

Você está participando da
11ª Olimpíada Pontagrossense de Matemática!
Primeira Fase - Nível 3

Instruções

A duração da prova é de 3 horas. E o tempo mínimo de prova é de 30 minutos. O caderno de questões pode ser feito à lápis ou à caneta, você poderá levá-lo para a casa.

É permitido o uso de borracha, régua, esquadros e compasso para resolver as questões da prova.

Durante a prova não será permitido: comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas; bem como usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, etc.). Não é permitido entrar na sala de aplicação de provas com folhas de rascunho, anotações ou livros.

Você receberá um cartão de respostas. Ele é personalizado. Verifique se o cartão de respostas que você recebeu tem seu nome, em caso afirmativo assine-o ou então comunique ao fiscal de sala que o cartão que você recebeu não é o seu.

O cartão de respostas que você recebeu tem 60 questões, mas sua prova tem apenas 20 questões, assim você deve marcar as respostas de sua prova nas questões do seu cartão de respostas numeradas de 1 a 20.

Cada questão tem cinco alternativas de resposta: (a), (b), (c), (d), (e), e apenas uma delas é correta.

Marque suas respostas com caneta esferográfica com tinta azul escura ou preta, escrita grossa e de corpo transparente. Como no exemplo abaixo:

Questão 60: Enunciado?

- (a) Correta
- (b) Incorreta
- (c) Incorreta
- (d) Incorreta
- (e) Incorreta

60
☒
☐ B
☐ C
☐ D
☐ E

Observe que a alternativa correta da Questão 60 é (a), e no gabarito, na Questão 60 o quadradinho (a) foi preenchido. Lembre-se de pintar todo o quadradinho, como na figura.

Marque apenas uma alternativa para cada questão. Marcando mais de uma alternativa perderá os pontos da questão, mesmo que uma das alternativas seja a correta.

Ao final da prova, entregue o cartão de respostas para o fiscal de sala.

Boa Prova! Que a Matemática esteja com você!

Realização:

Apoio:

Questão 1

Rascunho

Um grupo de amigos está numa pizzeria e precisa decidir os sabores das pizzas que irão pedir. Eles discutem e chegam às seguintes conclusões:

- I- Se pedirem de calabresa, então não pedirão de mussarela.
- II- Se pedirem de mussarela, então também pedirão de frango.
- III- Se pedirem de frango, então não pedirão portuguesa.
- IV- Eles decidiram pedir pizza portuguesa.

Com base nas informações acima, é possível afirmar que eles não irão pedir?

- (a) Apenas calabresa
- (b) Apenas mussarela
- (c) Apenas frango
- (d) Frango e mussarela
- (e) Frango, mussarela e portuguesa

Questão 2

Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, a operação *ponto médio de a e b* , denotada por $a \otimes b$, é definida por $a \otimes b = \frac{a+b}{2}$. Então o valor de

$$\frac{1}{3} \otimes \left(\frac{1}{5} \otimes \frac{1}{7} \right)$$

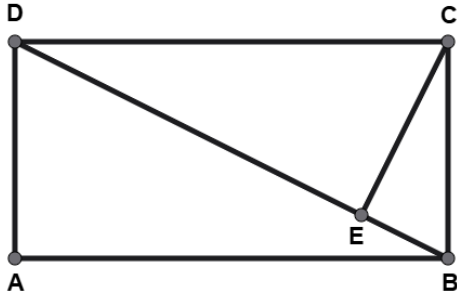
é:

- (a) $\frac{53}{105}$
- (b) $\frac{71}{105}$
- (c) $\frac{53}{210}$
- (d) $\frac{71}{210}$
- (e) $\frac{13}{210}$

Questão 3

Rascunho

Na figura abaixo tem-se um retângulo $ABCD$, cuja medida do lado AB é o dobro da medida do lado BC . Além disso, sabe-se que o segmento CE é perpendicular a diagonal BD em E . A razão entre as medidas de DE e BE é:



- (a) $\frac{1}{4}$
- (b) $\frac{2}{1}$
- (c) $\frac{1}{2}$
- (d) $\frac{4}{3}$
- (e) $\frac{4}{1}$

Questão 4

Um cartório enviou seis correspondências diferentes, sendo uma para cada cliente. Cada correspondência foi colocada em um envelope, e os envelopes foram etiquetados com os seis diferentes endereços desses clientes. A probabilidade de apenas uma etiqueta estar trocada é:

- (a) $\frac{1}{3}$
- (b) $\frac{2}{3}$
- (c) 0
- (d) $\frac{1}{6}$
- (e) $\frac{5}{6}$

Questão 5

Rascunho

Se x é um número real tal que $\sec(x) - \tan(x) = 3$, então o valor da $\sec(x) + \tan(x)$ é igual a:

- (a) $\frac{1}{3}$
- (b) $\frac{3}{2}$
- (c) $\frac{1}{2}$
- (d) 3
- (e) 1

Questão 6

Se M é o maior número inteiro menor do que 2512 que:

- I- pode ser expresso como a soma de dois números inteiros consecutivos, e
- II- pode ser expresso como a soma de três números inteiros consecutivos, e
- III- pode ser expresso como a soma de cinco números inteiros consecutivos

A soma dos algarismos de M é:

- (a) 12
- (b) 15
- (c) 9
- (d) 18
- (e) 21

Questão 7

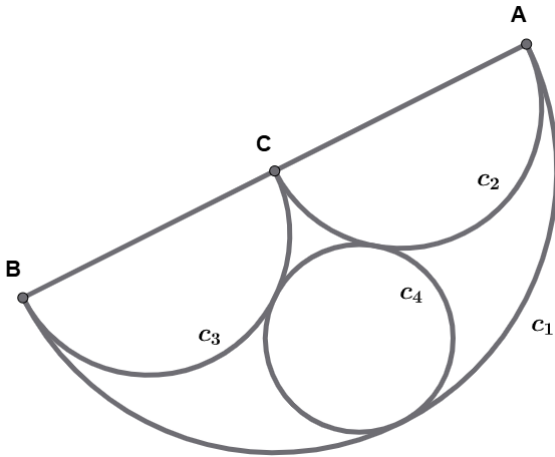
De quantas maneiras podemos dividir 7 moças e 5 rapazes em dois times de 6 jogadores para uma partida de vôlei, de modo que exatamente três rapazes fiquem em um mesmo time?

- (a) 175
- (b) 210
- (c) 280
- (d) 315
- (e) 350

Questão 8

Rascunho

No desenho abaixo, $AB = 2a$, C é o ponto médio de AB , c_2 , c_3 e c_1 são semicírculos com diâmetros AC , BC e AB , respectivamente. O círculo c_4 é tangente a c_2 , c_3 e c_1 . A área interna a c_1 e externa a c_2 , c_3 e c_4 em função de a é:



- (a) $\frac{\pi a^2}{36}$.
- (b) $\frac{5\pi a}{36}$.
- (c) $\frac{5\pi a^2}{36}$.
- (d) $\frac{5\pi a^2}{6}$.
- (e) $\frac{5\pi a}{16}$.

Questão 9

Se a é um número real positivo que satisfaz a igualdade $\sqrt{a + \frac{1}{a}} = 3$, então valor da expressão $a^3 + \frac{1}{a^3}$ é:

- (a) 648
- (b) 681
- (c) 693
- (d) 702
- (e) 729

Questão 10

Tem-se 33 bolas, sendo elas coloridas da seguinte forma: 8 brancas, 13 azuis e 12 vermelhas. Essas bolas serão divididas, e colocadas ao acaso, em 11 caixas, sendo que cada caixa deve conter 3 bolas.

Sobre essa situação, é correto apenas o que se afirma em:

- (a) Podemos ter 9 caixas com 3 bolas de cores diferentes em seu interior.
- (b) Todas as caixas devem possuir uma bola vermelha.
- (c) Se 10 caixas possuírem 3 bolas da mesma cor em seu interior, 1 caixa deve conter 2 bolas brancas e 1 azul.
- (d) Em todas as caixas deve haver uma bola azul ou uma vermelha.
- (e) Todas as alternativas acima estão incorretas.

Questão 11

Considere o conjunto dos números naturais positivos menores que 100, que deixam o mesmo resto quando são divididos por 3 e por 4. Quantos desses números são múltiplos de 5?

- (a) 3
- (b) 4
- (c) 5
- (d) 6
- (e) 7

Questão 12

Um inteiro positivo n tem a propriedade de quando multiplicado por 12, resultar em um número de quatro algarismos $y = 20a2$, para algum algarismo a .

A soma dos quatro algarismos de y é:

- (a) 9
- (b) 6
- (c) 12
- (d) 13
- (e) 11

Rascunho

Questão 13

Seja ABC um triângulo isósceles de base AC , no qual o ponto D pertence ao lado BC e o ponto E pertence ao lado AC , de modo que o segmento DE é paralelo ao lado AB . Além disso, sabe-se que $\overline{CD} = 4$ cm, $\overline{DB} = 6$ cm e $\overline{AE} = 3$ cm. O perímetro do triângulo CDE vale:

- (a) 12 cm
- (b) 11 cm
- (c) 10 cm
- (d) 9 cm
- (e) 10,5 cm

Questão 14

Cinco irmãos foram ao cinema e um deles entrou sem pagar. Apanhados por um funcionário do cinema, que queria saber qual deles entrou sem pagar, eles informaram:

"Não fui eu, nem o Manuel", disse Marcos.
"Foi o Manuel ou o Marlon", disse Mário.
"Foi o Michael", disse Manuel.
"O Mário está mentindo", disse Michael.
"Foi o Michael ou o Marcos", disse Marlon.

Sabendo-se que um e somente um dos cinco irmãos mentiu, conclui-se logicamente que quem entrou sem pagar foi:

- (a) Mário.
- (b) Marcos.
- (c) Michael.
- (d) Manuel.
- (e) Marlon.

Questão 15

Quantos números de quatro algarismos menores do que 5432 e formados pelos algarismos 2, 3, 4 e 5 existem?

- (a) 192
- (b) 228
- (c) 224
- (d) 225
- (e) 128

Rascunho

Questão 16

Maria criou uma nova operação, representada por $\boxtimes$, e definida da seguinte forma:

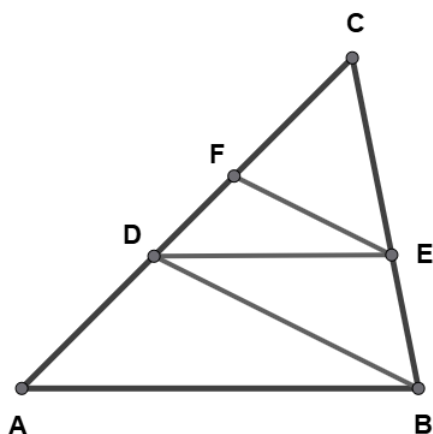
$$(x) \boxtimes (y) = 2x - \sqrt{y^2}$$

Ao realizar a operação $(2025) \boxtimes (-2026)$, Maria obteve como resultado:

- (a) -6076
- (b) 6076
- (c) 6075
- (d) 2025
- (e) 2024

Questão 17

Sabendo que no triângulo ABC representado abaixo $EF \parallel BD$, $DE \parallel AB$, $\overline{FD} = 4$ cm, $\overline{CF} = 6$ cm, então $\overline{AD}$ mede:



- (a) $\frac{20}{3}$ cm
- (b) 15 cm
- (c) $\frac{8}{3}$ cm
- (d) 20 cm
- (e) 8 cm

Rascunho

Questão 18

Qual é o número inteiro entre 400 e 1000, que é divisível por 7 e 13 e cuja soma de seus algarismos é um número primo?

- (a) 827
- (b) 455
- (c) 546
- (d) 637
- (e) 728

Questão 19

Supondo que Márcio tenha um total de 30 moedas, sendo que algumas são de cinco centavos, outras de dez centavos e outras ainda de vinte e cinco centavos. Márcio no total tem R\$ 4,15 em dinheiro.

Um dia Márcio encontra uma varinha mágica que tem a capacidade de transformar moedas de cinco centavos em dez centavos e de dez centavos em vinte e cinco centavos.

Depois que Márcio acenou com a varinha sobre o dinheiro, ele descobre que tem R\$ 6,00. Quantas moedas de dez centavos Márcio tinha inicialmente?

- (a) 12
- (b) 11
- (c) 10
- (d) 9
- (e) 8

Questão 20

Considerando que o número $a679b$ formado por cinco algarismos (na base 10) é divisível por 72, então os valores de a e b são:

- (a) $a = 3$ e $b = 2$
- (b) $a = 2$ e $b = 3$
- (c) $a = 5$ e $b = 6$
- (d) $a = 6$ e $b = 5$
- (e) $a = 6$ e $b = 2$

Rascunho