número primo, sem repetição. Após o preenchimento, as linhas e colunas devem ser somadas. A figura abaixo mostra um quadrado preenchido de acordo com essas regras. A soma de cada linha aparece do lado direito e a soma de cada coluna aparece na parte de baixo.

97	47	41	185
3	19	5	27
31	71	89	191
131	137	135	

a) Mostre que nas condições dadas só é possível obter duas somas pares.

b) Preencha o quadrado abaixo de forma adequada.

			103
			110
97			169
269	10	103	

c) Considere um novo conjunto de regras: os números primos dentro do quadrado podem ser repetidos, contudo, todas as somas devem resultar em números primos. Nessas condições, quais números devem ser colocados na figura abaixo?

3			19
			23
		3	
23		19	

Problema 6. O professor de matemática do Colégio Infinito, dá uma prova surpresa para os X alunos da sua turma A. O professor diz que a prova pode ser feita individualmente ou em duplas de alunos. Quantas são as formas que os alunos da turma A podem se organizar para fazer esta prova se:

a) $X = 3$.

b) $X = 4$.

c) $X = 9$.

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Rafael Barbosa Vaz - Colégio Marista Pio XII)*

a) Utilizando o Princípio Fundamental da Contagem:

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 2^6\cdot 3 = 192.$$

Assim, descobrimos que existem 192 possibilidades.

b) Sabemos que

I) Senha: 3 4 6 9 _ _;

II) Tanto para a 5° quanto para a 6° casas os números escolhidos devem ser maiores que o 5 e distintos do que já existem;

III) O conjunto $S = \{n \in \mathbb{N} \,|\, 5 < n \leqslant 9\}$ é {6,7,8,9}. Porém, tanto o 6 quanto o 9 já foram utilizados, sobram então os algarismos 7 e 8 para compor as posições restantes, podendo permutar entre si.

Logo, teremos Senha 1 = 34678 ou Senha 2 = 34687.

c) Temos

I) Senha : _ _ _ 7 _ 6;

II) Condição para a 3^a posição: ser maior que 4 e diferente de 6 e 7;

III) Desse modo, nos resta os algarismos 5, 8 e 9 para compor a 3^a casa.

Problema 2. *(Resolução de Felipe Mandalozzo Tebcherani - Colégio Positivo Master)*

a) ABC é um triângulo de base 5 e altura 3. Pode-se dizer, então, que a área desse triângulo é metade da área do quadrilátero com mesma base e mesma altura. Logo, a área é:

$$S = \frac{b.h}{2} \Longrightarrow S = \frac{5\times 3}{2} \Longrightarrow S_{ABC} = 7,5\,u.a.$$

b) Esse quadrilátero é um trapézio, podendo ter sua área calculada pela metade do produto entre a altura e a soma das bases.

$$S = \frac{(B+b).h}{2} \Longrightarrow S = \frac{(5+2).3}{2} \Longrightarrow S = 10,5\,u.a.$$

c) A área do triângulo BED pode ser calculada com o mesmo raciocínio do item a). Sua base é de 2 e sua altura é de 3.

$$= \frac{b.h}{2} \Longrightarrow S = \frac{2.3}{2} \Longrightarrow S_{BED} = 3\,u.a.$$

A razão será então:

$$r = \frac{S_{ABC}}{S_{BED}} \Longrightarrow r = \frac{7,5\,u.a}{3\,u.a} \Longrightarrow r = 2,5.$$

Problema 3. *(Resolução de João Augusto Canani - Colégio Positivo Master)*

a) Como Jorge mora no 3^o andar e Ana mora em um andar acima da Beatriz, Ana mora no 2^o andar e Beatriz no 1^o andar. Como a bicicleta está a dois andares acima do carro, o carro é do 1^o andar.

b) Como no 1^o andar há um coelho e o gato fica um andar abaixo do cachorro, o cachorro mora no 3^o andar, o andar do Jorge.

c) Como Jorge tem bicicleta, conforme item a), Beatriz tem carro, analogamente ao item a), temos que Ana anda de ônibus.

Problema 4. *(Resolução de Ruan Eneias Ferreira - Colégio Estadual Prof. Meneleu de Almeida Torres)*

a) A palavra **OLIMPIADAS** possui 10 letras, onde temos: O, L, I, M, P, I, A, D, A e S. Como temos duas letras I e duas letras A, o total de anagramas é: para a primeira letra temos 10 possibilidades, para a segunda 9, e assim sucessivamente, mas se invertemos os I's ou A's de lugares, teremos as mesmas palavras, precisamos dividir por $2! \cdot 2! = 4$, logo o total de anagramas é: $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ anagramas.

b) Se os anagramas começam com L e terminam com P, sobram 8 letras para serem analisadas, onde: O, I, M, I, A, D, A, e S. Logo pelo mesmo raciocínio do exercício anterior, temos que:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4},$$

o que da um total de 10.080 anagramas começando com L e terminando com P.

c) Essas letras podem aparecer da 1ª a 6ª letra, da 2ª a 7ª letra, da 3ª a 8ª letra, da 4ª a 9ª letra e da 5ª a 10ª letra, onde as letras restantes são O, L, I e M. Como restam 4 letras, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot\ 1 = 24$ possibilidades e como as letras PIADAS podem ser realocadas de 5 formas, temos que o total de possibilidades é $24 \cdot 5 = 120$ possibilidades.

Problema 5. *(Resolução de Rodrigo Dimbarre Ingles - Colégio Alfa Plus)*

a) Sabemos que: a soma de dois números ímpares é um número par; a soma de dois ímpares e um número par, resulta em um número par; a soma de três números ímpares é um número ímpar; o número 2 é o único primo e par. Logo a única linha e coluna que terá soma par, são aquelas em que o número 2 está.

b) O 2 estará no centro, onde aparecem as somas pares. Na segunda coluna, precisa adicionar números pra somar 8, ou seja 3 e 5 (o 5 ficará em baixo, para a última linha funcionar). Somando, descobrimos que o quadradinho inferior direito vale 67, e assim vamos completando o "quadrado mágico".

71	3	29	**103**
101	2	7	**110**
97	5	67	**169**
269	**10**	**103**	

c) Usando lógica parecida com o exercício anterior, temos:

$$3 + 13 + 3 = 19 \text{ e } 7 + 3 + 13 = 23.$$

Logo,

3	13	3	**19**
7	3	13	23
13	7	**3**	**23**
23	23	**19**	

Problema 6. *(Resolução de Felipe Madalozzo Tebcherani - Colégio Positivo Master)*

a) Podem ser feitas três individuais ou uma dupla e uma individual. No primeiro caso, há uma possibilidade. No segundo a dupla pode ser feito de três maneiras diferentes: AB, AC ou BC. Assim, o número total de possibilidades é 4.

b) Podem ser feitas zero, uma ou duas duplas. O primeiro caso admite somente uma possibilidade. Com uma dupla, podem ser formadas: AB, AC, AD, BC, BD ou CD, totalizando seis possibilidades. Com duas duplas, o número de possibilidades é o mesmo, já que a outra dupla será os dois alunos que "restam". Como as duas duplas são indiscerníveis, deve-se dividir o 6 por 2!, anulando as permutações entre as duplas. Logo, teremos $1+6+3=10$ possibilidades.

c) Agora o número de duplas pode ser zero, uma, duas, três ou quatro. O primeiro caso admite uma possibilidade, o segundo admite $\frac{9\cdot 8}{1!2}=36$, o terceiro caso admite $\frac{9\cdot 8}{2!2}\cdot\frac{7\cdot 6}{2}=\frac{756}{2!}$. O quarto caso admite $\frac{9\cdot 8}{1!2}\cdot\frac{7\cdot 6}{2}\cdot\frac{5\cdot 4}{2}=\frac{7560}{3!}$. E o quinto $\frac{9\cdot 8}{4!2}\cdot\frac{7\cdot 6}{2}\cdot\frac{5\cdot 4}{2}\frac{3\cdot 2}{2}=\frac{22680}{4!}$.
A aplicação para isso é que o número de possibilidades para cada dupla é: (possibilidades para o primeiro aluno) × (possibilidades para o segundo aluno). O fator $\frac{1}{2}$ anula possíveis permutações. Logo,

$$1+36+\frac{756}{2!}+\frac{7560}{3!}+\frac{22680}{4!}=2620 \text{ é o número de possibilidades.}$$

Nível 4

Primeira Fase

Problema 1. Marcos usa os quatro primeiros números naturais primos, para escrever dois números diferentes de três algarismos. Se cada número primo pode ser utilizado, no máximo duas vezes, a menor diferença entre estes dois números obtidos é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Problema 2. O intervalo de validade da inequação $x^2 - 5x - 14 \leq 0$ é:

a) $-2 \leq x \leq 7$
b) $2 \leq x \leq -7$
c) $-2 < x < 7$
d) $x \leq -2$ ou $x \geq 7$
e) $x < -2$ ou $x > 7$

Problema 3. Igual ao **Problema 9** do Nível 3.

Problema 4. Uma urna contém 5 bolas: quatro são vermelhas e uma é verde. Laura e Miguel se revezam retirando ao acaso uma bola da urna, sem reposição. Quem tirar a bola verde, vence. Miguel fará a primeira retirada. Qual a probabilidade de Laura vencer?

a) $\dfrac{2}{5}$ b) $\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{4}{5}$ e) $\dfrac{2}{3}$

Problema 5. Qual das expressões abaixo é equivalente a $\left(x-y\right)^7 - \left(y-x\right)^7$, sendo $x, y \in \mathbb{R}$:

a) 0 b) $-70x^4y^3$ c) $2x^7 - 2y^7$ d) $2(x-y)^7$ e) $2x^7 + 2y^7$

Problema 6. Quantos algarismos tem o resultado da multiplicação $(4^{43}) \times (5^{86})$?

a) 87 b) 88 c) 89 d) 90 e) 91

Problema 7. Um palíndromo numérico é um número que lido da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda permanece o mesmo, isto é, um número que permanece o mesmo quando lemos os seus dígitos de “frente para trás” ou de “trás para frente”. Quantos palíndromos de cinco dígitos existem?

a) 729 b) 810 c) 900 d) 59.049 e) 90.000

Problema 8. Em nove semanas há $(n! \times k)$ segundos. Qual é o valor de $n \times k$?

a) 90 b) 135 c) 225 d) 315 e) 405

Problema 9. Igual ao **Problema 7** do Nível 3.

Problema 10. Quantos pares (m,n) fazem com que a expressão $(m^2 - n^2)^2$ seja um número primo?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Problema 11. Em um triângulo retângulo ΔABC com ângulo reto em A, sabe-se que $AB = 3\,cm$ e $AC = 4\,cm$. Considere D um ponto do lado $\overline{AC}$ tal que $\overline{BD}$ é a bissetriz do ângulo $\angle ABC$. A área do triângulo ΔABD é igual a:

a) $\dfrac{9}{4}\ cm^2$ b) $3\ cm^2$ c) $\dfrac{15}{4}\ cm^2$ d) $6\ cm^2$ e) $\dfrac{15-3\sqrt{2}}{2}\ cm^2$

Problema 12. Renata trocou o número de seu celular e, até o momento, esse número só é conhecido por apenas seis de seus amigos. Hoje ela recebeu 18 mensagens de seus amigos nesse número. Nessas condições, dentre as afirmações abaixo qual é verdadeira?

a) Cada amigo de Renata enviou três mensagens.
b) Cada amigo de Renata enviou ao menos uma mensagem.
c) Renata recebeu todas as oito mensagens de um único amigo.
d) É impossível que Renata tenha recebido todas as mensagens de um único amigo.
e) Renata recebeu pelo menos três mensagens de uma mesma pessoa.

Problema 13. Igual ao **Problema 10** do Nível 3.

Problema 14. Considere as operações

$$\begin{cases} a \bigotimes b = 2a^2 b^2 - a^2 - b^2 \\ a \bigoplus b = a.b^{-1} \end{cases}$$

e marque o conjunto solução da equação $(x \bigotimes x) \bigoplus 2x = 0$.

a) $S\{0;1\}$ b) $S\{0;1;2\}$ c) $S\{0;1;1\}$ d) $S\{0;1;-1\}$ e) $S\{0;1;-2\}$

Problema 15. Igual ao **Problema 12** do Nível 3.

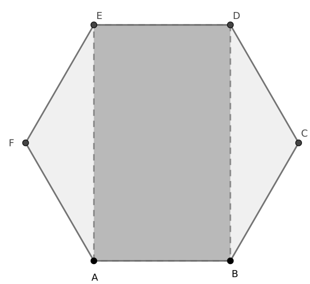
Problema 16. Em um show os bilhetes de ingresso são gerados com uma senha de quatro dígitos formada por duas vogais diferentes e duas consoantes diferentes, do nosso alfabeto atual. Qual é o número de senhas diferentes que podem ser formadas?

a) 33.600 b) 44.100 c) 50.400 d) 52.000 e) 65.000

Problema 17. O técnico do time de vôlei do Colégio A, dispõe de 12 atletas que ele pretende dividir em dois grupos para os treinamentos visando futuras competições. Existem quantos modos diferentes de o técnico dividir esses 12 atletas em dois grupos de seis?

a) 462 b) 924 c) 308 d) 154 e) 426

Problema 18. Sabendo que a figura abaixo representa um hexágono regular de lado 2 cm.



A razão entre á área do hexágono regular e do quadrilátero ABDE é:

a) $\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) $\sqrt{3}$

Problema 19. Igual ao **Problema 3** do Nível 3.

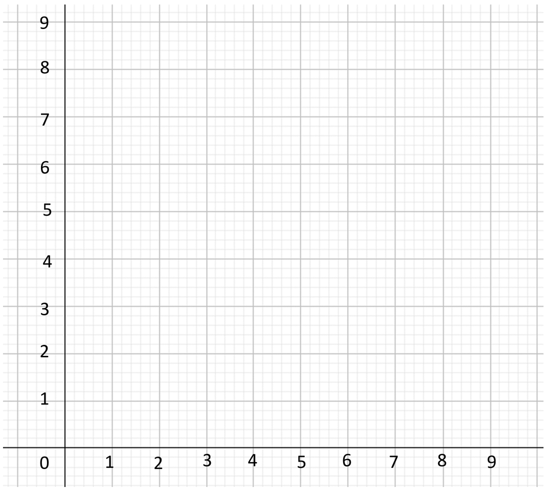
Problema 20. Igual ao **Problema 4** do Nível 3.

Gabarito da Primeira Fase

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	a	e	a	d	a	c	b	b	a
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	e	e	d	d	c	a	a	d	e

Segunda Fase

Problema 1. Após inserir os pontos de coordenadas A(0,0), B(5,0), C(2,3), D(4,3), E(7,0) e F(7,4) no plano cartesiano, responda as perguntas:



a) Qual é a área do quadrilátero ACDB?

b) Qual é a área do polígono ABEFDC?

c) Qual é a razão entre as áreas dos quadriláteros ACDB e BEFD?

Problema 2. O professor de matemática do Colégio Infinito, dá uma prova surpresa para os X alunos da sua turma A. O professor diz que a prova pode ser feita individualmente ou em duplas de alunos. Quantas são as formas que os alunos da turma A podem se organizar para fazer esta prova se:

a) $X = 3$.

b) $X = 4$.

c) $X = 9$.

Problema 3. Ana, Beatriz e Jorge, moram em um prédio de três andares, cada um deles tem um animal de estimação e usa um tipo de transporte. Sabendo que:

Ana mora um andar acima de Beatriz.
O coelho mora no 1º andar.
Quem anda de bicicleta mora dois andares acima de quem anda de carro.
Jorge mora no 3º andar.
O cachorro mora um andar acima do gato.

a) Quem anda de carro?

b) Quem tem um cachorro?

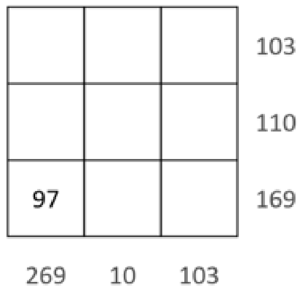
c) Quem anda de ônibus?

Problema 4. Considere um quadrado composto por 9 quadrados menores (casas). Cada casa deve ser preenchida com um número primo, sem repetição. Após o preenchimento, as linhas e colunas devem ser somadas. A figura abaixo mostra um quadrado preenchido de acordo com essas regras. A soma de cada linha aparece do lado direito e a soma de cada coluna aparece na parte de baixo.

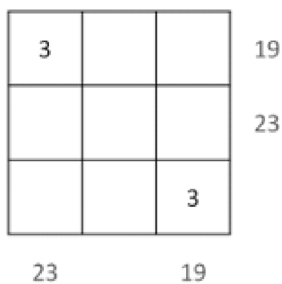
97	47	41	185
3	19	5	27
31	71	89	191
131	137	135	

a) Mostre que nas condições dadas só é possível obter duas somas pares.

b) Preencha o quadrado abaixo de forma adequada.



c) Considere um novo conjunto de regras: os números primos dentro do quadrado podem ser repetidos, contudo, todas as somas devem resultar em números primos. Nessas condições, quais números devem ser colocados na figura abaixo?



Problema 5. Dados os números naturais n e k, com $1 \leqslant k \leqslant n$, o *número binomial* $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ é definido como o número de maneiras de escolher k objetos dentre n, isto é,

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

a) Prove a *Relação de Stifel*: sejam $n \geqslant k \geqslant 1$, então

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}.$$

b) Qual o valor da expressão: $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+48\cdot49\cdot50$? (Dica: divida toda a expressão por 3!)

Problema 6. Uma pista de obstáculos foi montada observando a seguinte regra: no n-ésimo obstáculo, o participante deve lançar um dado honesto n-vezes. Se a soma dos pontos destes n lançamentos for maior do que 2^n, o participante atravessa o n-ésimo obstáculo.

a) Qual a probabilidade do participante atravessar o segundo obstáculo?

b) Qual é a probabilidade de um participante atravessar os três primeiros obstáculos?

c) No máximo, quantos obstáculos podem ser atravessados?

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. *(Resolução de Ramon Augusto Teixeira - Colégio Sagrada Família)*

a) Usando Geometria Analítica, temos $A_{ABCD} = \frac{|D|}{2}$, em que

$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0+6+0+0-(0+12+15+0)$

$D = 6-27 = -21$

$A_{ABCD} = \frac{+21}{2} = 10,5$, ou ainda, $A = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(2+5)3}{2} = \frac{3 \cdot 7}{2} = \frac{21}{2} = 10,5\, u.a$

b) Observamos que

$D = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 7 & 7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+28+21+12+0-(0+0+0+16+6+0),$

isto é, $D = 61-22 = 39\, u.a$ Daí, $A_{ABEFDC} = \frac{|D|}{2} = \frac{39}{2} = 19,5\, u.a.$ Ou ainda, $A_{ACDB} + A_{BEFD} = 19,5\, u.a$

c) Temos $A_{BEFD} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 7 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{0+28+21++0-(0+0+16+15)}{2} = \frac{18}{2} = 9\, u.a.$ Com isso, $\frac{A_{ACDB}}{A_{BEFD}} = \frac{10,5}{9} = \frac{21}{18} = \frac{7}{6}$ esta é a razão entre os quadriláteros.

Problema 2. *(Resolução de Vinícius Scremin - Colégio Marista Pio XII)*

a) Os alunos podem fazer provas os 3 sozinhos ($C_3^3 = 33 = \frac{3!}{3!0!} = 1$) ou formando uma dupla, com um aluno sozinho ($C_2^3 = 32 = \frac{3!}{2!1!} = 3$). Assim, temos, considerando “n” o número de formas que podem ser organizados os alunos:

$$n = C_3^3 + C_3^2 = 1+3 = 4.$$

Para $X = 3$ são 4 formas de organização.

b) Os alunos podem fazer as provas os 4 sozinhos ($C_4^4 = 44 = \frac{4!}{4!0!} = 1$), formando uma dupla e deixando os dois sozinhos ($C_2^4 = 42 = \frac{4!}{2!2!} = 6$) e formando duas duplas ($\frac{C_{4,2} \cdot C_{2,2}}{2!} = \frac{6 \cdot 1}{2} = 3$). Coloca-se tal 2! pois não importa a ordem das duplas.

Analogamente, $n = C_{4,2} + C_{2,2} + \frac{C_{4,2} \cdot C_{2,2}}{2!} = 1 + 6 + 3 = 10$. Para $X = 4$, são 10 formas de organização.

c) Os alunos podem fazer a prova sem duplas ($C_9^9 = 99 = \frac{9!}{9!0!} = 1$), com uma dupla ($C_2^9 = 92 = \frac{9!}{7!2!} = \frac{72}{2} = 36$), com duas duplas($\frac{C_{9,2} \cdot C_{7,2}}{2!} =$), com três duplas($\frac{C_{9,2} \cdot C_{7,2} \cdot C_{5,2}}{3!} = \frac{36 \cdot 21 \cdot 10}{6} = 6 \cdot 21 \cdot 10 = 1260$) e com quatro duplas($\frac{C_{9,2} \cdot C_{7,2} \cdot C_{5,2} \cdot C_{3,2}}{4!} = \frac{36 \cdot 21 \cdot 10 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 45 \cdot 21 = 945$). Analogamente, $n = 1 + 36 + 378 + 1260 + 945 = 2620$. Para $X = 9$, são 2620 formas de organização.

Problema 3. *(Resolução de Ramon Augusto Teixeira - Colégio Sagrada Família)*

a) Quem anda de carro é Beatriz visto que: I. sabe-se que Jorge mora no 3º e últimos andar; II. Quem anda de bicicleta mora dois andares acima do que a pessoa que anda de carro, porém este prédio possui somente 3 andares e portanto, quem está no 2º andar não tem como ter uma diferença de andar maior que um; III. Ana mora um andar acima de Beatriz, se o último já é de Jorge, o 2º é de Ana e o 1º de Beatriz. Se o ultimo (Jorge) anda de bicicleta, o 1º andar (Beatriz) anda de carro.

	ANDAR	PET	TRANSPORTE
Jorge	3º	Cachorro	Bicicleta
Ana	2º	Gato	Ônibus
Beatriz	1º	Coelho	Carro

b) Jorge tem um cachorro, pois o coelho está no 1º andar (Beatriz) e sabe-se que o cachorro mora acima do gato, sobrando o gato para o 2º andar (Ana) e o cachorro para o último (Jorge).

c) Quem anda de ônibus é Ana, pois na letra a) concluiu-se que Jorge anda de bicicleta (ultimo andar) e Beatriz de carro (1º andar), restando, assim, para Ana andar de ônibus.

Problema 4. *(Resolução de Pedro Henrique Cieslak - Colégio Alfa Plus)*

a) Entre o números primos, o 2 é o único primo par. Se for utilizado no quadrado, fará parte de duas somas: a de uma linha e uma coluna. Os outros algarismos que o acompanham são necessariamente ímpares. Assim, em cada tríade em que o 2 participa, há dois ímpares, cuja soma resulta em par, que ao somar ao 2, teremos par + par = par, apenas nas duas somas em que o 2 faz parte.

b) O 2 claramente ficará ao meio, pois é o elemento comum às somas pares. ao 2 deve-se somar primos cuja soma resulte 10: apenas 3 e 5 satisfazem a condição. Para encaixá-los e descobrir o resto, basta usar tentativa e erro:

71	3	29	**103**
101	2	7	**110**
97	5	67	**169**
269	**10**	**103**	

c) Notamos que $19 - 3 = 16 = 13 + 3 = 11 + 5$ e $23 - 3 = 20 = 13 + 7 = 17 + 3$. O quadro é então preenchido buscando-se usar apenas os números citados anteriormente, procurando certa simetria:

3	**11**	**5**	19
7	**5**	**11**	23
13	**3**	3	
23		19	

Problema 5. *(Resolução de Pedro Henrique Cieslak - Colégio Alfa Plus)*

a) Sabendo que $a! = a(a-1)!$ e para $0 \in \mathbb{N}$. Ao desenvolver a soma tem-se o seguinte:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k\text{-}1}$$
$$=\frac{n!}{(n-k)!k!}+\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}=\frac{n!}{(n-k)!k(k-1)!}+\frac{n!}{(n-k)!(n-k-1)(k-1)!}.$$

Coloca-se então em evidência:

$$\frac{n!}{(n-k)!k(k-1)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right)=\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\left[\frac{(n-k+1+k)}{k(n-k+1)}\right]$$
$$=\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\left[\frac{n+1}{k(n-k+1)}\right]=\frac{(n+1)(n!)}{k(k-1)!(n-k+1)(n-k)}$$
$$=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k![(n+1)-k]}=\binom{n+1}{k},$$ provando assim a identidade de Stifel.

b) A soma pode ser reescrita como: $\frac{3!}{0!}+\frac{4!}{1!}+\frac{5!}{2!}+\ldots+\frac{50!}{47!}$, ou seja, chama-se a soma de S:

S: $\sum_{a=0}^{47}\frac{(a+3)}{a!}$. Dividindo a expressão por 3!: $\frac{S}{6}=\sum_{a=0}^{47}\frac{(a+3)}{3!a!}$.

Como a expressão binomial é $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$, por comparação conclui-se que:

$\frac{S}{6}=\sum_{a=0}^{47}\binom{a+3}{3}=\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\cdots+\binom{50}{3}$. Essa soma é característica da soma dos elementos de uma coluna finita qualquer do triângulo de Pascal, com a identidade :

$\sum_{a=p}^{n}\binom{a}{p}=\binom{n+1}{k+1}$. Portanto conclui-se que:

S $=6\left[\sum_{a=0}^{47}\binom{a+3}{3}\right]=6\binom{51}{4}$. Portanto $S=6\binom{51}{4}$.

Problema 6. *(Resolução da pauta)*

a) No segundo obstáculo, o participante vai lançar o dado duas vezes. Nesta situação, o espaço amostral é formado por 36 elementos que podem ser descritos via pares ordenados:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

Nos interessa aqueles cuja soma das coordenadas é superior a $2^2 = 4$. Notamos que os pares cuja soma é inferior ou igual a 4 são:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}.$$

Logo, a probabilidade do participante atravessar o segundo obstáculo é

$$P(2^o\,\text{obstáculo}) = \frac{36-6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

b) A probabilidade o participante passar os três primeiros obstáculo é dada por

$$P(1^o\,\text{obstáculo}) \times P(2^o\,\text{obstáculo}) \times P(3^o\,\text{obstáculo}).$$

Notamos que

$$P(1^o\,\text{obstáculo}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

já que para um lançamento, o número da face ser maior que $2^1 = 2$ ocorre com as seguintes possibilidades: 3, 4, 5 e 6. O valor de $P(2^o\,\text{obstáculo})$ foi calculado no item anterior. Para o cálculo de $P(3^o\,\text{obstáculo})$, como o dado será lançado três vezes, o espaço amostral será constituído de $6^3 = 216$ elementos, podendo ser escritos como triplas ordenadas. Nos interessa aquelas cujas soma de suas coordenadas é superior a $2^3 = 8$. Pensando em termos do complementar, dado (x,y,z) no espaço amostral com $1 \leqslant x,y,z \leqslant 6$, determinaremos o número de triplas (com coordenadas positivas) que satisfazem: $x+y+z=b$, em que $b = 3,4,5,6,7,8$. Essa quantidade é dada por

$$C^2_{3-1} + C^2_{4-1} + C^2_{5-1} + C^2_{6-1} + C^2_{7-1} + C^2_{8-1} = 1+3+6+10+15+21 = 56.$$

Daí, a probabilidade de passar o terceiro obstáculo será dada por

$$P(3^o\,\text{obstáculo}) = 1 - \frac{56}{216} = \frac{20}{27}.$$

Portanto, a probabilidade de um participante passar os três primeiros obstáculos é de

$$P(1^o\,\text{obstáculo}) \times P(2^o\,\text{obstáculo}) \times P(3^o\,\text{obstáculo}) = \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{20}{27} = \frac{100}{243}.$$

Observação: Neste item também é possível listar todos os eventos favoráveis para o cálculo da $P(3^o\,\text{obstáculo})$.

c) Como a maior pontuação possível para a face de um dado honesto é 6, teremos em 4 lançamentos: $6 \times 4 > 2^4$, enquanto que para 5: $6 \times 5 < 2^5$. Isso significa que é impossível que a soma dos pontos que aparecem nos n lançamentos seja maior que 2^n para $n \geqslant 5$.

Portanto, podem ser atravessados no máximo 4 obstáculos.

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Artigos

O jovem nigeriano Chika Ofili e seu critério de divisibilidade por 7

Elton Mateus Neves [1]

Gustavo Borges Machado [2]

Gustavo Neves [3]

Luiz Henrique Bahls [4]

Marcos Teixeira Alves [5]

Scheila Valechenski Biehl [6]

Resumo: A operação de divisão é uma das quatro operações básicas da Matemática e é a base para a resolução de muitos problemas em nosso cotidiano. Por vezes, a fim de facilitar e agilizar algum cálculo, existem algumas regras que podemos usar para "simplificar caminhos" na resolução de algum problema. Essas regras são chamadas "critérios de divisibilidade" e são usados basicamente para verificar se um número é divisível por outro, considerando que o resto da divisão seja sempre igual a zero. Em competições de olimpíadas de matemática, por exemplo, é bastante útil conhecermos os critérios ou testes a respeito da divisibilidade por números como 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, pois agiliza o cálculo frente a problemas envolvendo números com uma quantidade expressiva de algarismos. Motivados por essa temática, apresentamos nesse artigo uma contribuição para a divisibilidade por 7 descoberta pelo jovem nigeriano Chika Ofili aos 12 anos de idade.

Palavras-chave: Operações matemáticas. Divisibilidade. Problemas aritméticos.

[1] Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática da UEPG, eltonmateusnv15@gmail.com
[2] Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática da UEPG, gustavo.bmachado@outlook.com
[3] Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática da UEPG, gustavonev47@gmail.com
[4] Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática da UEPG, luizhenriquebahls03@gmail.com
[5] Professor do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG, mtalves@uepg.br
[6] Professora do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG, svbiehl@uepg.br

Introdução

Os critérios de divisibilidade muitas vezes são vistos por alunos e até mesmo por alguns professores apenas como simples “macetes” para evitar o uso de muitos cálculos e encurtar caminhos no processo de aplicar o algoritmo da divisão. Entretanto, esse tema transmite na sua essência uma aritmética muito mais rica e profunda, com grande potencial de despertar o interesse e a curiosidade e possibilitar desenvolver algum fato curioso a respeito do assunto, assim como fez Chika Ofili. Shimokawa (2020), baseado na ideia de Chika, apresenta um critério de divisibilidade que pode ser uma alternativa no ensino de divisibilidade por 7 na sala de aula.

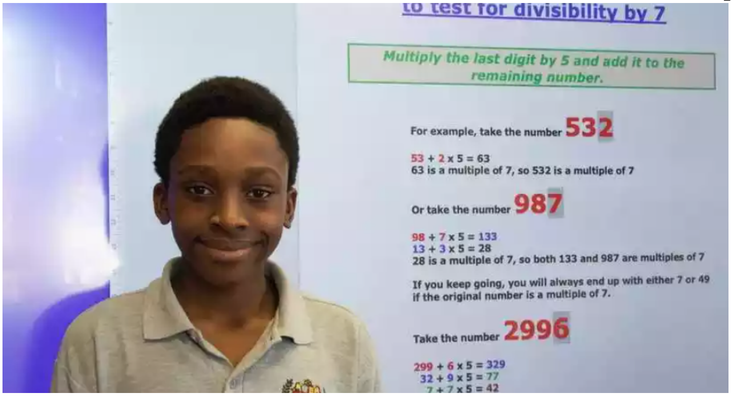
Podemos dizer que a divisibilidade é a possibilidade de dividir um número por outro. Por exemplo, 15 é *divisível* por 3, pois sabemos que a divisão de 15 por 3 tem resto zero, o que pode ser escrito como $15 = 5 \times 3$. No entanto, existem regras que permitem verificar se um número é divisível por outro sem propriamente efetuar a operação de divisão. A tais regras damos o nome de *critérios de divisibilidade*, os quais podem ser vistos em muitos trabalhos escolares e da literatura, como por exemplo no portal “Clubes de Matemática da OBMEP” (2023) e mais formalmente no livro de Aritmética de Hefez (2012).

Em geral, os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10 são conhecidos e utilizados no ambiente escolar. Porém, não são apresentados critérios relativamente simples para a divisibilidade por 7, e por este motivo geralmente não é discutido em sala de aula, inclusive a própria BNCC (2018) não destaca este critério como uma habilidade. Nesse contexto, o presente artigo tem como objetivo apresentar o critério de divisibilidade por 7 desenvolvido por nigeriano Chika Ofili, em 2019, aos 12 anos de idade, sua biografia e aplicações do seu método.

Quem é Chika Ofili?

Chika Ofili é um jovem estudante nigeriano, radicado no Reino Unido, que, em 2019, com 12 anos de idade, descobriu uma fórmula para testar rapidamente se um número inteiro é divisível por 7.

Figura 1 - Chika Ofili e ao fundo detalhes de seu teste de divisibilidade por 7.



Fonte: Disponível em: `https://matheusmathica.blogspot.com/2020/07/o-nigeriano-chika-ofili-criacao-de-uma.html` Acesso em: 01 dez. 2023.

Sua professora Miss Mary Ellis, chefe do Departamento de Matemática da Westminster Under School, escola de Londres, passou o livro “First steps for problem solvers", o qual em tradução livre significa “Primeiros passos para resolvedores de problemas", para Chika estudar durante as férias.

No livro eram apresentados diversos critérios de divisibilidade usados para testar rapidamente se um número é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9. Mas Chika observou que para o 7 não havia um critério e foi então que desenvolveu sua ideia, apresentando o teste para sua turma. Como ninguém conseguiu encontrar um contra-exemplo (um exemplo que falhasse), o matemático Simom Ellis, irmão da professora, apresentou uma prova algébrica mostrando que o critério de Chika era válido, isto é, sempre funcionava.

Essa descoberta conferiu a Chika Ofili um prêmio chamado *TruLittle Hero Awards*, durante uma cerimônia organizada pela Cause4Children Limited, no Reino Unido, cujo objetivo é reconhecer, comemorar e recompensar realizações notáveis de crianças e jovens com menos de 17 anos.

Vemos portanto, que a ideia básica para desenvolver novos critérios de divisibilidade está na capacidade de identificar primeiramente as estruturas básicas da aritmética que já são usadas nos critérios mais usuais e implementar uma regra de alguma forma lógica e sistemática na criação de critérios de divisibilidade incomuns. Provavelmente Chika seguiu este raciocínio, e isso naturalmente pode ser aplicado em qualquer conteúdo da matemática, quando se é motivado a pensar em algo diferente do tradicional, com um novo olhar para o que aquilo representa, o que pode levar a descobertas surpreendentes.

Contribuição de Ofili para a divisibilidade por 7

A compreensão do método proposto por Chika Ofili é simples. Suponha que você queira verificar se um dado número é divisível por 7. Para isso, basta pegar o último dígito deste número, multiplicar por 5 e adicionar o resultado à parte restante, obtendo um novo número. Se esse novo número é divisível por 7, o número original também é divisível por 7. Se ainda é um número grande em que não se consiga identificar rapidamente que é divisível por 7, basta repetir o processo.

Como exemplo, para verificar se o número 532 é divisível por 7, pelo critério de Chika fazemos: $53+(2\cdot 5)=63$. Sendo 63 múltiplo de 7, é possível afirmar que 532 é divisível por 7.

Vejamos mais um exemplo: 12193 é divisível por 7? Acompanhe os passos a seguir:

$$12193 \longrightarrow 1219+3\cdot 5=1234.$$

Veja que com o resultado da aplicação deste primeiro passo, o número 1234, não é possível garantir rapidamente que seja divisível por 7. Neste caso, aplicamos o método mais uma vez, agora ao número 1234:

$$1234 \longrightarrow 123+4\cdot 5=143 \text{ e finalmente: } 143 \longrightarrow 14+3\cdot 5=29.$$

Observamos que o número 29 não é divisível por 7 (na divisão de 29 por 7 há resto diferente de zero). Isso mostra que o número 12193 não é divisível por 7.

A pergunta agora é: porque o método funciona? Para respondê-la, vamos considerar neste texto números inteiros positivos. Dizer que um inteiro n é *divisível* pelo inteiro a significa encontrar um inteiro x tal que $n=a\cdot x$. Isto é equivalente a afirmar que o resto da divisão de n por a é zero. Para ilustrar, vimos anteriormente que 532 é divisível por 7. Isso acontece porque é possível escrever $532=7\cdot 76$ (aqui 532 faz o papel de n, $a=7$ e $x=76$).

Para demonstrar que o critério funciona, usaremos um número inteiro n 3 dígitos $n=abc$, sendo n o número que pretendemos descobrir se é divisível por 7 e a, b e c seus algarismos. Considere m o número obtido utilizando o critério.

Perceba que n e m podem ser reescritos como $n=100\cdot a+10\cdot b+c$ e $m=10\cdot a+b+5\cdot c$. Multiplicando 10 por m, temos $10\cdot m=100\cdot a+10\cdot b+50\cdot c$, ou também,

$10 \cdot m = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c + 49 \cdot c$. Perceba que podemos reescrever $10 \cdot m$ como $10 \cdot m = n + 49 \cdot c$. Subtraindo ambos os membros por $49 \cdot c$, temos $n = 10 \cdot m - 49 \cdot c$.

Suponhamos que saibamos que m é divisível por 7. Assim, m pode ser reescrito como $m = 7 \cdot q$, e então $n = 10 \cdot 7 \cdot q - 49 \cdot c$. Colocando 7 em evidência, temos $n = 7 \cdot (10 \cdot q - 7 \cdot c)$, ou seja, n é divisível por 7. Em outras palavras, se o número obtido pelo teste for divisível por 7, isto significa que o número original também é. De maneira similar, é possível provar que o teste se verifica para números com mais dígitos.

Considerações Finais

Neste artigo apresentamos a surpreendente história do jovem Chika Ofili, que estimulado por sua professora em um trabalho escolar, observou a falta de um critério de divisibilidade por 7. Esta curiosidade lhe rendeu o desenvolvimento de um teste de fácil manuseio e aplicação, que pode ser utilizado, incluindo sua demonstração, na resolução de problemas aritméticos.

Para além disso, esta brilhante história mostra que é possível estabelecer resultados em Matemática, mesmo durante o Ensino Fundamental e Médio. Mais um exemplo é o *Método da Regressão da Júlia* apresentado na seção: **Curiosidades**. Em ambas histórias, conclui-se que incentivo ao estudo da disciplina e a curiosidade são ingredientes fundamentais para a descoberta em Matemática.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

HEFEZ, A. **Aritmética**. SBM: Coleção do PROFMAT. Rio de Janeiro, 2012.

OBMEP. **Clubes de Matemática da OBMEP**: Disseminando o estudo da matemática. Disponível em: `http://clubes.obmep.org.br/blog/?s=divisibilidade`. Acesso em: 28 nov. 2023.

SHIMOKAWA, E. Y. **Teste de Chika: Um critério geral de divisibilidade**. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, UFMG, 2020.

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Curiosidades

Paradoxo do Hotel Infinito

O paradoxo do Hotel Infinito é um jogo mental criado por David Hilbert na década de 1920 para conseguirmos entender um pouco mais sobre o conceito de infinito. Suponha que exista um hotel com infinitos quartos com uma política de não perder nenhum cliente e, um dia qualquer, todos os quartos tenham hóspedes. No final do dia, um cliente aparece para fazer *check-in* e, antes que o recepcionista possa dizer que não há quartos, o gerente tem uma ideia. Ele pede para que o cliente do 1º quarto se mova para o 2º, o cliente do 2º se mova para o 3º e assim por diante, fazendo com que cada hóspede se mova pra o próximo quarto e, diferente de um hotel convencional, o último hóspede não ficará sem quarto, pois, sendo infinito, sempre haverá um quarto sucessor. Porém, o mais importante, é que agora o 1º quarto estará vazio para a pessoa que acabou de chegar.

Ao passar dos dias, nenhum quarto ficou vazio e mais e mais ônibus de hóspedes vinham para se hospedar nesse hotel. Entretanto, sendo o número de novos hóspedes sempre finito, era fácil abrir espaço para novos clientes. Por exemplo, se 40 clientes chegassem, era necessário mover cada hóspede 40 quartos para frente e deixar os primeiros 40 quartos vazios, assim como no 1º exemplo com apenas 1 cliente novo.

Todavia, um dia, chegou um ônibus com um número infinito de pessoas, fazendo com que o método anterior não pudesse ser utilizado, mas o gerente pensou logo numa solução. Ele pediu para que os hóspedes fossem para o quarto com o dobro do valor do seu quarto, ou seja, o 1º iria para o 2º, o 2º iria para o 4º e assim por diante. Os quartos restantes, que seriam todos os quartos ímpares, seriam usados para acomodar os novos hóspedes e, não só isso, mas o hotel ficaria cheio novamente, o que o gerente já previa.

O gerente sabia que isso funcionaria porque as relações de $\mathbb{N}^*$, que representa o número de hóspedes que estavam no hotel e o número de novos hóspedes que estavam no ônibus, para os conjuntos dos números pares e ímpares, que representam os quartos para onde os hóspedes antigos e novos foram, respectivamente, é bijetora. Ser uma relação significa que, tendo dois conjuntos, todos os elementos do primeiro são associados a um único elemento do segundo, porém o segundo pode ter elementos que não tem correspondência nenhuma e mais de um elemento do primeiro pode se ligar a um mesmo elemento do segundo; e ser bijetora significa que todos os elementos do segundo tem uma correspondência com o primeiro e nenhum elemento do primeiro repete uma ligação que outro elemento tenha. Para provar que as duas relações são bijetoras, basta saber que todo número tem um dobro e nenhum outro número tem o mesmo dobro (ou seja, a relação dos hóspedes antigos para seus quartos novos) e todo dobro tem um antecessor e ele é único, logo todo número tem um antecessor do seu dobro e ele é único (ou seja, a relação dos hóspedes novos para os seus quartos).

Para saber mais sobre o Paradoxo do Hotel Infinito, visite:

https://youtu.be/Uj3_KqkI9Zo?si=SJcrinx_p6tNI1Vb

O Método da Regressão da Júlia

A aluna Júlia Helena Pimenta Ferreira (à época com 11 anos, no 6º ano) teve uma ideia em sala de aula: viu que para encontrar uma raiz quadrada podemos partir de outra raiz quadrada próxima conhecida. Por exemplo, para encontrar a raiz quadrada de 144 podemos partir da raiz de 100: $10 \times 10 = 10^2$. Em seguida, somamos 10 e o seu sucessor ao 100: $100+10+11 = 121$. Aqui já temos que $\sqrt{121} = 11$. Repetimos o processo com o sucessor de 11: $121+11+12 = 144$. Pronto, temos o resultado que procurávamos: $\sqrt{144} = 12$.

Partindo do raciocínio de Júlia o professor de matemática Frederico Ferreira de Pinho Tavares do Colégio Espanhol Santa Maria Minas – Unidade Cidade Nova, resolveu estudar o raciocínio e após um ano de estudo, ele chegou à fórmula final, aplicável a quaisquer números, que foi apresentada na Revista do Professor de Matemática.

Para saber mais sobre a Regressão de Júlia, visite:

https://www.megacurioso.com.br/ciencia/127982-regressao-de-julia-genia-brasileira-de-11-anos-cria-novo-calculo-para-raiz-quadrada.htm

O Papa Matemático

Você sabia que já existiu um Papa matemático? Gerbert dAurillac, geômetra famoso, foi arcebispo de Ravena e subiu à Cátedra de São Pedro no ano 999. Considerado um dos mais sábios do seu tempo, chamou-se Papa Silvestre II. Foi o primeiro a vulgarizar no Ocidente latino o emprego dos algarismos arábicos. Além da matemática, dedicou-se ao estudo da Astronomia e Física. Faleceu no ano de 1003.

Para saber mais sobre esta e outras curiosidades, visite:

`https://www.somatematica.com.br/curiosidades.php`

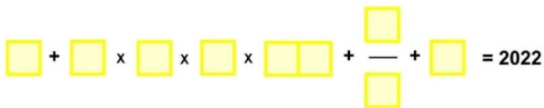
OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

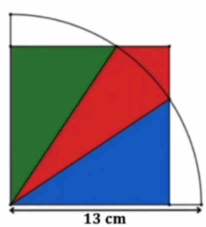
Problemas Propostos

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos. As melhores soluções serão publicadas no próximo volume com a devida menção do(s) autor(es).

1. Usando os algarismos de 1 a 9, cada dígito sendo usado apenas uma vez, obtenha a igualdade a seguir:



2. As figuras em verde, vermelho e azul têm a mesma área:



Determine a área do quadrado constituído por estas três figuras.

3. Sejam p um número primo e k um número inteiro tal que $x^2 + kx + p = 0$ tem duas raízes distintas inteiras. Qual o valor de $k + p$?

4. Determine todos os pares (x, y) de números inteiros tais que

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2.$$

5. Considere a, b e c números reais não nulos e distintos tais que

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$

Prove que $|abc| = 1$.

OPMat

Olimpíada Pontagrossense de Matemática UEPG

Informações Gerais

Envio de Artigos e Soluções

Os **Artigos** podem ser submetidos nas próximas edições da Revista da OPMat. Os documentos devem ser, preferencialmente, redigidos em Latex. As **Soluções** para os desafios encontrados na seção "Problemas Propostos" devem ser claras e submetidas juntamente com o nome do participante e o número da respectiva questão.

As submissões de artigos e soluções podem ser feitas pelo e-mail:

revistaopmat@gmail.com

Como Adquirir a Revista

A versão eletrônica está disponível no link:

`https://www2.uepg.br/opmat/revista-da-opmat/`

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, apresentar sugestões ou fazer correções através dos contatos:

Comitê Editorial
revistaopmat@gmail.com

Olímpiada Pontagrossense de Matemática
opmat@uepg.br - (42) 3220-3048
www2.uepg.br/opmat/
facebook.com/opmat.uepg
Instagram: @opmat_uepg

Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Estadual de Ponta Grossa
Campus Uvaranas - Bloco L - Uvaranas
Avenida General Carlos Cavalcanti, 4748
Ponta Grossa - Paraná - CEP 84030-000
demat@uepg.br - (42) 3220-3050
www2.uepg.br/demat/

REALIZAÇÃO:

UEPG Universidade Estadual de Ponta Grossa

proex PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO E ASSUNTOS CULTURAIS

DEMAT Departamento de Matemática e Estatística

APOIO:

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Associação Olimpíada Brasileira de Matemática

UniCesumar EDUCAÇÃO PRESENCIAL E A DISTÂNCIA

Informações:

www2.uepg.br/opmat E-mail: opmat@uepg.br

www.facebook.com/olimpiada.pontagrossensedematematica

Fones: 99831-1222 / 3220-3048