3° e 4° anos, Ensino Médio

07 de junho de 2025

4 NÍVEL

Você está participando da
11ª Olimpíada Pontagrossense de Matemática!
Primeira Fase - Nível 4

Instruções

A duração da prova é de 3 horas. E o tempo mínimo de prova é de 30 minutos. O caderno de questões pode ser feito à lápis ou à caneta, você poderá levá-lo para a casa.

É permitido o uso de borracha, régua, esquadros e compasso para resolver as questões da prova.

Durante a prova não será permitido: comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas; bem como usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, etc.). Não é permitido entrar na sala de aplicação de provas com folhas de rascunho, anotações ou livros.

Você receberá um cartão de respostas. Ele é personalizado. Verifique se o cartão de respostas que você recebeu tem seu nome, em caso afirmativo assine-o ou então comunique ao fiscal de sala que o cartão que você recebeu não é o seu.

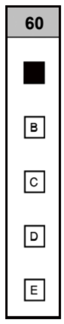
O cartão de respostas que você recebeu tem 60 questões, mas sua prova tem apenas 20 questões, assim você deve marcar as respostas de sua prova nas questões do seu cartão de respostas numeradas de 1 a 20.

Cada questão tem cinco alternativas de resposta: (a), (b), (c), (d), (e), e apenas uma delas é correta.

Marque suas respostas com caneta esferográfica com tinta azul escura ou preta, escrita grossa e de corpo transparente. Como no exemplo abaixo:

Questão 60: Enunciado?

(a) Correta
(b) Incorreta
(c) Incorreta
(d) Incorreta
(e) Incorreta



Observe que a alternativa correta da Questão 60 é (a), e no gabarito, na Questão 60 o quadradinho (a) foi preenchido. Lembre-se de pintar todo o quadradinho, como na figura.

Marque apenas uma alternativa para cada questão. Marcando mais de uma alternativa perderá os pontos da questão, mesmo que uma das alternativas seja a correta.

Ao final da prova, entregue o cartão de respostas para o fiscal de sala.

Boa Prova! Que a Matemática esteja com você!

Realização:

Apoio:

Questão 1

Maria vai participar de um jogo que consiste em lançar dois dados cúbicos, não viciados, cujas faces estão numeradas de 1 a 6, cada uma com a mesma probabilidade de ocorrer.
Antes de jogar, Maria escolhe um número qualquer de 1 a 6. Então Maria joga os dados e se um ou dois dos dados pararem com o número escolhido por ela na face voltada para cima, então Maria ganha, respectivamente, um ou dois prêmios.
Se Maria escolheu o número 5, a probabilidade de que ela ganhe apenas um prêmio é:

(a) $\frac{1}{12}$

(b) $\frac{5}{3}$

(c) $\frac{25}{26}$

(d) $\frac{2}{6}$

(e) $\frac{5}{18}$

Questão 2

Seja a função f definida por

$$f(x,y,t) = \frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{(x - yt)^2}{1 - t^2},$$

para $x,\ y \in \mathbb{R}$ e $t \neq \pm 1$.

O valor de $f(2,0,3) + f(0,2,3)$ é

(a) $\frac{11}{2}$

(b) $\frac{5}{2}$

(c) $\frac{3}{2}$

(d) 4

(e) 5

Rascunho

Questão 3

Cinco irmãos foram ao cinema e um deles entrou sem pagar. Apanhados por um funcionário do cinema, que queria saber qual deles entrou sem pagar, eles informaram:

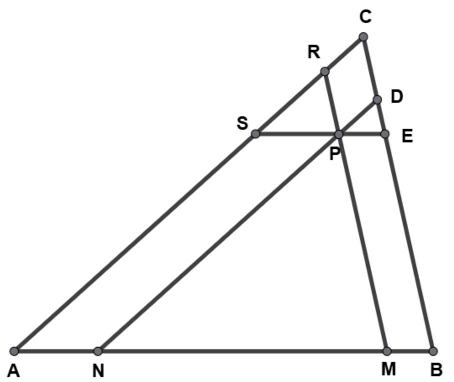
"Não fui eu, nem o Manuel", disse Marcos.
"Foi o Manuel ou o Marlon", disse Mário.
"Foi o Michael", disse Manuel.
"O Mário está mentindo", disse Michael.
"Foi o Michael ou o Marcos", disse Marlon.

Sabendo-se que um e somente um dos cinco irmãos mentiu, conclui-se logicamente que quem entrou sem pagar foi:

(a) Mário.
(b) Marcos.
(c) Michael.
(d) Manuel.
(e) Marlon.

Questão 4

Dado o triângulo ABC e seja P um ponto no interior desse triângulo. Traçando retas paralelas aos lados do triângulo ABC passando por P, obtemos a figura abaixo.
Sabendo que as áreas dos três triângulos resultantes PDE, PRS e PMN são 9 cm^2, 25 cm^2 e 81 cm^2, respectivamente, qual é a área do triângulo ABC?



(a) 289 cm^2
(b) 230 cm^2
(c) 240 cm^2
(d) 189 cm^2
(e) 199 cm^2

Rascunho

Questão 5

Sabendo que as equações $x^2 - m = 0$ e $3x^4 - 48 = 0$ tem as mesmas soluções reais, então o valor de m é:

(a) 2
(b) -4
(c) 16
(d) 4
(e) -2

Questão 6

Marquito participa de um show da TV e é pedido que ele escolha aleatoriamente uma entre quatro portas, atrás de uma delas haverá um prêmio.
Se Marquito escolher a porta com o prêmio, ele ganha.
Depois que Marquito escolheu uma porta, o apresentador do show abre uma das outras três portas, que não contém o prêmio.
O apresentador então pergunta se Marquito quer ficar com sua primeira escolha ou selecionar uma das duas portas restantes.
Considerando:

- P_1: a probabilidade de Marquito ganhar se realizar a troca, e escolher uma das outras duas portas.
- P_2: a probabilidade de Marquito ganhar se mantiver sua primeira escolha.

O valor de $P_1 - P_2$ é:

(a) $\frac{1}{12}$
(b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{3}{8}$
(d) $\frac{1}{8}$
(e) $\frac{1}{4}$

Rascunho

Questão 7

Seja ABC um triângulo cujos lados medem $AB = 15$, $AC = 8$ e $BC = 17$ centímetros, respectivamente. Considerando $\mathscr{C}$ o círculo inscrito no triângulo ABC, então a área de $\mathscr{C}$ vale:

(a) 4π cm^2
(b) 9π cm^2
(c) 16π cm^2
(d) 25π cm^2
(e) 36π cm^2

Questão 8

Quantos números de quatro algarismos menores do que 5432 e formados pelos algarismos 2, 3, 4 e 5 existem?

(a) 192
(b) 228
(c) 224
(d) 225
(e) 128

Questão 9

Em torno de uma mesa quadrada, encontram-se sentados quatro jornalistas. Galvão, o mais antigo entre eles, é carioca. Há também um paulista, um catarinense e um paranaense. Mílton está sentado à direita de Galvão. Alexandre, à direita do paulista. Por sua vez, Míriam, que não é catarinense, encontra-se à frente de Mílton.
Assim, pode-se afirmar que:

(a) Mílton é paulista e Míriam é paranaense.
(b) Mílton é carioca e Míriam é paranaense.
(c) Alexandre é paranaense e Míriam é paulista.
(d) Alexandre é catarinense e Miriam é paulista.
(e) Mílton é paranaense e Miriam é paulista.

Rascunho

Questão 10

Considere a expressão dada por $E(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - x}$. Para quais valores $x \in \mathbb{R}$ a expressão $E(x)$ é um número inteiro?

(a) Apenas para $x = 1$ e $x = 2$.
(b) Para todo $x \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$.
(c) Para todo $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.
(d) Apenas para $x \in \{2, 3\}$.
(e) Para todo $x \in \mathbb{Z} - \{0, 1, 2\}$.

Questão 11

Cada um de n países envia cinco representantes para uma olimpíada internacional de Matemática. De quantas maneiras podemos pôr em fila os $5n$ participantes da olimpíada, de modo que os cinco membros de cada país ocupem posições consecutivas?

(a) $5n!$

(b) $5! \cdot n!$

(c) $(5!)^n \cdot n!$

(d) $\dfrac{(5n)!}{(5!)^n}$

(e) $\dfrac{(5n)!}{n!}$

Questão 12

Seja ABC um triângulo isósceles de base AC, no qual o ponto D pertence ao lado BC e o ponto E pertence ao lado AC, de modo que o segmento DE é paralelo ao lado AB. Além disso, sabe-se que $\overline{CD} = 4$ cm, $\overline{DB} = 6$ cm e $\overline{AE} = 3$ cm. O perímetro do triângulo CDE vale:

(a) 12 cm
(b) 11 cm
(c) 10,5 cm
(d) 9 cm
(e) 10 cm

Rascunho

Questão 13

Um cartório enviou seis correspondências diferentes, sendo uma para cada cliente.
Cada correspondência foi colocada em um envelope, e os envelopes foram etiquetados com os seis diferentes endereços desses clientes.
A probabilidade de apenas uma etiqueta estar trocada é:

(a) $\frac{1}{3}$

(b) $\frac{2}{3}$

(c) 0

(d) $\frac{1}{6}$

(e) $\frac{5}{6}$

Questão 14

Se a é um número real positivo que satisfaz a igualdade $\sqrt{a+\frac{1}{a}}=3$, então valor da expressão $a^3+\frac{1}{a^3}$ é:

(a) 648
(b) 681
(c) 693
(d) 702
(e) 729

Questão 15

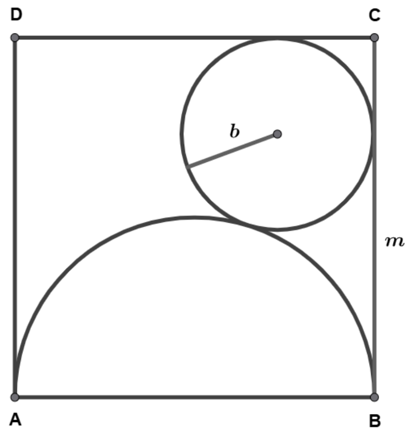
Considere o conjunto dos números naturais positivos menores do que 100, que deixam o mesmo resto quando são divididos por 3 e por 4. Quantos desses números são múltiplos de 5?

(a) 3
(b) 4
(c) 5
(d) 6
(e) 7

Rascunho

Questão 16

O quadrado $ABCD$ de lado m tem um semicírculo construído em seu interior, de modo que o diâmetro do semicírculo é o lado AB. Um círculo com raio máximo b é então construído no interior do quadrado e exterior ao semicírculo, de tal forma que tangência o semicírculo e os lados BC e CD do quadrado, conforme mostra a figura.
Qual das opções abaixo expressa o raio b do círculo em termos do lado m do quadrado?



(a) $m(2-\sqrt{3})$.
(b) $2-\sqrt{3}$.
(c) $m(2+\sqrt{3})$.
(d) $2+\sqrt{3}$.
(e) $2m(2-\sqrt{3})$.

Questão 17

Seja N o menor número natural positivo satisfazendo as seguintes condições:

(i) N tem exatamente 9 divisores positivos; e

(ii) dois desses divisores são 14 e 49.

Nessas condições o valor de N é:

(a) 98
(b) 147
(c) 196
(d) 294
(e) 343

Rascunho

Questão 18

Seja f definida por $f(0) = 1$ e

$$f\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2f(x) + \frac{1}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

O valor de $f(-1)$ é:

(a) $\frac{11}{2}$

(b) $\frac{5}{2}$

(c) $\frac{3}{4}$

(d) $\frac{-1}{2}$

(e) Não é possível determinar o valor de $f(-1)$ de acordo com as condições dadas.

Questão 19

Certo colégio possui um total de 600 estudantes, e sabemos que 350 estão matriculados na turma A e 300 estão matriculados na turma B. Esses dados incluem 130 estudantes que estão matriculados em ambas as turmas.
Qual é a probabilidade de que um estudante escolhido aleatoriamente esteja matriculado na turma A ou na turma B?

(a) $\frac{13}{12}$

(b) $\frac{39}{60}$

(c) $\frac{39}{60}$

(d) $\frac{13}{15}$

(e) $\frac{14}{15}$

Questão 20

Qual é o menor número natural positivo n para o qual $n!$ é divisível por 2025?

(a) 9
(b) 11
(c) 8
(d) 10
(e) 15

Rascunho