

Volume **7**
2025

Revista da

UEPG

*“Promovendo a inclusão social e
ajudando a mudar o cenário da educação.”*

Universidade Estadual de Ponta Grossa,
Setor de Ciências Exatas e Naturais
Departamento de Matemática e Estatística

Revista da OPMat

v.7 (2025)



Olimpíada Pontagrossense
de Matemática **UEPG**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Reitor: Miguel Sanches Neto

Vice-Reitor: Ivo Mottin Demiate

PRÓ-REITORIA DE ASSUNTOS ADMINISTRATIVOS - PROAD

Pró-Reitor: Emerson Martins Hilgemberg

PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO - PROEX

Pró-Reitora: Beatriz Gomes Nadal

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO - PROGRAD

Pró-Reitor: Miguel Arcanjo de Freitas Júnior

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Chefe: Jocemar de Quadros Chagas

Chefe Adjunto: Scheila Valechenski Biehl

Apoio:

ASSOCIAÇÃO OLÍMPICA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - AOBM

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS - FGV CDMC

STONE PAGAMENTOS

CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UEPG

Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática - OPMat/ Universidade Estadual de Ponta Grossa. Departamento de Matemática e Estatística. v.1 (2019). Ponta Grossa: UEPG/DEMAT, 2023.

Anual

v. 2-7, 2020-2025

Link: <https://www2.uepg.br/opmat/revista-da-opmat/>

1. Matemática – competições. 2. Matemática – questões problemas. 3. Matemática – exercícios. I. Universidade Estadual de Ponta Grossa. II. Departamento de Matemática e Estatística. III. T.

CDD: 510

Coordenadora da OPMat: Elisangela dos Santos Meza

Coordenador da Revista da OPMat: Marcos Teixeira Alves

Supervisores da Revista da OPMat: Marcos Teixeira Alves e Scheila Valechenski Biehl

Comitê Editorial da Revista:

Ana Karla Mainardes Orlonski

Ana Paula Duda

Cauan Cardozo da Costa

Elisangela dos Santos Meza

Fabiane Peremibida Iarochevski

Gustavo Borges Machado

Gustavo Neves

Isabella Paola Matoski

Jamilly Yasmim Borgato Lodovirge

José Trobia

Kelvin Advan de Lima

Luiz Henrique Bahls

Marcos Teixeira Alves

Ruan Eneias Ferreira

Scheila Valechenski Biehl

Arte da Capa:

CCOM - Coordenadoria de Comunicação Social

Postagem:

Segundo semestre de 2025

Revista da OPMat v. 7 (2025)

Conteúdo

Apresentação	7
10ª OPMat (2024)	9
Premiados	11
Nível Mirim	13
Nível Júnior	18
Nível 1	23
Nível 2	28
Nível 3	32
Nível 4	35
Professores Premiados	37
Escolas Participantes	51
Nível Mirim	55
Prova Objetiva	55
Gabarito da Prova Objetiva	58
Prova Dissertativa	59
Gabarito da Prova Dissertativa	60
Nível Júnior	62
Prova Objetiva	62
Gabarito da Prova Objetiva	64
Prova Dissertativa	65
Gabarito da Prova Dissertativa	67
Nível 1	70
Primeira Fase	70
Gabarito da Primeira Fase	75
Segunda Fase	76
Gabarito da Segunda Fase	80
Nível 2	85
Primeira Fase	85
Gabarito da Primeira Fase	91
Segunda Fase	92
Gabarito da Segunda Fase	95
Nível 3	103
Primeira Fase	103

Gabarito da Primeira Fase	109
Segunda Fase	110
Gabarito da Segunda Fase	113
Nível 4	121
Primeira Fase	121
Gabarito da Primeira Fase	126
Segunda Fase	127
Gabarito da Segunda Fase	130
 Curiosidades	 139
 Soluções dos Problemas Propostos	 143
 Problemas Propostos	 151
 Informações Gerais	 155
Envio de Artigos e Soluções	157
Como Adquirir a Revista	157
Fale Conosco	157

Apresentação

Caro Leitor,

A *Revista da Olimpíada Pontagrossense de Matemática* é resultado do projeto de extensão: *Olimpiadas de Matemática: Promovendo a Inclusão Social e ajudando a mudar o cenário da Educação*, desenvolvido pelo Departamento de Matemática e Estatística da UEPG. Tem periodicidade anual, sendo este o seu 7º volume.

Este volume apresentará os problemas e as soluções referentes à 10ª OPMat - Olimpíada Pontagrossense de Matemática, realizada em 2024. O principal objetivo da Revista é compor um material robusto em conteúdos matemáticos com vista a ser utilizado como recurso pedagógico ao letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e como fonte de estudo e treinamento para olimpíadas de matemática.

Encorajamos todos os leitores a nos enviar soluções para os desafios encontrados na seção "Problemas Propostos", bem como submeter artigos, que serão publicados no próximo volume, desde que sejam aprovados pelo Comitê Editorial da Revista.

Para ficar por dentro das notícias da Olimpíada Pontagrossense de Matemática, próximas edições, fotos e resultados, acompanhe-nos pelas nossas redes sociais:

<https://www.facebook.com/opmat.uepg>

https://www.instagram.com/opmat_uepg/

e pela homepage:

<https://www2.uepg.br/opmat/>

Ponta Grossa, 01 de agosto de 2025.

Comitê Editorial



Olimpíada Pontagrossense
de Matemática **UEPG**



Olimpíada Pontagrossense
de Matemática **UEPG**

"Promovendo a inclusão social e
ajudando a mudar o cenário da educação."

Premiados

A Cerimônia de Premiação da *10ª Olimpíada Pontagrossense de Matemática* ocorreu no dia 14 de dezembro de 2024, na Arena Multiuso da cidade de Ponta Grossa, e pela primeira vez em único horário, foram convidados os premiados de todos os níveis, professores premiados e representantes escolares. A Cerimônia também foi uma comemoração em virtude da realização da 10ª edição da OPMat realizada no ano de 2024.

A Cerimônia de Premiação contou com a presença das seguintes autoridades:

- Prof. Miguel Sanches Neto - Reitor da Universidade Estadual de Ponta Grossa
- Profa. Simone do Rocio Pereira Neves - Secretária Municipal de Educação de Ponta Grossa
- Rodrigo Macedo - Membro do Centro para o Desenvolvimento da Matemática e Ciências da Escola de Matemática Aplicada da Fundação Getúlio Vargas
- Profa. Beatriz Gomes Nadal - Pró-Reitora de Extensão e Assuntos Culturais da Universidade Estadual de Ponta Grossa
- Prof. Miguel Arcanjo de Freitas Júnior - Pró-Reitor de Graduação da Universidade Estadual de Ponta Grossa
- Profa. Izolde Hilgemberg de Oliveira - Diretora do Departamento de Educação de Ponta Grossa
- Profa. Sandra Mara Dias Pedroso - Representante do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa
- Prof. Jocemar de Quadros Chagas - Chefe do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Estadual de Ponta Grossa e membro da comissão organizadora da OPMat
- Profa. Scheila Valechenski Biehl - Chefe Adjunta do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Estadual de Ponta Grossa e membro da comissão organizadora da OPMat
- Prof. José Trobia - Membro da comissão organizadora da OPMat

- Prof. Marciano Pereira - Membro da comissão organizadora da OPMat
- Profa. Ana Lucia Pereira - Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática à Distância da Universidade Estadual de Ponta Grossa
- Profa. Elisangela dos Santos Meza - Coordenadora da Olimpíada Pontagrossense de Matemática

Nessa Cerimônia foram premiados 396 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 14,71% dos alunos que participaram da 10ª OPMat), 12 com troféus e medalhas de ouro, 18 com medalhas de ouro; 57 com medalhas de prata; 183 com medalhas de bronze e 126 com medalhas de menção honrosa.

Também foram entregues troféus para as escolas e para os professores dos alunos que obtiveram a maior pontuação na 10ª OPMat da rede particular e da rede pública em cada nível, totalizando 24 troféus. Todos os professores e escolas cujos alunos foram premiados receberam certificados de congratulações.

Nível Mirim**Troféu**

- Lara Daniele Correia Evangelista (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Oliver Feitosa Cordeiro (Colégio Marista Pio XII)

Ouro

- Lara Daniele Correia Evangelista (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Oliver Feitosa Cordeiro (Colégio Marista Pio XII)
- João Schmidt Cantuária (Escola Municipal Prefeito José Hoffmann)
- Maria Luísa Nogueira Hass (Colégio Alfa Plus)
- Pedro Enrico Prochner (Colégio Marista Pio XII)

Prata

- Nycolas Pietro Martin Gonçalves (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- Laura Hernandez (Colégio Adventista de Ponta Grossa)
- Livia Woinorvski De Miranda (Colégio Marista Pio XII)
- Pedro Schneider Benedito (Colégio Sagrada Família)
- Davi Lucas Collesel Martins (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Lorenzo Alves De Lara Ribeiro (Colégio Elite Tales de Miletto)
- Pedro Pontarolo Artero (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Benício Nobre Wagner (Colégio Marista Pio XII)
- Livia Ferreira Hilgenberg (Colégio Marista Pio XII)
- Maria Gabrielly G. Rubino (Escola Municipal Doutor Carlos Ribeiro de Macedo)

Bronze

- Lucas Yagushi Kotecki (Colégio Santo Ângelo)
- Eduardo Bazzi De Souza (Colégio Marista Pio XII)
- Mariana Lima Mendes (Colégio Integração)
- Gabriel Faix Figueiredo (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gabriel Dobzynski (Escola Santa Terezinha)
- Isabela Peleskcis Dos Santos (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Alice Santos Rieger (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Alice Pupo Brenner (Colégio Integração)
- Murilo Pereira Campagnaro (Colégio Alfa Plus)
- Anna Luiza Daciuk De Lima (Escola São Jorge de Ponta Grossa)
- Lara Ferraz Gasparelo (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Benjamin Matheus Gonçalves (Colégio Sagrada Família São Zygmunt)
- Lucas Javorski Zeni (Escola Santa Terezinha)
- Larissa Haliski (Colégio Marista Pio XII)
- Théo Penner (Colégio Marista Pio XII)
- Julianano Rybu Gurski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Guilherme Prado Castilho (Colégio Sagrada Família São Zygmunt)
- Joaquim Staben (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Davi Graniski Santos (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- José Glugoski Neto (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vi-lela)
- Pedro Henrique Huçailuk (Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Schnirmann)

- Pedro Moises Da Luz De Godoi (Escola Municipal São Jorge)
- Davi Moro Gregório (Escola Municipal Professor Jorge Dechandt)
- Lavinia Vitoria Maria Machado (Escola Municipal Felício Francisquiny)
- Enzo Samuel Martins Dias (Escola Municipal Prefeito Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Maria Luiza Kaczmarki (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- João Luka De Mello Lopes (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Rafaela Lacerda Kufita (Escola Municipal Frederico Constant Degraf)
- Alice Rafaelly De França Pinheiro (Escola Municipal Professora Idalia Góes)
- Caio Vitor Opuchkevitch Correia De Lima (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Valentina Jaremtchuk (Escola Municipal São Jorge)
- Leonardo Sampaio (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Isabela Noêmia Da Silva Pereira (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Benjamim Das Neves Ribeiro (Escola Municipal Prefeito Doutor Amdeu Puppi)
- Isadora Gabrielly Da Silva Seneiko (Escola Municipal Professor Placido Cardon)
- Lucas Macyszyn De Oliveira (Escola Municipal Professor Faris Antonio Michaele)
- Heloisa Ostroski De Almeida (CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha)
- Otavio Gabriel Puchta De Oliveira (Escola Municipal Zanoni Rogoski)

Menção Honrosa

- Rendryk Davi Freitas (Escola Municipal Doutor Leopoldo Pinto Rosas)
- Kevin De Lima Gonçalves (Escola Municipal Prefeito Doutor Elyseu de Campo Mello)

- Helena Nadzeia (Escola Municipal Catarina Miró)
- João Gabriel Grzebelucka Rodrigues Neves (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Victor Henrique Rigoni Rietow (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)
- Caleb Souza Do Carmo (Escola Municipal Professora Ruth Holzmann Ribas)
- Ana Clara Rodrigues Wiechinieski (Escola Municipal Professora Minervina Farnca Scudelareck)
- Eduardo Caleb Mazeika Ferreira (Escola Municipal Prefeito Doutor Plauto Miró Guimarães)
- Maria Clara Zanatta Da Cruz (Escola Municipal Professor Paulo Grott)
- Tiago Rafael De Avila Jurchaks (Escola Municipal Professora Zila Bernadete Bach)
- Bernardo Goncalves Celarius (Escola Municipal Deodoro Alves Quintiliano)
- Emilly Maria Pereira Batista (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Laura Gomes Lima (Escola Municipal Prefeito José Hoffmann)
- Augusto Blaszczak Petla Silva (Escola Municipal Professor Paulo Grott)
- Vitor Henrique Taques De Lara (Escola Municipal Deputado Mario Braga Ramos)
- Luiz Miguel Duarte (Escola Municipal Prefeito Doutor Amdeu Puppi)
- Aghata Zipp Da Silva (Escola Municipal Prefeito Doutor Othon Mader)
- Pedro Correia Machado (Escola Municipal Prefeito Heitor Ditzel)
- Melissa Elisa Santana (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Emily Raimundo Pietczak (Escola Municipal Professora Lúcia Pacher)

- Larissa Rafaelly Silva De Lara (Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Valentina Franca Zanini (Colégio Sagrada Família)
- Lorenzo Cruz Capoa (Colégio Santo Ângelo)
- Pedro Henrique Nabozny De Sousa (Escola Municipal Zanoni Rogoski)

Nível Júnior**Troféu**

- Betina Goes Da Silva (Escola Municipal Professora Lúcia Pacher)
- Leticia Kloster Kremer (Colégio Sant'Ana)

Ouro

- Betina Goes Da Silva (Escola Municipal Professora Lúcia Pacher)
- Samuel Ionak De Carvalho (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)
- Agatha Regina De Lima Paredes (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Leticia Kloster Kremer (Colégio Sant'Ana)
- Rayane De Oliveira Matoso (Escola Municipal Professora Haydee Ferreira de Oliveira)

Prata

- Davi Ferreira De Lara (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Sophia Polaquini Caetano (Colégio Alfa Plus)
- Cibelly Lauren Ribaski Da Silva (Escola Municipal Padre José Bugatti)
- Julia Benincá Leal Rocha (Escola Santa Terezinha)
- Sarah Caroline De Goveia (Escola Municipal Prefeito Theodoro Batista Rosas)
- Miguel Otavio Ferreira Carvalho (Escola Municipal Professor Edgar Zanoni)
- Arthur Guzatti Antunes (Escola Municipal Professora Ana de Barros Holzmman)
- Lucas Henrique Soares (Escola Municipal Professora Ana de Barros Holzmman)
- Eduardo Mendes Do Prado Leifeld (Escola Municipal Professor Sebastião dos Santo e Silva)

- Heloisa Bartos Portela (Colégio Sant'Ana)

Bronze

- Isabela Garrouba Biegas (Colégio Marista Pio XII)
- Isis Maria Palmonari Pereira (Colégio Santo Ângelo)
- Sofia Otília Cunha Silveira (Colégio Santo Ângelo)
- Marina Torres Jeruchimson (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Cecília Lima Pontes (Colégio Integração)
- Catarina Bloinski Munhoz (Colégio Sant'Ana)
- João Arthur Veiga Rodrigues (Colégio Sant'Ana)
- Arthur Gabriel Policene (Escola Santa Terezinha)
- Heitor Soares De Miranda (Escola Santa Terezinha)
- Julia Andrade Hasselmann (Colégio Marista Pio XII)
- Augusto Miguel Dubiela Matias (Colégio Sant'Ana)
- Bernardo Dias (Colégio Sagrada Família)
- Julia Taís Ribeiro (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Benjamin Gianni Rocha (Escola Santa Terezinha)
- Bárbara Rudnik Urban (Colégio Sagrada Família)
- Caio De Almeida Tonus (Colégio Marista Pio XII)
- Alexandre Gonçalves Dos Santos (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Antonio Altino (Colégio Marista Pio XII)
- Francisco Wielewski Lacerda (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Davi Lima De Godoy (CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha)

- Rafael Correa (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Samuel De Oliveira Almeida (Escola Municipal Prefeito Doutor Plauto Miró Guimarães)
- Fabio Henrique Martins De Paula (Escola Municipal Professor Sebastião dos Santo e Silva)
- Lavígnia Rafaella Potkowinski (Escola Municipal General Aldo Bonde)
- João Pedro Dutra Dos Reis (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Sofia Dietrich Machado (CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha)
- Maria Vitoria França De Oliveira (Escola Municipal Doutor Carlos Ribeiro de Macedo)
- Sabrina Antonechen Andreiko (Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)
- Ian Gabriel Paes Barboza (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Arthur Rodrigues Teixeira (Escola Municipal Professor Aristeu Costa Pinto)
- Monalisa Martins Costa (Escola Municipal Professor Kamal Tebcherani)
- Mathias Ferreira Vieira (Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Bernardo Falcão Da Rocha (Escola Municipal Professora Zila Bernadete Bach)
- Clara Chagas Ribeiro (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- Emerson Fernando Cichella Júnior (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)
- Bianca Emanuele Pendyk (Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira)

Menção Honrosa

- Nicolas Palhano Iochucki (Colégio Elite Tales de Mileto)

- Julio Cesar Mazepa Camargo (Colégio Integração)
- Vicente Schumacher Welling (Colégio Marista Pio XII)
- Arthur Ricciely Alves (Colégio Sagrada Família)
- André Carneiro Madureira (Colégio Marista Pio XII)
- Emanuel Mariano Do Carmo (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Isadora Higaki Pereira (Escola Santa Terezinha)
- André De Geus Vaz (Colégio Santo Ângelo)
- Emanuel Da Cruz Jucoski (Escola Municipal Catarina Miró)
- Davi Eduardo Vicente Moreira (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Mayara Emanuelle Traczicovski (Escola Municipal General Aldo Bonde)
- Francisco Vecchia Szmoski (Colégio Marista Pio XII)
- Renata Bonatto Lima (Escola Municipal Prefeito Major Manoel Vicente Bitencourt)
- Guilherme Kenji Benato Kawakami (Colégio Marista Pio XII)
- Heitor Bartel Soares (Colégio Marista Pio XII)
- Vitor Gabriel Hartleib (Escola Municipal Professora Maria Elvira Justus SchmidtF)
- Mariana Goncalves Leite (Escola Municipal Professora Zahira Catta Preta Mello)
- Matheus Mainardes De Andrade (Escola Municipal Prefeito Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Guilherme Da Cunha Abreu (Escola Municipal Professor Faris Antonio Michaele)
- Naomi De Souza Machado (Escola Bom Pastor)
- Carla Roberta De Oliveira Betim (Escola Municipal Professora Otacília Haselmann de Oliveira)

- Vitor Henrique Holm (Colégio Adventista de Ponta Grossa)
- Enzo Filipe Da Silva Verpa (Escola Municipal Professora Ageronidas Stadler)
- Pietro Campos Clazer (Colégio Alfa Plus)
- Marcela Fogaça (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)
- Leonardo Gomes Da Silva (Escola Municipal Professora Braulina Carneiro de Quadros)
- Thiago Taques De Mattos (Escola Municipal Professora Zair Santos Nascimento)
- Enzo Gabriel Lopes (Escola Municipal Felício Francisquiny)
- Erika Vitoria De Paula Ferreira (Escola Municipal Deputado Mario Braga Ramos)
- Bernardo Parra Munhoz (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Nicolas Biscaia Brasileiro (Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Viela)
- Julia Lara Machado (CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha)

Nível 1**Troféu**

- Felipe Auer Abilhôa (Escola Santa Terezinha)
- Adrian Christopher Guimarães Ferreira (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)

Ouro

- Felipe Auer Abilhôa (Escola Santa Terezinha)
- Francisco Moretto Pires (Colégio Sant'Ana)
- Enzo Vittorio Sother (Colégio Marista Pio XII)
- Ian Davi Bolzon Rocha De Moraes (Colégio Adventista de Ponta Grossa)
- Lucas Francischinelli Freitas (Colégio Santo Ângelo)

Prata

- Bianca Palhano Iochucki (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Miguel Engelmann Maekawa (Colégio Marista Pio XII)
- Adrian Christopher Guimarães Ferreira (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)
- Julia Rodrigues De Souza Silva (Colégio Estadual Profissional Polivalente)
- Wallace Willians Salazar Monteiro (Escola Bom Pastor)
- Samuel Galvão Ribeiro (Escola Santa Terezinha)
- Rafael Merenda Izidorio (Colégio Alfa Plus)
- Ícaro Augusto Jesus De Souza (Colégio Estadual Profissional Professor João Ricardo von Borell du Vernay)
- Leonardo Guimarães De Almeida (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Samuel Isaías Dias Ferreira (Colégio Estadual 31 de Março)

Bronze

- Maria Eduarda Regalio Campagnoli (Colégio Marista Pio XII)
- Maria Luiza Viecheneski Cordeiro (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Luara Vitória Ciunek Dos Santos (Colégio Integração)
- Yasmin Gaspar Sampaio Da Cruz (Colégio Marista Santa Mônica)
- Maria Fernanda Kviatcovski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Emanuela Aleixo Dos Prazeres (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Valentina Cunha Delega (Escola Santa Terezinha)
- Arthur Miguel Farias Ribeiro Leite (Colégio Santo Ângelo)
- João Pedro De Souza (Colégio Sant'Ana)
- Gabriela Schibelsky Sanches (Escola Santa Terezinha)
- Letícia Nogaroto Vicari (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Rebeca Antunes Rodrigues (Colégio Marista Santa Mônica)
- Enzo Fornazzari Cipolari (Escola Santa Terezinha)
- Melissa Schervaty Camargo (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Ana Luísa Nasser Matos Gueiber (Colégio Santo Ângelo)
- Vitor Arthur Marçal Beck (Colégio Santo Ângelo)
- Maria Eduarda Do Nascimento (Escola Santa Terezinha)
- Israel Leonardo Los Barbosa (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Heloiza Chaves Domingues (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Miguel Pineda Spartalis (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Julia Da Silva Pradella (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- João Victor Zampieri (Escola Estadual Medalha Milagrosa)

- Maria Luiza Nogare Gabriel Da Silva (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Kalebe Neves Dos Santos (Colégio Estadual 31 de Março)
- Fernanda Valentina Kraiczyi Bueno (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)
- Nicolly Santos De Freitas (Colégio Estadual Professor José Gomes do Amaral)
- Priscila Sarah Souza De Andrade (Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória)
- Melissa Marques Palhão (Colégio Professor Edison Pietrobelli)
- Ane Gabrieli Guimarães (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Erick Rodrigo Antunes Braga (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Fatima Emanuely Viglus (Colégio Estadual Professora Linda Salamuni Bacila)
- Robson Luiz De Souza Junior (Colégio Estadual 31 de Março)
- Luiz Miguel Neves Ramos (Colégio Professor Edison Pietrobelli)
- Ezequiel Gomes Correia (Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Arthur De Oliveira Bourguignon (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Heloíse Vitória Martins Biaco (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- José Eduardo Kohut Da Silva (Colégio Estadual Frei Doroteu de Pádua)
- Júlia Stanislavski E Silva (Colégio Estadual Profissional Professor João Ricardo von Borell du Vernay)
- Maiana Eduarda Felipe (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Guilherme Henrique Alves (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)

Menção Honrosa

- Pedro Camargo Tkatchuk (Colégio Sagrada Família)

- Sofia Paes De Castro (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Daniel Gualdezi Pereira (Colégio Integração)
- Alice Maria Staroin (Colégio Sagrada Família)
- Caio Dias Schechtel (Colégio Sagrada Família)
- Talya Lovato Ferreira (Colégio Marista Pio XII)
- Danilo Krassulja (Colégio Sant'Ana)
- Gabriel Mainardes Da Silva (Colégio Sant'Ana)
- João Pedro Farina Dos Santos (Colégio Alfa Plus)
- Livia Gorte Dutko (Colégio Integração)
- Leonardo Siqueira Glitz (Escola Princeps)
- Guilherme Jurchakis Mellem (Colégio Sant'Ana)
- Isac Gabriel Santos Anais (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Luiz Gustavo Borges (Colégio Dinâmico)
- João Pedro Dias Trzaskos (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Gabrielly Fagundes De Deus (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Julia Schelesky Jansen (Escola Desafio)
- Luísa Almeida Timoteo (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Isis Borges Da Silva (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Kaique Emanuel Da Silva (Colégio Estadual 31 de Março)
- Vitoria Gabrielly Borba Dos Santos (Colégio Estadual 31 de Março)
- Adam Volpato Ribeiro Dos Santos (Colégio Alfa Plus)

- Davi Lopes Da Fonseca (Colégio Estual Nossa Senhora da Glória)
- Julia Miwa Yasuda (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lucas Poglitsch Roza Pereira (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Nicolas Migliorini Corrêa Da Silva (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Sabryna Costa Apem (Escola Santa Terezinha)

Nível 2

Troféu

- Pedro Kaito Yasuda (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Otávio Rodrigues Conrado (Colégio Estadual Professor Eugênio Malanski)

Ouro

- Pedro Kaito Yasuda (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Henrique Galvan Calçada (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Lucas Galvan Calçada (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Tomás Samoilenko Polachini (Colégio Santo Ângelo)
- Bernardo Hashimoto (Colégio Santo Ângelo)

Prata

- Clarice Lima Pontes (Colégio Integração)
- Lorenzo Ribeiro Mauro (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Rafaela Krolow Bandeira (Colégio Sagrada Família São José)
- Bernardo Kichileski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Otávio Rodrigues Conrado (Colégio Estadual Professor Eugênio Malanski)
- Pedro Leonardo Mikos (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Lucas Ditzel Roza (Colégio Marista Pio XII)
- Nicolas Zampieri Rosa (Colégio Sant'Ana)
- Giovana Beatriz Migedalski (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Gustavo Grachinski De Souza (Colégio Sagrada Família)

Bronze

- Haroldo Borg Filho (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Heitor Mello De Lima (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Gabrielly Quarterolli Levandoski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- João Vitor Collesel Martins (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Joao Paulo Cieslak (Colégio Alfa Plus)
- Vinicius De Queiroz Dos Santos (Colégio Alfa Plus)
- Rafaela Bertelli Do Espírito Santo (Escola Santa Terezinha)
- João Rodrigues Neto (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Ellen Vitória Toroski (Colégio Alfa Plus)
- Augusto Lorenzo Venâncio Pinto (Colégio Santo Ângelo)
- Alice Levandowski Moleta (Colégio Positivo Master)
- Larissa Bianco Silva (Escola Santa Terezinha)
- Massayuki Munefica (Colégio Alfa Plus)
- Beatriz Regina Duarte Neotti (Colégio Marista Pio XII)
- Massayuji Munefica (Colégio Alfa Plus)
- João Pedro Lasquevski Costa (Colégio Marista Pio XII)
- Luca Avila Rodrigues De Oliveira (Colégio Estadual Professor José Gomes do Amaral)
- Vinicius Oliveira Neves (Colégio Estadual Cívico-Militar Professor Becker e Silva)
- Emanuel Cecato Pachla (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Artur Lacerda Da Silva (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Guilherme Antunes De Camargo (Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)

- Rodrigo Lima Dos Santos Batista (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- Kaike Raphael Machado Guerlinguer (Colégio Estadual Profissional Presidente Kennedy)
- Julia Taques Glonek (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Marcelo Henrique Ruth (Colégio Estual Nossa Senhora da Glória)
- Alexandre Rech Batista (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)
- Luiz Henrique Nowak Ferreira (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Lucas Emanuel Galvão (Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Ana Paula Breula (Colégio Estadual Professora Linda Salamuni Bacila)
- Matheus Pavilaki Kozan (Colégio Estual Nossa Senhora das Graças)
- Rômulo Bilynkievycz Dos Santos (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)

Menção Honrosa

- Sophia Pao Yi Hsu (Escola Santa Terezinha)
- Ana Laura Mendes Barbosa (Colégio Adventista de Ponta Grossa)
- João Vitor Lourenço Girardi (Colégio Marista Pio XII)
- Giovana Preto Hiar De Oliveira (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lara De Souza Oliveira (Colégio Pontagrossense Sepam)
- João Victor Vedan De Ramos (Colégio Integração)
- Gabriel Fernandes Lopes (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Manuela Oliveira Soltes (Colégio Sant'Ana)
- Isabela Canavez (Colégio Santo Ângelo)
- Manuela Salata (Colégio Santo Ângelo)

- Isabelle Pissette Bergold (Colégio Adventista de Ponta Grossa)
- Sarah Maciel De Souza (Colégio Adventista de Ponta Grossa)
- Sophie Victória Fernandes De Jesus (Colégio Integração)
- Julia Ladika Dos Santos (Colégio Marista Santa Mônica)
- Sofia Siduoski Wendler (Colégio Marista Pio XII)
- Guilherme Rybu Gurski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Aissa Nery Brum (Colégio Positivo Master)
- Sofia Dobzynski (Escola Santa Terezinha)
- Pâmela Mendes Normandia (Colégio Adventista de Ponta Grossa)
- Yasmim Aparecida Dos Santos Sassi (Colégio Marista Santa Mônica)
- Estela De Cássia Valentim (Escola São Jorge de Ponta Grossa)

Nível 3

Troféu

- Luis Eduardo Cosseti Correia (Colégio Alfa Plus)
- Bruna Vitória De Melo Delgobo (Instituto Federal do Paraná - Campus Ponta Grossa)

Ouro

- Luis Eduardo Cosseti Correia (Colégio Alfa Plus)
- Pedro Luiz Scheifer De Souza (Colégio Alfa Plus)
- Benjamin Finger Rocha (Colégio Positivo Master)
- Pedro Dias Carrara (Colégio Lobo Ponta Grossa)
- Vanessa Ribeiro Dos Santos (Colégio Pontagrossense Sepam)

Prata

- Arthur Henrique Krüger Gerônimo (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Joana Rafaela Duarte (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Bárbara Malacarne Campagnoli (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Amanda Orizzi Moutinho De Souza (Colégio Marista Pio XII)
- Antonella Mello Fassini (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Eduardo Máximo Kobilarz (Colégio Santo Ângelo)
- Ana Clara Fogaça Souza (Colégio Integração)
- Elton Walesko De Souza (Colégio Santo Ângelo)
- Bruna Vitória De Melo Delgobo (Instituto Federal do Paraná - Campus Ponta Grossa)
- Caio Augusto Fernandes (Colégio Lobo Ponta Grossa)
- Luiz Henrique Tkaczuk (Colégio Sagrada Família São José)

Bronze

- Lavinia De Moraes Ferreira (Colégio Marista Pio XII)
- Lucas Sasse (Colégio Sant'Ana)
- Massamiti Munefiça Neto (Colégio Alfa Plus)
- Sofia Sokolowski Galvani (Colégio Santo Ângelo)
- Felipe Guimarães De Almeida (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Maria Laura Corrêa Viana (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Guilherme Stanislawczuk Do Nascimento (Colégio Marista Pio XII)
- Victor Gabriel Dos Anjos (Colégio Integração)
- Nicolas Andrade De Mattos (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Michel Afonso De Andrade Siebre (Colégio Integração)
- Gustavo Carvalho Da Silva (Colégio Alfa Plus)
- Cauã Henrique Chaikouski (Colégio Estadual Profissional Regente Feijó)
- Bruno Vinícius Lemes Rodrigues (Colégio Estadual Profissional Regente Feijó)
- Maria Clara Soistak Ricardo (Colégio Estadual Profissional Regente Feijó)
- Izabelly Dos Santos (Centro Estadual de Educação Profissional Agrícola Augusto Ribas)
- Victor Leonardo Alves De Jesus (Instituto de Educação Estadual Professor Cesar Pietro Martinez)
- Felipe Daniel De Araujo (Colégio Estadual Profissional Regente Feijó)
- Mateus Eduardo Dos Santos (Colégio Estadual Profissional Regente Feijó)
- Nathally Maria Polisczuk (Colégio Estadual Francisco Pires Machado)
- Vinicius Augusto Almeida Martins (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Marcos Roberto Baranski (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Mike André Sowa (Colégio Estadual General Osório)

Menção Honrosa

- Hugo Scheifer Bordinhon (Colégio Sant'Ana)
- Maria Fernanda Da Silva Schmitz (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Maria Julia De Paiva (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Clarissa Nadal Alvares (Colégio Alfa Plus)
- Henrique Carvalho Da Silva (Colégio Alfa Plus)
- Ana Julia Corria Dos Santos (Colégio Sant'Ana)
- Arthur Tavarnaro Amorim (Colégio SESI Ponta Grossa)
- Carolina Krepel (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Isadora Dias Maluf (Colégio Alfa Plus)
- Ana Caroline Abrão (Colégio Sagrada Família São José)
- Maria Livia Calixto Vendrami (Colégio Sagrada Família São José)
- Giovana Boin Pavelecini (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Eduardo Jandt (Colégio Adventista de Ponta Grossa)
- Laura Carvalho Da Silva (Colégio Alfa Plus)
- Joao Pedro Plovas Ramos (Colégio Dinâmico)
- Bento De Freitas De Oliveira Mara (Colégio SESI Ponta Grossa)
- Raphael Welter Ribas (Colégio Sagrada Família)
- Leonardo Henrique Maravieski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Pedro Henrique Fonseca De Vargas (Colégio Positivo Master)
- Vitor Davi Ávila De Oliveira (Colégio Sant'Ana)
- Yuri Gabriel Flauzino Medina (Colégio Adventista de Ponta Grossa)
- Arthur Fuchs Ferreira (Colégio Alfa Plus)

Nível 4**Troféu**

- Ana Julia Da Silva (Centro Estadual de Educação Profissional Agrícola Augusto Ribas)
- João Augusto Canani (Colégio Positivo Master)

Ouro

- Ana Julia Da Silva (Centro Estadual de Educação Profissional Agrícola Augusto Ribas)
- Lucas Rocha De Oliveira (Colégio Estadual Profissional Regente Feijó)
- João Gustavo Verner Eidam (Centro Estadual de Educação Profissional Agrícola Augusto Ribas)
- João Augusto Canani (Colégio Positivo Master)
- Mitzi Vedan De Ramos (Colégio Integração)

Prata

- Gustavo Marques Da Silva (Colégio SESI Ponta Grossa)
- Gabriel Angelo Nadal Alvarez (Colégio Alfa Plus)
- Felipe Tramontin (Colégio Sant'Ana)
- Pedro Paulo Woytichoski Neto (Colégio Marista Pio XII)
- Pedro Henrique Farina Dos Santos (Colégio Alfa Plus)
- Murilo Borato (Colégio Sagrado Coração de Jesus)

Bronze

- Pedro Henrique Alves De Lima (Colégio Integração)
- Francisco Galvão Coloda (Colégio Pontagrossense Sepam)

- Maria Eduarda Onesko Slusarz (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Eduardo Wiesinieshi Canteri (Colégio Sagrada Família)
- Bruna Schimaneski Borges (Colégio Dinâmico)
- João Victor Almeida Souza (Colégio Sagrada Família)
- Cauã Dobzinski Silva (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Bárbara Maciel De Lima (Colégio Sant'Ana)
- Isadora Benvenuti Langer (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Vitor Camargo Dos Santos (Instituto Federal do Paraná - Campus Ponta Grossa)
- Carlos Henrique Arving (Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)
- Felipe Osorio Iurk Dias (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Gustavo Rocha Lemos (Colégio Estadual Profissional Regente Feijó)
- Geovana Ortiz De Aguiar (Colégio Estadual Professora Sirley Jagas)
- Isabelli Maria De Lima Santos (Colégio Estadual Profissional Polivalente)
- Anne Loise Zagulski Guimarães (Colégio Estadual Professora Linda Salamuni Bacila)

Professores Premiados

Abaixo consta a relação de todos os professores que receberam troféus nos respectivos níveis:

Nível Mirim - Troféu:

- Gilsiane De Fátima Roth (Colégio Marista Pio XII)
- Angélica Ribeiro De Farias Alves (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vilela)

Nível Júnior - Troféu:

- Idilcéia Aparecida Hilgenberg Löderer (Colégio Sant'Ana)
- Nilton José Chila (Escola Municipal Professora Lúcia Pacher)

Nível 1 - Troféu:

- Marcela Dos Santos (Escola Santa Terezinha)
- Katiele Tives Micene (Colégio Estadual Cívico-militar José Elias da Rocha)

Nível 2 - Troféu:

- Fernanda Hennipmann (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Carla Cristiane Dal-Col De Oliveira (Colégio Estadual Professor Eugênio Malanski)

Nível 3 - Troféu:

- Julio Cezar Haluszczak (Colégio Alfa Plus)
- Gustavo Bilobran Neves (Instituto Federal do Paraná - Campus Ponta Grossa)

Nível 4 - Troféu:

- Vanderlei Nemitz (Colégio Positivo Master)
- Ingrid Milléo (Centro Estadual de Educação Profissional Agrícola Augusto Ribas)

A seguir consta a relação de todos os professores que tiveram alunos premiados na 10ª OPMat no ano de 2024:

- Franciane De Barros Gracia (CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha)
- Gláucia De Fátima Coesel (CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha)
- Jaqueline Da Costa Pasturczak (CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha)
- Silvia Helena Hoffmann Cutrim (CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha)
- Alzenir Virginia Ferreira Soistak (Centro Estadual de Educação Profissional Agrícola Augusto Ribas)
- Antonio Marcelo Oliveira (Centro Estadual de Educação Profissional Agrícola Augusto Ribas)
- Ingrid Milléo (Centro Estadual de Educação Profissional Agrícola Augusto Ribas)
- Giovanni Gaeski Da Silva (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Sabrina Anne De Lima (Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa)
- Ester Noemi Oliveira De Lima (Colégio Adventista de Ponta Grossa)
- Juliana De Fatima Holm Brim (Colégio Adventista de Ponta Grossa)
- Mailyn Stephanie Bittelbrun Bordignon (Colégio Adventista de Ponta Grossa)
- Sara Lorena Souza De Oliveira (Colégio Adventista de Ponta Grossa)
- Andressa Szved (Colégio Alfa Plus)
- Igor Alberto Dantas Abrami (Colégio Alfa Plus)
- India Nara Binotto (Colégio Alfa Plus)
- Julio Cezar Haluszczak (Colégio Alfa Plus)
- Leonardo Murilo Cordeiro (Colégio Alfa Plus)

- Mariana Andrade De Oliveira Vieira (Colégio Alfa Plus)
- Simone Daiane Piskis (Colégio Alfa Plus)
- Luciano Roque Leite (Colégio Dinâmico)
- Osvaldo Cardoso (Colégio Dinâmico)
- Adnilson Ribeiro Mantuani (Colégio Estadual 31 de Março)
- Roseli Niedjedvski Dambronski (Colégio Estadual 31 de Março)
- Sandra Antunes (Colégio Estadual 31 de Março)
- Luciano Roque Leite (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Tania Beatriz Gabardo (Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio)
- Juliana De Fatima Holm Brim (Colégio Estadual Cívico-militar José Elias da Rocha)
- Katiele Tives Micene (Colégio Estadual Cívico-militar José Elias da Rocha)
- Marcos Mauricio Sachs (Colégio Estadual Cívico-militar José Elias da Rocha)
- Talita Favoretto (Colégio Estadual Cívico-militar José Elias da Rocha)
- Neli Garcia Catossi (Colégio Estadual Cívico-Militar Professor Becker e Silva)
- Alisson Lima Emiliano (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Janaina Fátima Vidal (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Janaina Pontes (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Jean Carlos Dias Gonçalves (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Rebeca Maria Eleutério Da Luz (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Suellen Karina Palhano Iochucki (Colégio Elite Tales de Mileto)
- Vanize Aparecida Noimann (Colégio Elite Tales de Mileto)

- Inês Vitória Nabozny Pinheiro (Colégio Estadual Francisco Pires Machado)
- Angela Aparecida De Oliveira Camargo De Lima (Colégio Estadual Frei Doroteu de Pádua)
- Fabiana Dos Reis (Colégio Estadual Frei Doroteu de Pádua)
- Regiane Aparecida De Auer (Colégio Estadual General Osório)
- Bruna Fernanda Vilhena Da Silva (Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Gustavo Bilobran Neves (Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Henrique Mehl Hellmann Junior (Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga)
- Augusto Rangel Selski (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- José Schimiguel (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Maria Inês Solak De Souza (Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny)
- Débora Laranjeira Colodel (Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki)
- Carla Cristiane Dal-Col De Oliveira (Colégio Estadual Professor Eugênio Malanski)
- Márcia Cristine Ramos Padilha (Colégio Estadual Professor José Gomes do Amaral)
- Prisciane Leticia Silveira Teixeira (Colégio Estadual Professor José Gomes do Amaral)
- Juliana Vogivoda (Colégio Estadual Professora Linda Salamuni Bacila)
- Marina Marra (Colégio Estadual Professora Linda Salamuni Bacila)
- Walter Luiz Kraushaar (Colégio Estadual Professora Linda Salamuni Bacila)
- Igor Alberto Dantas Abrami (Colégio Estadual Professora Sirley Jagas)
- Luiz Fabiano Dos Anjos (Colégio Estadual Profissional Polivalente)

- Amanda Kocinski (Colégio Estadual Profissional Presidente Kennedy)
- Fabieli Capri Michelis Mantuani (Colégio Estadual Profissional Presidente Kennedy)
- Suellen Karina Palhano Iochucki (Colégio Estadual Profissional Professor João Ricardo von Borell du Vernay)
- Edemilson Krupek Bonko (Colégio Estadual Profissional Regente Feijó)
- Marcos Luiz Pan (Colégio Estadual Profissional Regente Feijó)
- Maristel Nascimento (Colégio Estadual Profissional Regente Feijó)
- Tatiane Graniska Heggeler (Colégio Estadual Profissional Regente Feijó)
- Alex Vardenski (Colégio Estual Nossa Senhora da Glória)
- Diego Ferrari Do Vale (Colégio Estual Nossa Senhora da Glória)
- Eva Aparecida Carvalho E Silva (Colégio Estual Nossa Senhora da Glória)
- Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves (Colégio Estual Nossa Senhora das Graças)
- Ane Monize Camargo (Colégio Integração)
- Elena Maria Dombrovski (Colégio Integração)
- Juliana Carla Silva (Colégio Integração)
- Luzybel Turski Bida (Colégio Integração)
- Manuel Lysandro Ferreira (Colégio Integração)
- Mariana Andrade De Oliveira Vieira (Colégio Integração)
- Gabriel Machado (Colégio Lobo Ponta Grossa)
- Adriana Do Carmo Justus (Colégio Marista Pio XII)
- Ana Cláudia Alvarenga (Colégio Marista Pio XII)
- Ana Cristina Delinki Stiirmer (Colégio Marista Pio XII)

- Daiane Aparecida Vosniak (Colégio Marista Pio XII)
- Débora C. B. De Almeida (Colégio Marista Pio XII)
- Diefrei Alves (Colégio Marista Pio XII)
- Fabio Borges (Colégio Marista Pio XII)
- Gilsiane De Fátima Roth (Colégio Marista Pio XII)
- Karoline Garcia Guimarães De Oliveira (Colégio Marista Pio XII)
- Kathleen Caroline Laskos (Colégio Marista Pio XII)
- Letícia De Souza Bartel (Colégio Marista Pio XII)
- Luan Elias Do Nascimento (Colégio Marista Pio XII)
- Maria Marta Antunes (Colégio Marista Pio XII)
- Regina De Souza Alves (Colégio Marista Pio XII)
- Renan Costa (Colégio Marista Pio XII)
- Janaina Pontes (Colégio Marista Santa Mônica)
- Myrelly De Oliveira Ribeiro (Colégio Marista Santa Mônica)
- Vanessa Crislaine Oliveira Lacerda (Colégio Marista Santa Mônica)
- Allana Nayara Woicieschowski (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Fernanda Fetzter Valente (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Fernanda Hennipmann (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Fernando Eiji Fujii (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Gisele Do Rocio Soares Pacheco (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Jonatas Penteado Carneiro (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Lilian Sahd Przytockki (Colégio Pontagrossense Sepam)
- Maira Desirré Buss (Colégio Pontagrossense Sepam)

- Benifrancis Judice Matias (Colégio Positivo Master)
- Bianca Aparecida Holm De Oliveira (Colégio Positivo Master)
- Diefrei Alves (Colégio Positivo Master)
- Fabrício Gonçalves Dos Santos (Colégio Positivo Master)
- Vanderlei Nemitz (Colégio Positivo Master)
- Izauriane Rodrigues Jagas Neves (Colégio Professor Edison Pietrobelli)
- Simone Cristina Wosniak (Colégio Professor Edison Pietrobelli)
- Alessandro Rodrigues De Souza (Colégio Sagrada Família)
- Bruna Elizabeth Adamowicz Da Luz (Colégio Sagrada Família)
- Bruna Gabriely Chila (Colégio Sagrada Família)
- Celia Chaves Pereira Schwab (Colégio Sagrada Família)
- Elyzandra Maia Cano Perreto (Colégio Sagrada Família)
- Fábio Augusto Souto Rosa (Colégio Sagrada Família)
- Flavia Nocera Viechineski (Colégio Sagrada Família)
- Gabriel Machado (Colégio Sagrada Família)
- Priscilla De Paula Milléo (Colégio Sagrada Família)
- Rita Nerli Carvalho (Colégio Sagrada Família)
- Suzane Machado Daer Costa (Colégio Sagrada Família)
- Alessandro Rodrigues De Souza (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Brenda Eduarda Paulovski (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Caroline Kuller (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Gisele Do Rocio Soares Pacheco (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Rita Nerli Carvalho (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)

- Rosilda Aparecida Chociai Scremin (Colégio Sagrada Família Auxiliadora)
- Marina Marra (Colégio Sagrada Família São José)
- Suzane Machado Daer Costa (Colégio Sagrada Família São José)
- Alessandra Mayer De Lima (Colégio Sagrada Família São Zygmunt)
- Angela Aparecida De Oliveira Camargo De Lima (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Evelaine Hilgemberg (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Felipe Menoncin (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Fernanda Do Carmo (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Joel Lopes Da Silva Junior (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Lucas Gicorski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Marina Hazelski (Colégio Sagrado Coração de Jesus)
- Cláudia Danielle De França Otoni (Colégio Sant'Ana)
- Daniel Carlos Beusso (Colégio Sant'Ana)
- Idilcéia Aparecida Hilgemberg Löderer (Colégio Sant'Ana)
- Luciano Ferreira Gomes (Colégio Sant'Ana)
- Luiz Eduardo Krett (Colégio Sant'Ana)
- Paulo Fernando Zaratini Oliveira E Silva (Colégio Sant'Ana)
- Diviane Maria Dias Rodrigues (Colégio SESI Ponta Grossa)
- Edna Aparecida Fagundes Consul (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Líbia Andreia Cosati (Escola Estadual Monteiro Lobato)
- Amanda Kocinski (Escola Bom Pastor)
- Fernanda Martins Dos Santos (Escola Bom Pastor)

- Paulo Henrique Carvalho (Escola Desafio)
- Luciano De Oliveira Gomes (Escola Estadual Jesus Divino Operário)
- Gustavo Bilobran Neves (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Jeanine Alves De Oliveira (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Karla Adriane Boamorte (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Ronilze De Fátima Tozetto (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Rosimara Cristiane Da Silva Maciel Dos Santos (Escola Estadual Medalha Milagrosa)
- Christian Junior Mainardes (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- Valquiria Glinski (Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba)
- Alciony Maricelia Mendes Motta (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Ana Camila De Andrade (Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato)
- Lucineia Volpato (Escola Municipal Catarina Miró)
- Tatiane Kolachinski Barbosa (Escola Municipal Catarina Miró)
- Caroline Regailo Do Amaral (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- Dayane De Almeida (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- Juliana Beatriz Dimbarre (Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci)
- Karolyn Raphaela Pereira Ribas (Escola Municipal Deodoro Alves Quintiliano)
- Gleicy Maxwell Wenzel (Escola Municipal Deputado Mario Braga Ramos)
- Valquiria Da Silva Aleixo (Escola Municipal Deputado Mario Braga Ramos)
- Angelita Scremim De Godoi (Escola Municipal Doutor Carlos Ribeiro de Macedo)

- Elaine Zahailo (Escola Municipal Doutor Carlos Ribeiro de Macedo)
- Juliana Mayer Primor (Escola Municipal Doutor Leopoldo Pinto Rosas)
- Cristiane Kudzia (Escola Municipal Felício Francisquiny)
- Renata Tullio (Escola Municipal Felício Francisquiny)
- Flavia Corina Carvalho Vitkoski (Escola Municipal Frederico Constant Degraf)
- Cristina Machado Mikowski (Escola Municipal Frei Elias Zulian)
- Shirley Batista De Camargo (Escola Municipal General Aldo Bonde)
- Maria Elisabete Mann (Escola Municipal Humberto Cordeiro)
- Gleoceia Rodrigues (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Heloíse Bonfim Brandt Zadra (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Simone Starke (Escola Municipal João Maria Cruz)
- Ariane Galvão Knapp (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Viviana Szczymczyn (Escola Municipal Ludovico Antonio Egg)
- Adriane Gaioski (Escola Municipal Padre José Bugatti)
- Fabiane Carneiro Gomes Bueno (Escola Municipal Prefeito Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Jucélia Machado Benicio (Escola Municipal Prefeito Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães)
- Pamela Rodrigues (Escola Municipal Prefeito Doutor Amdeu Puppi)
- Vanessa Ranck De Paula (Escola Municipal Prefeito Doutor Amdeu Puppi)
- Jamille Misaky Valenga (Escola Municipal Prefeito Doutor Elyseu de Campo Mello)
- Aline Fernanda Bahnet (Escola Municipal Prefeito Doutor Othon Mader)

- Ana Maria Da Silva (Escola Municipal Prefeito Doutor Plauto Miró Guimarães)
- Maria Isabel De Andrade (Escola Municipal Prefeito Doutor Plauto Miró Guimarães)
- Celia Lima Emiliano (Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)
- Iara Cristina Mendes Faria Costa (Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela)
- Marilís Sibebe Dos Santos (Escola Municipal Prefeito Heitor Ditzel)
- Angélica Ribeiro De Farias Alves (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Cintia Daiane Da Silva (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Jessica Lorena Santanna (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Nathaly Lopes Obinger (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Valdineia Hilgemberg (Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vilela)
- Solange Aparecida Schwab (Escola Municipal Prefeito José Hoffmann)
- Jaqueline Dos Santos (Escola Municipal Prefeito Major Manoel Vicente Bitencourt)
- Adriana Scheibel Golombieski (Escola Municipal Prefeito Theodoro Batista Rosas)
- Eliane Horst (Escola Municipal Professor Aristeu Costa Pinto)
- Claudia Elisabete Rudnik (Escola Municipal Professor Edgar Zanoni)
- Carla Elizabeth Galdino Chaikouski (Escola Municipal Professor Faris Antonio Michael)

- Sueli Aparecida Biuk (Escola Municipal Professor Faris Antonio Michaelaele)
- Talita Lahana Paes (Escola Municipal Professor Jorge Dechandt)
- Cristiane Martins Hilgemberg (Escola Municipal Professor Kamal Tebcherani)
- Gisele Ferraz De Mello (Escola Municipal Professor Paulo Grott)
- Marli Teresinha Mattos Meira (Escola Municipal Professor Paulo Grott)
- Andréia Lúcia Muler (Escola Municipal Professor Placido Cardon)
- Marizete Presotto (Escola Municipal Professor Sebastião dos Santos e Silva)
- Angelica Gomes Ribas De Castro (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)
- Eliane Cristina Da Silva (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)
- Sabrina Bogos Dos Santos (Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma)
- Jéssica Honiski Moraes (Escola Municipal Professora Ageronidas Stadler)
- Fabiane Fabri (Escola Municipal Professora Ana de Barros Holzmann)
- Juliana Aparecida Kuhn (Escola Municipal Professora Ana de Barros Holzmann)
- Eliane Cristina De Matos (Escola Municipal Professora Braulina Carneiro de Quadros)
- Solange Evan Maria Malanczen (Escola Municipal Professora Haydee Ferreira de Oliveira)
- Isabelly Sabrinny Zamiliam (Escola Municipal Professora Idalia Goes)
- Marlon Cristiano Alves (Escola Municipal Professora Lúcia Pacher)
- Nilton José Chila (Escola Municipal Professora Lúcia Pacher)
- Maycon Hryniewicz De Almeida (Escola Municipal Professora Maria Elvira Justus Schimdt)

- Maria Renata Leniar (Escola Municipal Professora Minervina Farnca Scudelareck)
- Dione Woiciechowski Lopes (Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Emilyn Diniz (Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Lorena Valentine Jesus De Andrade Brusamarello (Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Sonia Maria Scheibel De Lucena (Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira)
- Mara Beatriz Chaves (Escola Municipal Professora Ruth Holzmann Ribas)
- Angela Garbuio Ferreira (Escola Municipal Professora Zahira Catta Preta Mello)
- Eliana Rosso (Escola Municipal Professora Zair Santos Nascimento)
- Isabela Aparecida Lopes Ferreira (Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Scnirmann)
- Aliane Nunes De Faria Alves (Escola Municipal Professora Zila Bernadete Bach)
- Rosangela Dos Santos Spitzner (Escola Municipal Professora Zila Bernadete Bach)
- Isabela Schmidt Penteado (Escola Municipal São Jorge)
- Ana Lúcia Monteiro (Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins)
- Marislei Zaremba Martins (Escola Municipal Zanoni Rogoski)
- Maristela Bueno França (Escola Municipal Zanoni Rogoski)
- Wilson José Machado Gomes (Escola Princesps)
- Angelis Haas (Escola Santa Terezinha)
- Fernanda Viezzer Licheski (Escola Santa Terezinha)
- Izacelis Cristine Ferreira Dos Santos (Escola Santa Terezinha)

- Leticia Cercal Tozetto (Escola Santa Terezinha)
- Luana Caroline Reina Will (Escola Santa Terezinha)
- Marcela Dos Santos (Escola Santa Terezinha)
- Ariane Cristine Demetrenchen (Colégio Santo Ângelo)
- Arnold Vinicius Prado Souza (Colégio Santo Ângelo)
- Gisele Do Prado Santolin (Colégio Santo Ângelo)
- Karine Luiza Ranchil (Colégio Santo Ângelo)
- Lizandra Diniz (Colégio Santo Ângelo)
- Maria Eliete Francischinelli Freitas (Colégio Santo Ângelo)
- Nathalia Hidalgo Dos Reis Pacheco (Colégio Santo Ângelo)
- Beatriz Fernandes Magalhães (Escola São Jorge de Ponta Grossa)
- Gisely Fóss Bonato (Escola São Jorge de Ponta Grossa)
- Vanessa Crislaine Oliveira Lacerda (Escola São Jorge de Ponta Grossa)
- Gustavo Bilobran Neves (Instituto Federal do Paraná - Campus Ponta Grossa)
- João Do Carmo Lopes Gonçalves (Instituto Federal do Paraná - Campus Ponta Grossa)
- Mateus Bazan Peters Querne (Instituto Federal do Paraná - Campus Ponta Grossa)
- Rubens Edgard Furstenberger Filho (Instituto de Educação Estadual Professor Cesar Pietro Martinez)

Escolas Participantes

Abaixo consta a relação de todas as escolas participantes da 10ª OPMat no ano de 2024:

CAIC Reitor Álvaro Augusto Cunha Rocha
Centro Estadual de Educação Profissional Agrícola Augusto Ribas
Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa
Colégio Adventista de Ponta Grossa
Colégio Alfa Plus
Colégio Cescage
Colégio Dinâmico
Colégio Elite Tales de Mileto
Colégio Estadual 31 de Março
Colégio Estadual Brasílio Antunes da Silva
Colégio Estadual Cívico-Militar General Antônio Sampaio
Colégio Estadual Cívico-militar José Elias da Rocha
Colégio Estadual Cívico-Militar Professor Becker e Silva
Colégio Estadual Dorah Gomes Daitschman
Colégio Estadual Doutor Monhoz da Rocha
Colégio Estadual Francisco Pires Machado
Colégio Estadual Frei Doroteu de Pádua
Colégio Estadual General Osório
Colégio Estadual Maestro Bento Mossurunga
Colégio Estadual Padre Arnaldo Jansen
Colégio Estadual Padre Carlos Zelesny
Colégio Estadual Padre Pedro Grzelczaki
Colégio Estadual Professor Colares
Colégio Estadual Professor Eugênio Malanski
Colégio Estadual Professor José Gomes do Amaral
Colégio Estadual Professora Linda Salamuni Bacila
Colégio Estadual Professora Sirley Jagas
Colégio Estadual Profissional Polivalente
Colégio Estadual Profissional Presidente Kennedy
Colégio Estadual Profissional Professor
Colégio Estadual Profissional Professor João Ricardo von Borell du Vernay
Colégio Estadual Profissional Professor Meneleu de Almeida Torres
Colégio Estadual Profissional Regente Feijó

Colégio Estadual Nossa Senhora da Glória
Colégio Estadual Nossa Senhora das Graças
Colégio Integração
Colégio Lobo Ponta Grossa
Colégio Marista Pio XII
Colégio Marista Santa Mônica
Colégio Pontagrossense Sepam
Colégio Positivo Master
Colégio Professor Amálio Pinheiro
Colégio Professor Edison Pietrobelli
Colégio Sagrada Família
Colégio Sagrada Família Auxiliadora
Colégio Sagrada Família São José
Colégio Sagrada Família São Zygmunt
Colégio Sagrado Coração de Jesus
Colégio Sant'Ana
Colégio Santo Ângelo
Colégio Sesi Ponta Grossa
Escola Estadual Monteiro Lobato
Escola Bom Pastor
Escola Desafio
Escola Estadual Jesus Divino Operário
Escola Estadual Medalha Milagrosa
Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba
Escola Municipal Alda dos Santos Rebonato
Escola Municipal Catarina Miró
Escola Municipal Cyrillo Domingos Ricci
Escola Municipal Deodoro Alves Quintiliano
Escola Municipal Deputado Djalma de Almeida Cesar
Escola Municipal Deputado Mario Braga Ramos
Escola Municipal Doutor Carlos Ribeiro de Macedo
Escola Municipal Doutor Edgar Sponholz
Escola Municipal Doutor Leopoldo Pinto Rosas
Escola Municipal Doutor Raul Pinheiro Machado
Escola Municipal Felício Francisquiny
Escola Municipal Frederico Constant Degraf
Escola Municipal Frei Elias Zulian

Escola Municipal General Aldo Bonde
Escola Municipal Glacy Camargo Secco
Escola Municipal Guaracy Paraná Vieira
Escola Municipal Humberto Cordeiro
Escola Municipal João Maria Cruz
Escola Municipal Ludovico Antonio Egg
Escola Municipal Padre José Bugatti
Escola Municipal Prefeito Coronel Cláudio Gonçalves Guimarães
Escola Municipal Prefeito Doutor Amdeu Puppi
Escola Municipal Prefeito Doutor Elyseu de Campo Mello
Escola Municipal Prefeito Doutor Othon Mader
Escola Municipal Prefeito Doutor Plauto Miró Guimarães
Escola Municipal Prefeito Engenheiro Eurico Batista Rosas
Escola Municipal Prefeito Ernesto Guimarães Vilela
Escola Municipal Prefeito Heitor Ditzel
Escola Municipal Prefeito José Bonifácio Guimarães Vilela
Escola Municipal Prefeito José Hoffmann
Escola Municipal Prefeito Major Manoel Vicente Bittencourt
Escola Municipal Prefeito Theodoro Batista Rosas
Escola Municipal Professor Aristeu Costa Pinto
Escola Municipal Professor Edgar Zanoni
Escola Municipal Professor Eloy Avrechak
Escola Municipal Professor Faris Antonio Michaelle
Escola Municipal Professor Ivon Zardo
Escola Municipal Professor Jorge Dechandt
Escola Municipal Professor Kamal Tebcherani
Escola Municipal Professor Nelson Pereira Jorge
Escola Municipal Professor Osni Vilaca Mongruel
Escola Municipal Professor Paulo Grott
Escola Municipal Professor Plácido Cardon
Escola Municipal Professor Rubens Edgard Furstenberger
Escola Municipal Professor Sebastião dos Santo e Silva
Escola Municipal Professora Adelaide Thomé Chamma
Escola Municipal Professora Ageronidas Stadler
Escola Municipal Professora Ana de Barros Holzmann
Escola Municipal Professora Armida Frare Gracia
Escola Municipal Professora Braulina Carneiro de Quadros

Escola Municipal Professora Dércia dos Carmo Noviski
Escola Municipal Professora Eclea dos Passos Horn
Escola Municipal Professora Guitil Federmann
Escola Municipal Professora Haydee Ferreira de Oliveira
Escola Municipal Professora Idalia Goes
Escola Municipal Professora Judith Macedo de Silveira
Escola Municipal Professora Kazuko Inoue
Escola Municipal Professora Loise Foltran de Lara
Escola Municipal Professora Lúcia Pacher
Escola Municipal Professora Maria Antonia de Andrade
Escola Municipal Professora Maria Coutin Riesemberg
Escola Municipal Professora Maria Elvira Justus Schimidt
Escola Municipal Professora Maria Eulina Santos Scherena
Escola Municipal Professora Maria Laura Pereira
Escola Municipal Professora Maria Vitória Braga Ramos
Escola Municipal Professora Marly Cecilia Camargo Chiaftela
Escola Municipal Professora Marta Filipkowski de Lima
Escola Municipal Professora Minervina Farnca Scudelareck
Escola Municipal Professora Otacília Hasselmann de Oliveira
Escola Municipal Professora Ruth Holzmänn Ribas
Escola Municipal Professora Zahira Catta Preta Mello
Escola Municipal Professora Zair Santos Nascimento
Escola Municipal Professora Zeneida de Freitas Scnirmann
Escola Municipal Professora Zila Bernadete Bach
Escola Municipal Protazio Scheifer
Escola Municipal São Jorge
Escola Municipal Senador Flávio Carvalho Guimarães
Escola Municipal Vereador Orival Carneiro Martins
Escola Municipal Zanoni Rogoski
Escola Príncipeps
Escola Rosazul
Escola Santa Terezinha
Escola São Jorge de Ponta Grossa
Instituto Federal do Paraná - Campus Ponta Grossa
Instituto de Educação Estadual Professor Cesar Pietro Martinez

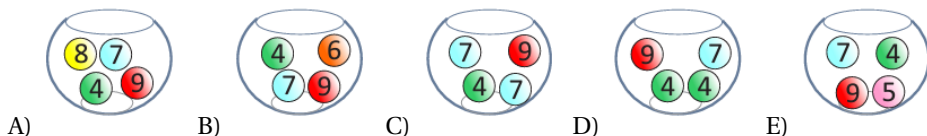
Nível Mirim

Prova Objetiva

PROBLEMA 1. NA CASA DO LUCAS, A DIFERENÇA DOS ALGARISMOS QUE FORMAM O NÚMERO DA SUA CASA É IGUAL A 4. EM QUAL CASA LUCAS MORA?



PROBLEMA 2. CADA JARRA CONTÉM QUATRO BOLAS NUMERADAS, COMO MOSTRAM AS FIGURAS. EM QUE JARRA É MENOR A SOMA DOS QUATRO NÚMEROS DAS BOLAS?



PROBLEMA 3. VOVÔ FOI AO QUINTAL E CHAMOU TODAS AS SUAS GALINHAS E O SEU CACHORRO. UM TOTAL DE 26 PERNAS CORREU EM SUA DIREÇÃO. QUANTAS GALINHAS O VOVÔ TEM?

- A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15

PROBLEMA 4. BRUNA E TIAGO ESTÃO NUMA FILA. BRUNA SABE QUE HÁ 5 PESSOAS NA FRENTE DELA E TIAGO SABE QUE HÁ UM TOTAL DE 13 PESSOAS NESTA FILA. SE BRUNA E TIAGO ESTÃO JUNTOS, E BRUNA ESTÁ NA FRENTE DE TIAGO, QUANTAS PESSOAS HÁ ATRÁS DE TIAGO?

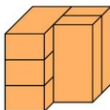
- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

PROBLEMA 5. TALITA E JOÃO BRINCAM DE PAR OU ÍMPAR. CADA UM MOSTRA UMA QUANTIDADE DE DEDOS DE UMA DAS MÃOS E CONTAM O TOTAL DE DEDOS MOSTRADOS. TALITA ESCOLHEU ÍMPAR E MOSTROU 3 DEDOS, COMO NA FIGURA ABAIXO. DE QUANTAS MANEIRAS JOÃO PODE MOSTRAR SUA MÃO E VENCER A BRINCADEIRA?



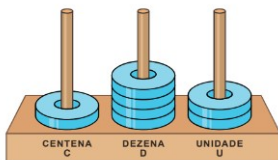
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

PROBLEMA 6. A FIGURA ABAIXO MOSTRA 5 TIJOLOS IGUAIS. QUANTOS TIJOLOS ESTÃO ENCOSTADOS EM EXATAMENTE 4 OUTROS TIJOLOS?



- A) NENHUM B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

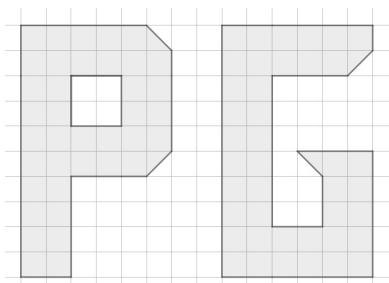
PROBLEMA 7. O ÁBACO ABAIXO MOSTRA O NÚMERO 142.



MANUELA RETIROU UM DISCO DO PINO DAS DEZENAS E O COLOCOU NO PINO DAS CENTENAS. A SEGUIR, ELA RETIROU UM DISCO DO PINO DAS UNIDADES E O COLOCOU NO PINO DAS DEZENAS. QUAL NÚMERO O ÁBACO PASSOU A MOSTRAR?

- A) 124 B) 232 C) 241 D) 251 E) 322

PROBLEMA 8. PEDRINHO HOMENAGEOU A CIDADE DE PONTA GROSSA FAZENDO O DESENHO REPRESENTADO ABAIXO:



CADA QUADRADINHO DO PAPEL QUADRICULADO TEM 1 cm^2 DE ÁREA. QUAL É A SOMA DAS ÁREAS DAS LETRAS **P** E **G** QUE FORAM PINTADAS POR PEDRINHO?

- A) 39 cm^2 B) 42 cm^2 C) 61 cm^2 D) 72 cm^2 E) 81 cm^2

Gabarito da Prova Objetiva

1	2	3	4	5	6	7	8
A	D	C	C	C	D	C	E

Prova Dissertativa

PROBLEMA 1. JOÃO COMEÇOU A MONTAR UMA FILA COM FIGURAS GEOMÉTRICAS. ESSAS SÃO AS 9 PRIMEIRAS FIGURAS:



- A) QUAIS SÃO AS PRÓXIMAS 2 FIGURAS DA FILA DE JOÃO?
- B) JOÃO RESOLVEU DESENHAR 30 FIGURINHAS. QUAL A ÚLTIMA FIGURA QUE ELE DESENHOU?
- C) JOÃO RESOLVEU DESENHAR 101 FIGURAS. QUAL A PENÚLTIMA FIGURA QUE ELE DESENHOU?

PROBLEMA 2. ALINE ESCONDEU NÚMEROS ATRÁS DAS FORMAS ILUSTRADAS NA FIGURA ABAIXO

$$\triangle + 8 = 17$$

$$\square - \triangle = 3$$

$$\bigcirc + \bigcirc + \square = 20$$

- A) QUAL O NÚMERO ESCONDIDO ATRÁS DO TRIÂNGULO?
- B) QUAL O NÚMERO ESCONDIDO ATRÁS DO CÍRCULO?
- C) QUAL É O RESULTADO DE $\left(\triangle + \square \right) \div \left(\bigcirc - 1 \right)$?

Gabarito da Prova Dissertativa

PROBLEMA 1. (RESOLUÇÃO DE LAURA HERNANDES - COLÉGIO ADVENTISTA DE PONTA GROSSA)

- A) AS PRÓXIMAS 2 FIGURAS SÃO CÍRCULO E TRIÂNGULO, POIS A ORDEM É: QUADRADO, CÍRCULO, TRIÂNGULO ESCURO E TRIÂNGULO CLARO.
- B) UM CÍRCULO, PARA DESCOBRIR CONTAMOS AS FIGURAS NA ORDEM DO PADRÃO QUE APARECEM (QUADRADO, CÍRCULO, TRIÂNGULO ESCURO E TRIÂNGULO CLARO) ATÉ CHEGAR EM 30 FORMAS GEOMÉTRICAS.
- C) UM TRIÂNGULO, O CICLO EM QUE AS FIGURAS APARECEM É DE QUATRO EM QUATRO FIGURAS GEOMÉTRICAS. CALCULAMOS:

$$101 \div 4 = 25, \text{ COM RESTO } 1$$

ENTÃO, O RESTO 1, REPRESENTA A 101ª FIGURA, QUE É UM QUADRADO. MAS O ENUNCIADO PEDE A PENÚLTIMA FIGURA DESENHADA, SE A ÚLTIMA FIGURA QUE DESENHOU FOI O QUADRADO, ENTÃO A PENÚLTIMA FOI UM TRIÂNGULO CLARO.

PROBLEMA 2. (RESOLUÇÃO DE MARIA LUÍSA NOGUEIRA HASS - COLÉGIO ALFA PLUS)

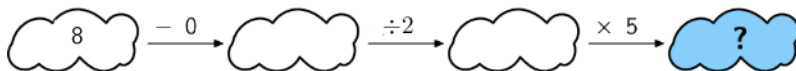
- A) O NÚMERO ESCONDIDO ATRÁS DO TRIÂNGULO É 9, POIS $9 + 8 = 17$ (OU PODEMOS USAR A OPERAÇÃO INVERSA DA ADIÇÃO: $17 - 8 = 9$). ALÉM DISSO SABEMOS QUE ATRÁS DO QUADRADO TEREMOS 12, POIS $12 - 9 = 3$.
- B) DA ALTERNATIVA ANTERIOR SABEMOS QUE O NÚMERO ESCONDIDO ATRÁS DO QUADRADO É O 12. ALÉM DISSO, SOMANDO OS DOIS CÍRCULOS E UM QUADRADO, ENCONTRAMOS $8 + 12 = 20$, ISSO SIGNIFICA QUE DOIS CÍRCULOS VALEM 8. LOGO, CADA CÍRCULO QUE CAROLINE ESCONDEU VALE $8 \div 2 = 4$

- C) COMO ATRÁS DO TRIÂNGULO TEMOS O 9, DO QUADRADO TEMOS O 12, DO CÍRCULO TEMOS O 4, NOSSA EXPRESSÃO TEM A FORMA:

$$(9 + 12) \div (4 - 1) = 21 \div 3 = 7.$$

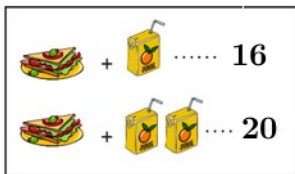
Nível Júnior**Prova Objetiva**

Problema 1. Qual número deve aparecer no sinal de interrogação?



- a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

Problema 2. Na cantina da escola, um sanduíche e um suco natural custam 16 reais, e um sanduíche e dois sucos curam 20 reais. Quantos reais custa o suco?



- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

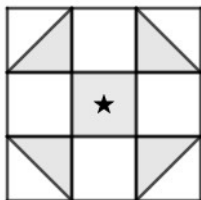
Problema 3. Camila escreveu em seu caderno todos os números de 2010 a 2024, incluindo esses dois números. Quantas vezes Camila escreveu o algarismo zero?

- a) 15 b) 17 c) 18 d) 19 e) 21

Problema 4. Diana é mais velha que Bianca. Bianca é mais velha que Ester. Ester é mais nova que Amanda. Amanda é mais nova que Bianca. Bianca é mais nova que Carol. Qual é a mais velha entre essas 5 meninas?

- a) Amanda b) Bianca c) Carol d) Diana e) Ester

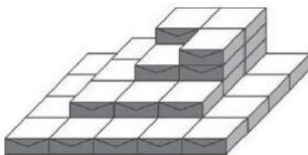
Problema 5. O quadrado da figura abaixo foi dividido em nove quadradinhos iguais.



A área do quadradinho pintado e indicado pela ★ mede 4 cm^2 . Quanto mede a área que não foi pintada?

- a) 12 cm^2 b) 15 cm^2 c) 16 cm^2 d) 24 cm^2 e) 32 cm^2

Problema 6. No estoque de uma loja haiva uma pilha de pacotes sulfite de 500 folhas como mostra a figura. Quantos pacotes de folha há nessa pilha?



- a) 1 b) 6 c) 12 d) 24 e) 36

Gabarito da Prova Objetiva

1	2	3	4	5	6
d	c	b	b	d	c

Prova Dissertativa

Problema 1. João começou a montar uma fila com figuras geométricas. Essas são as 9 primeiras figuras:



- a) Quais são as próximas 2 figuras da fila de João?
- b) João resolveu desenhar 30 figuras. Qual a última figura que ele desenhou?
- c) João resolveu desenhar 101 figuras. Qual a penúltima figura que ele desenhou?

Problema 2. Sem usar o algarismo 0, Pedrinho escreveu todos os números de três algarismos diferentes nos quais o algarismo do meio é maior do que os outros dois.

- a) Se pedrinho resolveu fixar o algarismo do meio em 3, quais são os números deste tipo que ele escreveu?
- b) Se Pedrinho resolveu fixar o algarismo do meio em 5, quantos números deste tipo ele escreveu?
- c) De uma forma geral, quantos números deste tipo pedrinho escreveu?

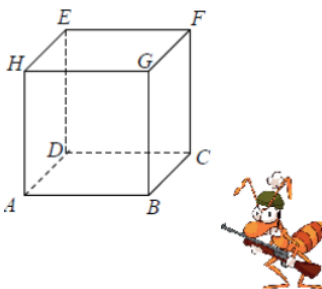
Problema 3. Observe o anúncio da sorveteria na figura abaixo e responda:


$$5 \text{ sorvetes} + 3 \text{ copos} = 21,00$$


$$3 \text{ sorvetes} + 1 \text{ copo} = 11,00$$

- a) Qual é o preço de cada sorvete de casquinha?
- b) Qual é o preço de cada copo de suco?

Problema 4. A formiga soldado está no ponto **B** e precisa chegar no ponto **E**.



- a) De quantas maneiras diferentes essa formiga pode fazer esse trajeto andando apenas sobre as arestas e fazendo sempre o menor caminho possível? Justifique.
- b) De quantas maneiras diferentes essa formiga pode fazer esse trajeto andando apenas sobre as arestas, sem passar pela mesma aresta, fazendo sempre o maior caminho possível? Justifique.
- c) De quantas maneiras diferentes essa formiga pode fazer esse trajeto andando apenas sobre as arestas, sem passar pela mesma aresta? Justifique.

Gabarito da Prova Dissertativa

Problema 1. *(Resolução de Ágatha Regina de Lima Paredes - Escola Municipal Profa. Alda dos Santos Rebonato)*

- a) As próximas duas figuras do João, são o círculo e o triângulo escuro.
Eu observei a sequência, e vi que a última figura geométrica (até onde João escreveu) é o quadrado. Então voltei ao início e percebi que depois do quadrado vem o círculo e o triângulo escuro. Sendo essa, minha resposta final.
- b) A última figura desenhada por João, foi o círculo.
Primeiro enumerei as figuras que eu já tinha, então fui observando a sequência, desenhando e enumerando até chegar ao número 30 da sequência, onde era o círculo.
- c) A penúltima figura desenhada pelo João, foi o triângulo claro.
Desta vez como é um número maior, eu excluí o último quadrado e deixei o triângulo claro que era o último da sequência. então comecei a contar do 8 ao 101 na sequência. Descobri então que o número 101 é o número respectivo do quadrado. Sendo assim, a penúltima figura é o triângulo claro.

Problema 2. *(Resolução da Pauta)*

- a) Pedrinho escreveu os números 132 e 231.
- b) Sabemos que existem 4 algarismo menores que 5, que satisfazem tal enunciado. Pode-se resolver de duas formas:
Utilizando ideias de Permutação, temos 4 algarismos que podem ocupar a casa das centenas, e por consequência, 3 algarismos que podem ocupar a casa das unidades. Logo são: $4 \times 3 = 12$ números que podemos escrever, sendo 5 o algarismo do meio.
Listando os números: os números que podem ser formados são: 152, 153, 154, 251, 253, 254, 351, 352, 354, 451, 452, 453. Então vemos que podem ser construídos 12 números seguindo o enunciado.

- c) Primeiro, seguindo o proposto nos enunciados das outras alternativas, podemos dividir este problema, escolhendo os algarismos do meio, e permutando os demais.

$$\underline{\quad 3 \quad} \implies 2 \times 1 = 2$$

$$\underline{\quad 4 \quad} \implies 3 \times 2 = 12$$

$$\underline{\quad 5 \quad} \implies 4 \times 3 = 20$$

$$\underline{\quad 6 \quad} \implies 5 \times 4 = 30$$

$$\underline{\quad 7 \quad} \implies 6 \times 5 = 42$$

$$\underline{\quad 8 \quad} \implies 7 \times 6 = 56$$

$$\underline{\quad 9 \quad} \implies 8 \times 7 = 72$$

Somando todas as possibilidades, descobrimos que podem ser escritos 234 números que satisfaçam o enunciado.

Problema 3. *(Resolução de Samuel Ionak de Carvalho - Escola Municipal Profa. Adelaide Thomé Chamma)*

- a) A casquinha custa R\$ 3,00. Pois 3 sorvetes e 1 copo de R\$ 2,00 custam no total R\$ 11,00 e 5 sorvetes mais 3 sucos de R\$ 2,00 custam ao todo R\$ 21,00.

$$3 \times 2 = 6$$

$$5 \times 3 = 15$$

$$15 + 6 = 21$$

$$\text{🍦} = 3,00$$

$$\text{🥛} = 2,00$$

- b) O copo de suco custa R\$ 2,00, pois se 1 sorvete é R\$ 3,00, então 3 sorvetes seriam R\$ 9,00 e para chegar aos R\$ 11,00 um suco precisa custar R\$ 2,00.

Problema 4. *(Resolução da pauta)*

- a) Podemos perceber que o caminho mínimo ocorre com a utilização de 3 arestas (ou 4 pontos). Além disso analisamos as possibilidades de escolha de caminho, partindo de B a formiguinha pode escolher entre C, G ou A, e assim sucessivamente, até encontrar o ponto E (utilizando apenas 4 pontos no total). São os pontos dos caminhos:

$$BCFE, BCDE, BGHE, BGFE, BAHE, BADE$$

Logo descobrimos que ela tem 6 maneiras de chegar até o ponto E, com o menor caminho possível.

- b) Seguindo a mesma ideia da resposta anterior, mas o números de pontos que formam o maior caminho é aquele que possui 8 pontos. São os pontos dos maiores caminhos:

$$BGFCDAHE, BGHADCFE, BCFGHADE,$$
$$BCDAHGFE, BADCFGHE, BAHGFCDE$$

Logo descobrimos que ela tem 6 maneiras de chegar até o ponto E, com o maior caminho possível.

- c) Sabendo que o menor caminho é aquele com 4 pontos, e o maior com 8 pontos; precisamos apenas analisar as possibilidades com 5, 6 e 7 pontos. Mas não é possível chegar ao destino com números ímpares pontos. Logo precisamos verificar apenas os caminhos com 6 pontos, desenvolvendo:

$$BGFCDE, BGHADE, BCFGHE, BCDAHE, BADCFE, BAHGFE$$

Logo descobrimos que ela tem 6 maneiras de chegar até o ponto E, com o caminho de "tamanho 6 pontos".

Somando todos os resultados anteriores, temos: 18 maneiras diferentes de fazer o trajeto.

Nível 1

Primeira Fase

Problema 1. Os camelos são um dos animais resistentes a regiões com altas temperaturas. Considerando que o camelo KAKA quando não está dormindo, bebe 12 litros de água por hora. Se ontem KAKA dormiu 17 horas, quantos litros de água ele bebeu?

- a) 84 litros b) 86 litros c) 91 litros d) 72 litros e) 85 litros

Problema 2. Bárbara comprou um saco de laranjas na feira. Ela deu metade das laranjas para Amanda. Depois, ela deu à Carla 3 laranjas, ficando com 4 laranjas para si mesma. Quantas laranjas Bárbara comprou?

- a) 10 b) 14 c) 16 d) 20 e) 24

Problema 3. A soma de cinco inteiros pares e consecutivos é quatro unidades menor do que a soma dos oito primeiros inteiros positivos ímpares. Então o menor dos inteiros pares é:

- a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

Problema 4. Alex e Bruno compararam o dinheiro que tinham inicialmente e nesse momento, perceberam que Alex tinha 35 reais a mais do que Bruno. No outro dia compararam novamente e, sabendo que Alex ganhou 12 reais e Bruno gastou 6 reais, podemos afirmar que a diferença entre a quantidade de dinheiro de Alex e Bruno foi de:

- a) 23 reais b) 29 reais c) 41 reais d) 47 reais e) 53 reais

Problema 5. Alice saiu de sua casa para um passeio de bicicleta até a casa de sua amiga. Percorreu um terço do trajeto e parou para comer uma fruta, neste momento ainda faltava 1 quilômetro para a metade do caminho. Quantos quilômetros Alice percorreu no trajeto todo, desde que saiu de sua casa até a casa de sua amiga?

- a) 9 km b) 4 km c) 5 km d) 6 km e) 3 km

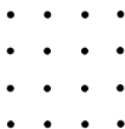
Problema 6. Marquito escreveu todos os números de 1 a 103 em uma linha e contou corretamente a quantidade de algarismos 2. Quantos algarismos 2 ele encontrou?

- a) 18 b) 20 c) 22 d) 19 e) 21

Problema 7. Quantos números entre 1000 e 2024 tem somente algarismos ímpares?

- a) 100 b) 125 c) 150 d) 185 e) 225

Problema 8. Quantos quadrados podem ser construídos com vértices nos pontos da figura?



- a) 18 b) 14 c) 20 d) 12 e) 15

Problema 9. Uma loja de calçados tem estantes, cada uma delas com 3 prateleiras. Numa dessas estantes foram colocados um total de nove pares de sapatos. Dois pares de sapatos não foram colocados abaixo de qualquer outro par. Quatro destes pares de sapatos não estão acima de qualquer outro. Então as quantidades de pares de sapatos que estão, de baixo para cima, na 1ª prateleira, na 2ª prateleira e na 3ª prateleira, respectivamente, são:

- a) 4, 3, 2. b) 2, 4, 3. c) 4, 2, 3. d) 3, 2, 4. e) 3, 4, 2.

Problema 10. O matemático aplicado Aldo tem três amigos também matemáticos: Benito, Caetano e Davi. Um dos amigos é analista, o outro geômetra e outro é topólogo. Sabe-se que:

- I. ou Benito é geômetra ou Caetano é geômetra;
II. ou Benito é analista ou Davi é topólogo;

III. ou Davi é analista ou Caetano é analista.

Então as especialidades de Benito, de Caetano e de Davi são, respectivamente:

- a) Analista, geômetra e topólogo.
- b) Analista, topólogo e geômetra.
- c) Topólogo, geômetra e analista.
- d) Geômetra, analista e topólogo.
- e) Geômetra, topólogo e analista.

Problema 11. Em uma caixa há 5 bolas brancas, 3 bolas pretas e 6 bolas azuis. Qual o número mínimo de bolas que deve-se retirar da caixa, sem olhar, para obter, com certeza, duas bolas da mesma cor?

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

Problema 12. Pedro, Danilo, Fernando, Eliezer e Rafael disputaram uma prova de atletismo. Considere que:

- Rafael chegou antes de Pedro e Fernando;
- Eliezer chegou antes de Rafael;
- Danilo chegou depois de Fernando;
- Danilo não foi o último a chegar.

Respectivamente, quem chegou na 1ª, 2ª e 3ª posições?

- a) Eliezer, Rafael e Pedro.
- b) Eliezer, Fernando e Pedro.
- c) Eliezer, Rafael e Fernando.
- d) Fernando, Eliezer e Rafael.
- e) Danilo, Fernando e Pedro.

Problema 13. Dado um número de três algarismos e considerando que o produto dos seus algarismos é 30, assinale a alternativa que representa a maior soma desses algarismos.

- a) 12 b) 14 c) 18 d) 10 e) 13

Problema 14. Bianca e Augusto estão sentados diante de uma mesa, sobre a qual há nove cartões numerados de 1 a 9 virados para baixo. Bianca escolhe três cartões com números ímpares cuja soma é 9. Augusto escolhe três cartões cuja soma dos números é 24. Qual é o produto dos números dos três cartões deixados sobre a mesa?

- a) 65 b) 66 c) 24 d) 84 e) 48

Problema 15. Quando o 173° inteiro positivo par é subtraído do 238° inteiro positivo ímpar, encontra-se o número:

- a) 65 b) 66 c) 129 d) 130 e) 131

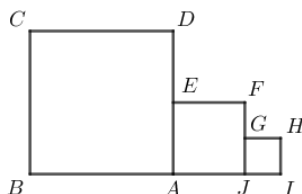
Problema 16. Considerando a sequência infinita

$10OPMataMPO010OPMataMPO010OPMat\dots$,

o elemento que está na posição 2024^a é:

- a) P b) O c) M d) t e) a

Problema 17. Na figura abaixo, os quadrados $ABCD$, $AEFJ$ e $GHIJ$ são tais que E e G são pontos médios dos lados AD e FJ , respectivamente. Se o perímetro do quadrado $ABCD$ é 8 cm, então o perímetro da figura $ABCDEFGH IJA$, em centímetros, é:



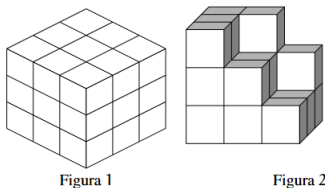
- a) $\frac{21}{4}$ b) 9 c) 11 d) $\frac{21}{2}$ e) 14

Problema 18. Em graus, qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando ele marca 10 horas e 30 minutos?

- a) 105° b) 120° c) 150° d) 135° e) 165°

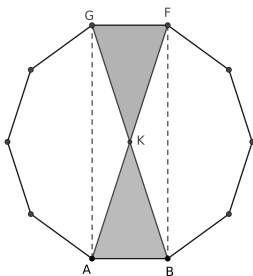
Problema 19. Pedro estava brincando com cubinhos. Quando decidiu montar um objeto, conforme a Figura 1; entretanto acabaram os seus cubinhos e o objeto ficou incompleto como na Figura 2.

Qual é a quantidade de cubinhos que faltam no objeto da Figura 2, para construir o objeto da Figura 1?



- a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Problema 20. Sabendo que o decágono é regular, que $\overline{AB} = 2$ e $\overline{AG} = 2h$, assinale o valor que representa a área da região hachurada na figura abaixo.



- a) $2h$ b) h^2 c) h d) $2 + h$ e) $\frac{h}{2}$

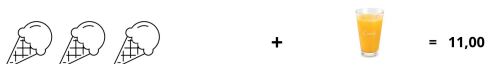
Gabarito da Primeira Fase

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	b	b	e	d	e	b	c	a	d
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b	c	a	e	c	e	c	d	c	a

Segunda Fase

Problema 1. Observe o anúncio da sorveteria na figura abaixo e responda:


$$5 \text{ cones} + 3 \text{ copos} = 21,00$$


$$3 \text{ cones} + 1 \text{ copo} = 11,00$$

- a) Qual é o preço de cada sorvete de casquinha?
- b) Qual é o preço de cada copo de suco?

Problema 2. Diogo é filho de Everaldo que por sua vez é filho de Francisco. A idade de Francisco somada com a idade de seu neto resulta em 78. A idade de Francisco somada com a idade de seu filho é 96. Sabendo que todas essas idades são números primos e que a soma dos algarismos das idades dos três é 34, responda:

- a) Qual a idade do Diogo?
- b) Qual a idade do pai do Diogo?
- c) Qual a diferença entre as idades do Everaldo e de seu pai?

Problema 3. Escrevendo todos os números inteiros não negativos em ordem crescente, sem excluir nenhum número obtemos:

01234567891011121314151617181920...

Considerando que para determinar a **posição** de um determinado número, conta-se quantos dígitos foram escritos antes que esse número apareça pela primeira vez na lista.

Por exemplo,
a **posição** 7 é 7,

0123456 7 891011121314151617181920...

└──────────┘

7

a **posição** do 23 é 2

01234567891011121314151617181920...

└───┘

2

e a **posição** de 111 é 12.

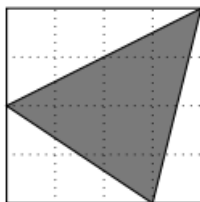
01234567891011121314151617181920...

└──────────┘

12

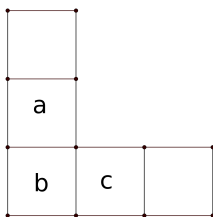
- Qual é a **posição** do número 920?
- Qual é a **posição** do número 414?
- Qual é a **posição** do número 2024?

Problema 4. Um azulejo quadrado com 4 cm de lado, está dividido em 16 quadrados iguais. Nesse azulejo foi pintado um triângulo cinza, como mostra a figura abaixo.



- Qual é o perímetro do azulejo?
- Qual é a área do azulejo?
- Qual é a área do triângulo cinza?

Problema 5. Os números 1, 2, 3, 4 e 5 devem ser escritos, sem repetir, nos cinco quadradinhos da figura abaixo.

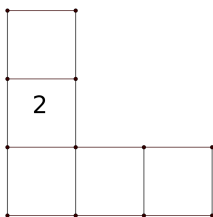


Para escrever esses números você deve obedecer a seguinte regra:

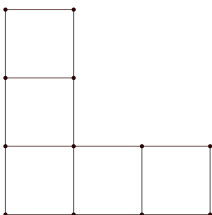
- se um número estiver logo acima de outro número, esse número deve ser menor, ou seja, $a < b$ e
- se um número estiver logo à direita de outro número, esse tem que ser maior, ou seja, $b < c$.

A partir disso responda:

- a) Será que é possível organizar uma distribuição desses números completando a figura abaixo? Se for possível de um exemplo, e caso não seja possível explique por quê.



- b) Quantas e quais são as maneiras diferentes dessas distribuições serem feitas?



Problema 6. A empresa SAÚDE incentiva o viver saudável de suas funcionárias. Para isso, dispensa mais cedo, duas vezes por semana, aquelas envolvidas em alguma prática esportiva. Aproveitando a oportunidade, Amanda, Bruna, Celina e Deise decidiram se associar a uma academia de ginástica, mas escolheram atividades físicas diferentes, quais sejam, musculação, ioga, natação e ginástica aeróbica. O intuito principal delas é manter a forma e, se possível, perder peso. No momento, o peso de cada funcionária assume um dos seguintes valores: 55 kg, 58 kg, 60 kg ou 66 kg. Sabe-se também que:

- I- Amanda não faz musculação e não pesa 58 kg.
- II- Bruna faz ioga e não tem 55 kg.
- III- A jovem que faz musculação pesa 60 kg e não é a Celina.
- IV- A jovem com 58 kg faz natação.

Com base nessas informações, responda:

- a) Qual é o peso de Amanda?
- b) Deise faz qual atividade?
- c) Bruna é mais pesada que Celina?

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. (Resolução de Ian Davi Bolzon Rocha de Moraes - Colégio Adventista de Ponta Grossa)

- a) Claramente todos os sorvetes de casquinha possuem o mesmo preço, que irei chamar de c . O mesmo se aplica ao preço do copo de suco, que irei chamar de s .

Assim expressando na forma de equações, pela imagem que foi dada, podemos formar:

$$\begin{cases} 5c + 3s = 21 \\ 3c + s = 11 \end{cases} \implies s = 11 - 3c$$

Substituindo o valor de s na primeira equação:

$$\begin{aligned} 5c + 3(11 - 3c) &= 21 \\ 5c + 3 \times 11 - 3 \times 3c &= 21 \\ 5c + 33 - 9c &= 21 \\ 5c - 9c &= 21 - 33 \\ -(5c - 9c) &= -(21 - 33) \\ 9c - 5c &= 33 - 21 \\ 4c &= 12 \\ c &= \frac{12}{4} \implies c = 3. \end{aligned}$$

Assim cada casquinha de sorvete custa 3 reais.

- b) Anteriormente chegamos a $c = 3$. Substituindo este valor em $3c + s = 11$, temos que:

$$\begin{aligned} 3 \times 3 + s &= 11 \\ 9 + s &= 11 \\ s &= 11 - 9 \implies s = 2. \end{aligned}$$

Assim, cada copo de suco custa 2 reais.

Problema 2. *(Resolução de Felipe Auer Abilhôa - Escola Santa Teresinha)*

- a) Diogo tem 19 anos, para descobrir sua idade fiz uma lista de números primos até o 59

(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59)

Depois considerei que Francisco tinha 59 anos, realizei as contas: $96 - 59 = 78 - 59$, a conta $96 - 59 = 37$ que é para descobrir a idade de Everaldo e se o resultado for um número primo a idade de Francisco poderia ser 59 anos, mas ainda é preciso fazer a conta: $78 - 59 = 19$ que o resultado também deve ser um número primo, como o resultado das duas contas é um número primo, assim, Diogo tem 19 anos.

- b) Como explicado na resposta anterior, o resultado da conta $96 - 59 = 37$ seria a idade de Everaldo, pai de Diogo.
- c) Visto anteriormente, Francisco tem 59 anos (pai de Everaldo) e Everaldo tem 37 anos, como $59 - 37 = 22$ a diferença entre a idade do Everaldo e de seu pai é de 22 anos.

Problema 3. *(Resolução de Laura Vitória Ciunek dos Santos - Colégio Integração)*

- a) A posição do número 920 é a 29, já que ele aparece quando temos a sequência dos números 1920 e esquecemos o 1, e assim, devemos contar quantos dígitos aparecem antes deste número, descobrindo assim então, sua posição.
- b) A posição do número 414 é a 72, já que ele aparece quando temos a sequência dos números 4142 e retiramos o 2, e depois disso para descobrir sua posição, devemos contar quantos dígitos aparecem antes desse número, chegando assim, a sua posição.
- c) A posição do número 2024 é a 6986, já que este número aparece quando temos a sequência 2024. Para descobrir sua posição, devemos saber quantos dígitos existem antes dele, e para isso, fazemos a quantidade de números com apenas 1 algarismo, que é igual a 10, depois a quantidade de números com 2 dígitos, que é igual a 90. Logo após, multiplicamos por 2 que é a quantidade de dígitos, então os que possuem os dígitos 3 e 4 fazemos o mesmo processo. Ao final, somamos os dígitos encontrados e chegaremos a posição do número 2024.

Problema 4. (Resolução de Adrian Christopher Guimarães Ferreira - Colégio Estadual Cívico-Militar José Elias da Rocha)

- a) Dado o lado do azulejo quadrado de 4 cm , então o perímetro é:

$$4\text{ cm} + 4\text{ cm} + 4\text{ cm} + 4\text{ cm} = 16\text{ cm}$$

O perímetro do azulejo quadrado é 16 cm .

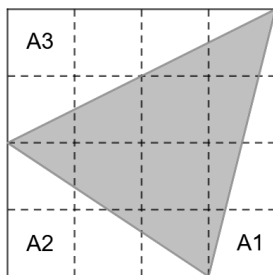
- b) Como vimos acima, o lado do azulejo é 4 cm , então sua área é $4^2\text{ cm}^2 = 16\text{ cm}^2$.

A área do azulejo quadrado é de 16 cm^2 .

Cada quadrado menor tem a área igual a 1 cm^2 , pois temos 16 quadrados, $16\text{ cm}^2 \div 16 = 1\text{ cm}^2$.

- c) Sabe-se que a área de cada quadrado menor é de 1 cm^2 .

Denominando as áreas brancas como $A1$, $A2$ e $A3$. Temos:



Devemos descobrir seus valores através de suas bases e alturas.

Dados: h = altura e b = base.

$A1$: $b = 1$ e $h = 4$, logo $A1 = (4 \times 1) \div 2$. $A1 = 2\text{ cm}^2$.

$A2$: $b = 3$ e $h = 2$, logo $A2 = (3 \times 2) \div 2$. $A2 = 3\text{ cm}^2$.

$A3$: $b = 4$ e $h = 2$, logo $A3 = (4 \times 2) \div 2$. $A3 = 4\text{ cm}^2$.

Devemos agora, somar cada área em branco, $A1 + A2 + A3$, e subtrair pela área total do azulejo, que é 16 cm^2 .

Temos, $A1 + A2 + A3 = Ab$, sendo Ab a soma da área branca.

Temos também $A - AB = AT$, sendo A a área total do azulejo e AT a área do triângulo cinza.

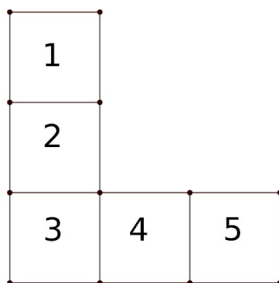
Substituindo:

$$2 + 3 + 4 = 9 \text{ cm}^2, 16 - 9 = 7 \text{ cm}^2.$$

A área do triângulo cinza é 7 cm^2 .

Problema 5. (Resolução de Ian Davi Bolzon Rocha de Moraes - Colégio Adventista de Ponta Grossa)

a) A única forma de resolução está abaixo:



b) Se temos: a, b, c, d, e dispostos da seguinte forma, nesse caso:

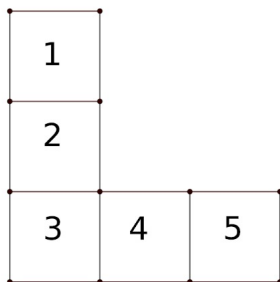
$$a < b$$

$$b < c$$

$$c < d$$

$$d < e$$

Temos uma única forma de fazer com os números 1, 2, 3, 4, 5, atribuindo valores de 1 a 5 para estes números, temos apenas uma configuração possível que satisfaz as condições do enunciado, sendo essa abaixo:



Problema 6. (Resolução de Enzo Vittorio Sother - Colégio Marista Pio XII)

Vamos interpretar o problema:

Amanda: Não faz musculação e nem natação, pois ela não pesa 58 *kg*, também não pratica ioga, pois Bruna já o pratica, e por fim, não tem 60 *kg*, pois não pratica musculação. Seu peso é de 55 *kg*.

Bruna: Pratica ioga e não pesa 55 *kg*, nem 60 *kg* pois não pratica musculação, e nem 58 *kg* pois não pratica natação. Assim, o peso que sobrou para Bruna é de 66 *kg*

Celina: Não pratica musculação e nem ioga, pois Bruna já o pratica, e não pesa 55 *kg*, pois Amanda já pesa isso; então seu peso é de 58 *kg*, assim praticando natação.

Deise: Não pratica natação e nem ioga, pois já tem pessoas com essas atividades; o peso que restou é o seu, de 60 *kg*, assim praticando musculação.

Então, concluímos que:

- a) Amanda pesa 55 *kg*.
- b) Deise pratica musculação.
- c) Sim, Bruna pesa mais.

Nível 2

Primeira Fase

Problema 1. Pedro, Danilo, Fernando, Eliezer e Rafael disputaram uma prova de atletismo. Considere que:

- Rafael chegou antes de Pedro e Fernando;
- Eliezer chegou antes de Rafael;
- Danilo chegou depois de Fernando;
- Danilo não foi o último a chegar.

Respectivamente, quem chegou na 1ª, 2ª e 3ª posições?

- a) Eliezer, Rafael e Pedro.
- b) Eliezer, Fernando e Pedro.
- c) Eliezer, Rafael e Fernando.
- d) Fernando, Eliezer e Rafael.
- e) Danilo, Fernando e Pedro.

Problema 2. A soma de cinco inteiros pares e consecutivos é quatro unidades menor do que a soma dos oito primeiros inteiros positivos ímpares. Então o menor dos inteiros pares é:

- a) 6
- b) 8
- c) 10
- d) 12
- e) 14

Problema 3. Quando o 173º inteiro positivo par é subtraído do 238º inteiro positivo ímpar, encontra-se o número:

- a) 65
- b) 66
- c) 129
- d) 130
- e) 131

Problema 4. O matemático aplicado Aldo tem três amigos também matemáticos: Benito, Caetano e Davi. Um dos amigos é analista, o outro geômetra e outro é topólogo. Sabe-se que:

- I. ou Benito é geômetra ou Caetano é geômetra;
- II. ou Benito é analista ou Davi é topólogo;

III. ou Davi é analista ou Caetano é analista.

Então as especialidades de Benito, de Caetano e de Davi são, respectivamente:

- a) Analista, geômetra e topólogo.
- b) Analista, topólogo e geômetra.
- c) Topólogo, geômetra e analista.
- d) Geômetra, analista e topólogo.
- e) Geômetra, topólogo e analista.

Problema 5. Considerando a sequência infinita

$10OPMataMPO010OPMataMPO010OPMat\dots$

O elemento que está na posição 2024^a é:

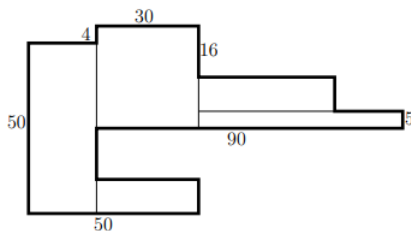
- a) P
- b) O
- c) M
- d) t
- e) a

Problema 6. Se x e y são números positivos tais que as quantidades 2 , y e x são diretamente proporcionais a x , 3 e y , então o valor de x^3 é:

- a) 9
- b) 10
- c) 11
- d) 12
- e) 13

Problema 7. A figura abaixo está formada por 5 retângulos. Qual é o perímetro da figura formada?

Observação: Considere para esse cálculo apenas as linhas mais grossas.



- a) 268
- b) 280
- c) 370
- d) 378
- e) 388

Problema 8. Considere que a , b e c representam algarismos distintos e satisfazem as condições da operação abaixo. Qual o valor de $a + b + c$?

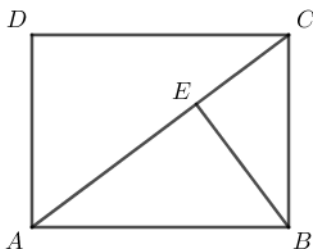
$$\begin{array}{r} 3b \\ \times a5 \\ \hline c80 \\ caa \\ \hline cb20 \end{array}$$

- a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

Problema 9. Os amigos Caio e Dudu são corredores. Geralmente o Caio é mais veloz do que Dudu. Em um dia de treino, Caio deu uma vantagem de 500 metros para Dudu. Neste dia Caio correu numa velocidade constante de 12 km/h , enquanto Dudu a 9 km/h . Sabendo que partiram no mesmo instante, quanto tempo depois Caio alcançou Dudu?

- a) 5 minutos
b) 10 minutos
c) 15 minutos
d) 20 minutos
e) $1/2$ hora

Problema 10. Considere o retângulo $ABCD$ de lados medindo $AB = 4 \text{ cm}$ e $BC = 3 \text{ cm}$. Sabendo que o segmento BE é perpendicular à diagonal AC , então o segmento CE mede:



- a) $3/2$ b) $9/5$ c) $5/2$ d) $12/5$ e) $16/5$

Problema 11. Considere número formado por três algarismos, cuja soma é 22. Ao substituir-se um desses algarismos pelo algarismo 2, verificou-se que o produto dos mesmos passou a ser 144. Assinale a alternativa que representa o algarismo que foi substituído nesse número.

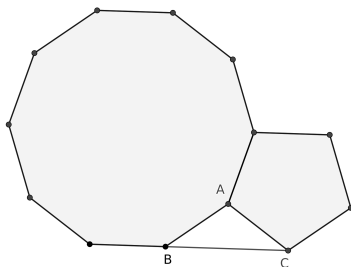
- a) 5 b) 7 c) 9 d) 6 e) 8

Problema 12. Isa quer preencher uma tabela 3×3 com os números **1, 7, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19** de tal forma que: nos cantos da tabela, ela escreva apenas números primos e no centro da tabela ela não coloque um número quadrado perfeito. De quantas maneiras Isa pode preencher a tabela?

?	?	?
?	?	?
?	?	?

- a) 576 b) 32 c) 128 d) 64 e) 1152

Problema 13. A figura a seguir mostra um decágono e um pentágono regular. Assinale a alternativa que representa medida em graus do ângulo $\widehat{ABC}$.



- a) 36° b) 72° c) 108° d) 144° e) 44°

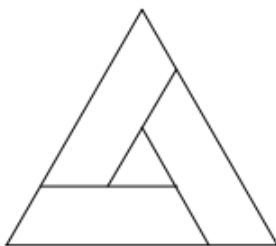
Problema 14. Considere números pares formados por dois algarismos distintos. Quantos deles satisfazem a propriedade de que a diferença entre os dois algarismos é um múltiplo de 3?

- a) 5 b) 7 c) 8 d) 10 e) 11

Problema 15. Laura resolveu ler um livro de 105 páginas. Lia um dia e no outro não. Nos dias de leitura, ela lê sempre o mesmo número de páginas. Ela começou a ler o livro na sexta-feira e leu até a 21ª página na terça-feira seguinte. Em que dia da semana Laura vai terminar de ler o livro?

- a) Segunda-feira.
b) Quarta-feira.
c) Sexta-feira.
d) Terça-feira.
e) Sábado ou domingo.

Problema 16. Na figura abaixo, o triângulo equilátero interior tem lado 1, os três trapézios são congruentes e cada um deles tem área igual a 5 vezes a área do triângulo menor. Qual é o comprimento do lado do triângulo equilátero maior?

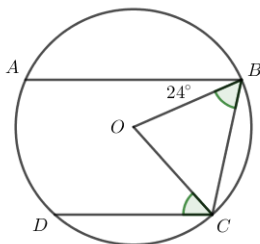


- a) 4 b) 5 c) 8 d) 10 e) 16

Problema 17. A vovó Rosalina, mãe da minha mãe, teve 7 filhos em intervalos regulares de 24 meses. Minha mãe Maria era a mais nova e meu tio João o mais velho. A idade da minha mãe Maria quando meu tio João tinha 4 vezes a idade dela era

- a) 16 anos b) 6 anos c) 20 anos d) 4 anos e) 5 anos

Problema 18. Na figura abaixo, O é o centro do círculo e os segmentos AB e CD são paralelos. Se a medida do ângulo $\widehat{ABO}$ vale 24° e os ângulos $\widehat{OBC}$ e $\widehat{OCD}$ são iguais, então a medida do ângulo $\widehat{BOC}$ vale:



- a) 24° b) 76° c) 52° d) 48° e) 96°

Problema 19. Considere que x e y correspondem ao número de maneiras de um casal e seus três filhos, sendo que o casal fica sempre junto, tomarem assento nas seguintes situações, respectivamente,

- I. em cinco cadeiras enfileiradas; e
- II. em uma mesa circular de cinco cadeiras.

Nessas condições, podemos afirmar que:

- a) $y = \frac{4}{3}x$ b) $y = \frac{13}{20}x$ c) $y = \frac{1}{4}x$ d) $y = \frac{1}{2}x$ e) $y = \frac{11}{20}x$

Problema 20. Benedito escreveu a lista de todos os números inteiros positivos com quatro dígitos nos quais cada um dos algarismos 2 e 3 aparecem uma única vez. Por exemplo, 2340 e 3021 foram escritos na lista, mas 5338 e 1346 não estão nela. Quantos números há na lista escrita por Benedito?

- a) 720 b) 384 c) 336 d) 576 e) 320

Gabarito da Primeira Fase

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	e	b	c	b	c	e	b	d	a
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
e	b	b	d	b	c	b	b	e	a

Segunda Fase

Problema 1. A empresa SAÚDE incentiva o viver saudável de suas funcionárias. Para isso, dispensa mais cedo, duas vezes por semana, aquelas envolvidas em alguma prática esportiva. Aproveitando a oportunidade, Amanda, Bruna, Celina e Deise decidiram se associar a uma academia de ginástica, mas escolheram atividades físicas diferentes, quais sejam, musculação, ioga, natação e ginástica aeróbica. O intuito principal delas é manter a forma e, se possível, perder peso. No momento, o peso de cada funcionária assume um dos seguintes valores: 55 kg, 58 kg, 60 kg ou 66 kg. Sabe-se também que:

- I- Amanda não faz musculação e não pesa 58 kg.
- II- Bruna faz ioga e não tem 55 kg.
- III- A jovem que faz musculação pesa 60 kg e não é a Celina.
- IV- A jovem com 58 kg faz natação.

Com base nessas informações, responda:

- a) Qual é o peso de Amanda?
- b) Deise faz qual atividade?
- c) Bruna é mais pesada que Celina?

Problema 2. Escrevendo todos os números inteiros não negativos em ordem crescente, sem excluir nenhum número obtemos:

01234567891011121314151617181920...

Considerando que para determinar a **posição** de um determinado número, conta-se quantos dígitos foram escritos antes que esse número apareça pela primeira vez na lista.

Por exemplo,
a **posição** 7 é 7,

$$\underbrace{01234567}_{7}891011121314151617181920\dots$$

a **posição** do 23 é 2

$$\underbrace{01234567891011}_{2}121314151617181920\dots$$

e a **posição** de 111 é 12.

$$\underbrace{0123456789101112}_{12}1314151617181920\dots$$

- Qual é a **posição** do número 920?
- Qual é a **posição** do número 414?
- Qual é a **posição** do número 2024?

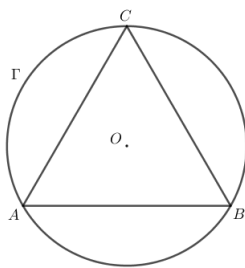
Problema 3. Um ladrão roubou um saco de laranjas. Durante a fuga, ao pular uma cerca perdeu metade das laranjas mais meia laranja. Então, perseguido por um cachorro, abandonou metade das laranjas que lhe restavam menos meia laranja. Então ele tropeçou e deixou cair metade das laranjas que lhe restavam, mais meia laranja. Se ele acabou com duas dúzias de laranjas, responda:

- Quantas laranjas restaram no saco, após o ladrão ter sido perseguido pelo cachorro?
- Quantas laranjas continha originalmente o saco?

Problema 4. Ana faz o seguinte cálculo com números inteiros positivos: ela escolhe um número, eleva esse número à quarta potência, subtrai o dobro do cubo desse número e soma o quadrado desse número. Por exemplo, se Ana escolhe o número 2, então o resultado do cálculo é 4.

- Qual é o resultado do cálculo de Ana com o número 3?
- Qual é o número que deve ser escolhido por Ana para que o resultado do cálculo seja 1764?
- Explique por que, para qualquer número que Ana escolher, o resultado final do cálculo será sempre um quadrado perfeito.

Problema 5. Sejam uma circunferência Γ de raio 1 cm e um triângulo equilátero ABC , de lado a , inscrito em Γ , conforme a figura abaixo.



- Determine o comprimento do lado do triângulo ABC .
- Calcule o valor da área do triângulo BCO .
- Encontre o valor que corresponde a um terço da área da região externa ao triângulo ABC e interna à circunferência Γ .

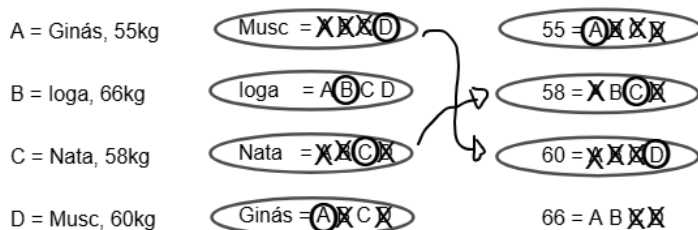
Problema 6. Seja $P = \{a, b, c, d\}$ um subconjunto do conjunto dos números naturais, dois a dois distintos. Chamaremos de número **power** relativo a P a qualquer número que pode ser decomposto na forma $a^b \times c^d$.

Por exemplo, se $P = \{2, 3, 5, 7\}$, então 625000 e 151263 são números **power** relativo a P , pois conseguimos decompor $625000 = 2^3 \times 5^7$ e $151263 = 3^2 \times 7^5$.

- Quantos números **power** distintos relativos a $P = \{2, 3, 5, 7\}$ existem?
- Qual é o menor número **power** relativo a $P = \{2, 3, 5, 7\}$?
- Considerando agora um conjunto com cinco elementos, quantos números **power** distintos relativos a $Y = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ existem?

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. (Resolução de Bernardo Kichileski - Colégio Pontagrossense Sepam)



- a) Amanda pesa 55 kg. A informação I nos fala que ela não faz musculação e não pesa 58 kg, então eliminamos 58 kg. Se ela não faz musculação, então não pesa 60 kg, sobrando 55 kg e 66 kg.
Por eliminatória descobrimos que, Celina pesa 58 kg e por conta disso, ela faz natação e Deise pesa 60 kg por conta que ela faz musculação.
Sobrou para Amanda e Bruna 55 kg e 66 kg, porém, a informação II diz que Bruna não tem 55 kg, logo ela pesa 66 kg e Amanda pesa 55 kg.
- b) Deise faz musculação. Sabemos que, Amanda e Bruna não fazem musculação e a informação III nos diz que Celina também não faz musculação, sobrando assim, a Deise.
- c) Sim, Bruna é mais pesada que Celina. A informação IV diz que, quem faz natação pesa 58 kg, e por eliminação descobrimos que Celina faz natação, assim pesando, 58 kg. Também sabemos que Deise pesa 60 kg, sobrando para Bruna 66 kg.
Bruna = 66 kg
Celina = 58 kg

Problema 2. (Resolução de Pauta)

Vamos resolver cada item separadamente.

- a) O número 920 aparece na primeira vez escrevendo 19 e depois o 20.
O número de dígitos escritos de 0 a 18 deve ser determinado:

- de 0 a 9: 10 dígitos,
- de 10 a 18: 9 números com dois dígitos, totalizando 18 dígitos,
- 1 dígito do número 19.

O total de dígitos é

$$10 + 18 + 1 = 29.$$

Portanto, a posição de 920 é 29ª.

b) O número 414 aparece na primeira vez escrevendo 41 e depois 42.

- de 0 a 9: 10 dígitos,
- de 10 a 40: 31 números com dois dígitos, totalizando 62 dígitos.

O total de dígitos é

$$10 + 62 = 72.$$

Portanto, a posição de 414 é 72ª.

c) O número 2024 aparece na primeira vez escrevendo 2023 e depois 2024.

- de 0 a 9: 10 dígitos,
- de 10 a 99: $90 \times 2 = 180$ dígitos,
- de 100 a 999: $900 \times 3 = 2700$ dígitos,
- de 1000 a 1999: $1000 \times 4 = 4000$ dígitos,
- de 2000 a 2023: $24 \times 4 = 96$ dígitos.

O total de dígitos é

$$10 + 180 + 2700 + 4000 + 96 = 6986.$$

Portanto, a posição de 2024 é 6986ª.

Problema 3. *(Resolução de Otávio Rodrigues Conrado - Colégio Estadual Professor Eugênio Malanski)*

- a) Sabemos que o ladrão terminou com 24 laranjas, após perder metade do que tinha, mais meia laranja. É possível resolver o problema por tentativa e erro, sem usar álgebra.

Se ele perdeu metade mais meia laranja e sobrou 24, então ele devia ter um pouco mais que o dobro de 24. O dobro de 24 é 48, então testamos esse valor primeiro.

- Suponha que ele tivesse 48 laranjas.
 - Perde metade (24) mais meia (0,5) = 24,5 laranjas.
 - Isso deixaria $48 - 24,5 = 23,5$ laranjas, o que é menor que 24.
- Tentando agora com 49 laranjas.
 - Perde metade (24,5) mais meia (0,5) = 25 laranjas.
 - Sobra exatamente $49 - 25 = 24$ laranjas.

Portanto, antes da última perda ele tinha **49 laranjas**.

Segundo o enunciado, ele abandonou metade do que tinha menos meia laranja. Logo, procuramos um número que, ao perder esse valor, resulte em 49 laranjas.

- Suponha que ele tivesse 96 laranjas:
 - Metade de 96 = 48
 - $48 - 0,5 = 47,5$ laranjas perdidas
 - $96 - 47,5 = 48,5$
- Tentando agora com 97 laranjas:
 - Metade de 97 = 48,5
 - $48,5 - 0,5 = 48$ laranjas perdidas
 - $97 - 48 = 49$

O ladrão tinha originalmente 97 laranjas antes de ser perseguido pelo cachorro.

b) Queremos descobrir quantas laranjas ele tinha no início, antes de todas as perdas. Se ele perdeu metade mais meia laranja e sobrou 97, então ele devia ter um pouco mais que o dobro de 97. O dobro de 97 é 194, então testamos esse valor primeiro.

- Suponha que ele tivesse 194 laranjas.
 - Perde metade (97) mais meia (0,5) = 97,5 laranjas.
 - Isso deixaria $194 - 97,5 = 96,5$ laranjas, o que é menor que 97.
- Testando agora com 195 laranjas.
 - Perde metade (97,5) mais meia (0,5) = 98 laranjas.
 - Isso deixaria $195 - 98 = 97$ laranjas.

Portanto, o ladrão tinha originalmente 195 laranjas no saco.

Problema 4. (*Resolução de Henrique Galvan Calçada - Colégio Elite Tales de Mileto*)

a) Ana obterá 36 como resultado. A sequência operacional é:

$$\begin{array}{lcl}
 3 & \xrightarrow{\text{elevar à 4ª potência}} & 3^4 \\
 & \xrightarrow{\text{subtrair } 2 \times 3^3} & 3^4 - 2 \times 3^3 \\
 & \xrightarrow{\text{somar } 3^2} & 3^4 - 2 \times 3^3 + 3^2
 \end{array}$$

Desenvolvendo passo a passo:

$$\begin{aligned}
 & 3^4 - 2 \times 3^3 + 3^2 \\
 &= 81 - 2 \times 27 + 9 \\
 &= 81 - 54 + 9 \\
 &= (81 + 9) - 54 \\
 &= 90 - 54 \\
 &= 36
 \end{aligned}$$

b) Fazendo as operações com uma incógnita x para o número escolhido, temos:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = 1764$$

Colocando x^2 em evidência:

$$x^2(x^2 - 2x + 1) = 1764$$

Como x^2 é um inteiro (pelo enunciado), fatoramos 1764:

$$1764 = 6^2 \times 7^2$$

Sabendo que ambos x^2 e $(x^2 - 2x + 1)$ são divisores de 1764, e que x^2 só pode ser 6^2 ou 7^2 , então:

$$x \in \{6, 7\}$$

Testando os valores:

- Para $x = 6$:

$$6^2(6^2 - 2 \times 6 + 1) = 36 \times (36 - 12 + 1) = 36 \times 25 = 900 \neq 1764$$

- Para $x = 7$:

$$7^2(7^2 - 2 \times 7 + 1) = 49 \times (49 - 14 + 1) = 49 \times 36 = 1764$$

Portanto, o número que Ana deve escolher é 7.

c) Usando x novamente, qualquer resultado de Ana é da forma:

$$x^4 - 2x^3 + x^2$$

que pode ser fatorado como:

$$x^2(x^2 - 2x + 1)$$

Chamando o resultado da operação de R :

$$x^2(x^2 - 2x + 1) = R$$

Observamos que:

- R é divisível por x^2 (que é um quadrado perfeito)
- Podemos reescrever R como:

$$x(x^3 - 2x^2 + x)$$

logo R também é divisível por x

Sabendo que:

- Todos os números envolvidos são inteiros positivos
- $x^2 - 2x + 1$ é sempre um quadrado perfeito, pois:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

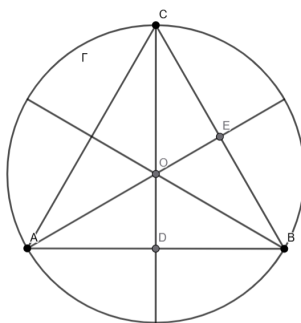
- Tanto x^2 quanto $(x - 1)^2$ são quadrados perfeitos

Concluimos então que R será sempre o produto de dois quadrados perfeitos:

$$R = x^2 \times (x - 1)^2 = [x(x - 1)]^2$$

e portanto ele mesmo é um quadrado perfeito.

Problema 5. (Resolução de Pedro Kaito Yasuda - Colégio Pontagrossense Sepam)



- a) Como O é o centro da circunferência, se traçarmos os segmentos $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ e $\overline{CO}$, podemos observar que o $\triangle ABC$ é dividido em outros 6 triângulos, todos com ângulos internos: $360^\circ \div 6$, 90° e $(360^\circ \div 6 + 90^\circ) + 30^\circ = 180^\circ$; Assim terão os ângulos internos igual a 60° , 90° e 30°

Utilizando o fato de que esses triângulos com ângulos 90° , 60° e 30° terão lados medindo 2, $\sqrt{3}$ e 1. Na figura:

$$2 : \overline{OB} = 1$$

$$\sqrt{3} : \overline{DB} = x$$

$$1 : \overline{OD} = y$$

$$\text{Sabendo disso, se } \overline{OB} = \frac{2}{2} = 1, \overline{DB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \overline{OD} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Assim o comprimento do lado do } \triangle ABC \text{ é } \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$\text{b) } \triangle BEO = \overline{BE} \times \overline{OE} \div 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \div 2 = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\triangle BCO = \frac{\sqrt{3}}{8} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Portanto a área do triângulo } \triangle BCO \text{ é de } \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

- c) Área x = área da circunferência Γ - área do $\triangle ABC \implies$

$$\text{Área } x = \pi \times 1^2 - \frac{\sqrt{3} \times \frac{3}{2}}{2} = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \implies$$

$$\text{Área } \frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Assim um terço da externa ao } \triangle ABC \text{ e interna à circunferência } \Gamma \text{ é } \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \text{ cm}^2$$

Problema 6. (Resolução de Lucas Galvan Calçada- Colégio Elite Tales de Mileto)

- a) Temos 12 números power relativos distintos. Sendo eles:

$$2^3 \times 5^7 \quad 2^5 \times 3^7 \quad 2^7 \times 3^5$$

$$2^3 \times 7^5 \quad 2^5 \times 7^3 \quad 2^7 \times 5^3$$

$$3^2 \times 5^7 \quad 5^2 \times 3^7 \quad 7^2 \times 3^5$$

$$3^2 \times 7^5 \quad 5^2 \times 7^3 \quad 7^2 \times 5^3$$

Perceba que a ordem dos produtos não altera o resultado.

- b) Para achar o menor número power relativo a P , devemos colocar os dois números menores como expoente e os dois maiores como base, portanto:

$$7^2 \times 5^3 = 49 \times 125 = 6125$$

Por isso, o menor número power relativo a P é 6125.

- c) Para descobrir isso vamos separar Y em subconjuntos de 4 elementos:

$$1^\circ \{1, 2, 3, 5\} \rightarrow 12$$

$$2^\circ \{1, 2, 3, 7\} \rightarrow 10 \text{ (vai repetir alguns casos do subconjunto 1)}$$

$$3^\circ \{2, 3, 5, 7\} \rightarrow 12 \text{ (voltamos para o caso do item a)}$$

$$4^\circ \{1, 3, 5, 7\} \rightarrow 8 \text{ (vai repetir alguns casos do subconjunto 1 e 2)}$$

$$5^\circ \{1, 2, 5, 7\} \rightarrow 6 \text{ (vai repetir alguns casos dos subconjuntos 1, 2 e 4)}$$

Portanto temos $12 + 10 + 12 + 8 + 6 = 48$ números power relativos distintos

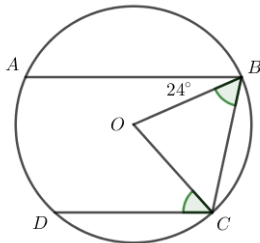
Nível 3

Primeira Fase

Problema 1. Os amigos Caio e Dudu são corredores, sendo que o primeiro em geral é mais veloz. Em um dia de treino, Caio deu uma vantagem de 500 metros para Dudu. Neste dia Caio correu numa velocidade constante de 12 km/h, enquanto Dudu a 9 km/h. Sabendo que partiram no mesmo instante, quanto tempo depois Caio alcançou Dudu?

- a) 5 minutos
- b) 10 minutos
- c) 15 minutos
- d) 20 minutos
- e) 1/2 hora

Problema 2. Na figura abaixo, O é o centro do círculo e os segmentos AB e CD são paralelos. Se a medida do ângulo $\widehat{ABO}$ vale 24° e os ângulos $\widehat{OBC}$ e $\widehat{OCD}$ são iguais, então a medida do ângulo $\widehat{BOC}$ vale:



- a) 24°
- b) 76°
- c) 52°
- d) 48°
- e) 96°

Problema 3. Benedito escreveu a lista de todos os números inteiros positivos com quatro dígitos nos quais cada um dos algarismos 2 e 3 aparecem uma única vez. Por exemplo, 2340 e 3021 foram escritos na lista, mas 5338 e 1346 não estão nela. Quantos números há na lista escrita por Benedito?

- a) 720
- b) 384
- c) 336
- d) 576
- e) 320

Problema 4. Considere que x e y correspondem ao número de maneiras de um casal e seus três filhos, sendo que o casal fica sempre junto, tomarem assento nas seguintes situações, respectivamente,

- I. em cinco cadeiras enfileiradas; e
- II. em uma mesa circular de cinco cadeiras.

Nessas condições, podemos afirmar que:

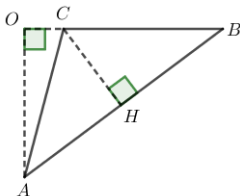
a) $y = \frac{4}{3}x$ b) $y = \frac{13}{20}x$ c) $y = \frac{11}{20}x$ d) $y = \frac{1}{2}x$ e) $y = \frac{1}{4}x$

Problema 5. Considere que a , b e c representam algarismos distintos e satisfazem as condições da operação abaixo. Qual o valor de $a + b + c$?

$$\begin{array}{r} 3 \ b \\ \times a \ 5 \\ \hline c \ 8 \ 0 \\ c \ a \ a \\ \hline c \ b \ 2 \ 0 \end{array}$$

- a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

Problema 6. No diagrama abaixo, sabe-se que os segmentos AO e CH são perpendiculares aos segmentos BO e AB , respectivamente. Se $\overline{AO} = 6$, $\overline{BC} = 7$ e $\overline{AB} = 12$, então o valor de $\overline{CH}$ é:



- a) 21 b) $7/2$ c) $21/2$ d) 4 e) $9/2$

Problema 7. Gabriela guardou moedas de 5 e 10 centavos em um cofrinho. Quando juntou 50 moedas, ela abriu o cofrinho e observou que se trocasse cada moeda de 5 centavos por uma moeda de 10 centavos e cada moeda de 10 centavos por uma de 5 centavos, ela lucraria 40 centavos. Qual a quantia em reais das 50 moedas que havia no cofrinho?

- a) 35,50 b) 3,55 c) 5,50 d) 4,50 e) 55,50

Problema 8. Talita gosta de brincar com números e verificou que um número que permanece o mesmo quando lemos os seus dígitos de “frente para trás” ou de “trás para frente” é chamado de palíndromo. Os números 727, 999, 2442 e 7518157 são exemplos de palíndromos. Talita fez uma lista em ordem crescente de todos os palíndromos com 5 algarismos (os números não podem começar com o algarismo 0). Qual é o décimo quinto número da lista de Talita?

- a) 11011 b) 10401 c) 12721 d) 11411 e) 12521

Problema 9. O *Sudoku* é um jogo de raciocínio lógico bastante conhecido. Neste caso, o objetivo é que o jogador preencha a tabela com números de 1 a 6, sem que haja quaisquer repetições de números na mesma linha e nem na mesma coluna, ou seja, cada número deve aparecer exatamente uma vez em cada linha e cada coluna. Sabendo disso, João completou o *Sudoku* abaixo e obteve como soma dos números obtidos nos quatro cantos externos (quadrados pintados de cinza) o valor de:

		2	1		
4					
1	2	5	4	6	3
	5	1		3	
			6	5	

Sudoku 6×6 .

- a) 12 b) 14 c) 15 d) 16 e) 18

Problema 10. Sabendo que o produto de dois números é 91 e sua soma é 92, assinale o valor que representa a diferença entre esses números.

- a) 90 b) 80 c) 70 d) 92 e) 91

Problema 11. O marceneiro José tem duas chapas de madeira, ambas quadradas, de tamanhos 2304 cm^2 e 1296 cm^2 . José deseja recortá-las em quadrados, todos iguais e de maior área possível, para fazer tabuleiros de xadrez. Nessas condições, a medida do lado de cada tabuleiro será:

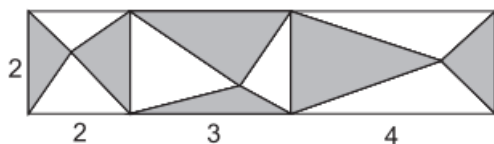
- a) 10 cm b) 11 cm c) 12 cm d) 13 cm e) 14 cm

Problema 12. Assinale a alternativa que representa o número de soluções da equação

$$3^{3x} = 27^{x+8}.$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Problema 13. A figura abaixo mostra 3 retângulos colados, todos de mesma altura 2 cm , e de bases 2 cm , 3 cm e 4 cm . Em cada um desses retângulos há um ponto em seu interior que forma, com os vértices do retângulo, dois triângulos que estão sombreados. Qual é a soma das áreas de todos esses triângulos sombreados?



- a) 18 cm^2 b) 6 cm^2 c) 12 cm^2 d) 15 cm^2 e) 9 cm^2

Problema 14. Sabe-se que a *média geométrica* (z) entre dois números positivos x e y é dada da seguinte forma:

$$z = \sqrt{x \cdot y}.$$

Um quadriculado 3×3 preenchido com números é chamado de *geomágico* quando, em cada linha horizontal, vertical ou diagonal, o termo do meio é a média geométrica dos outros dois. Neste caso, preenchendo o quadriculado abaixo de modo que ele seja *geomágico*, encontra-se que $a + b + c$ vale:

4		1
16		c
	a	b

- a) 14 b) 28 c) 52 d) 56 e) 44

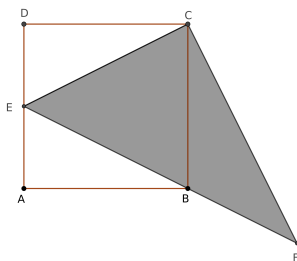
Problema 15. Ana fez uma lista com números de 2 a 6 algarismos distintos, formados utilizando apenas **1, 2, 4, 5, 7 e 8**, para o sorteio de um brinde. Qual a probabilidade de que o número sorteado seja ímpar e comece com um dígito par?

- a) $36/325$ b) $353/1950$ c) $266/975$ d) $137/390$ e) $3/10$

Problema 16. Beatriz possui uma urna com três bolas pretas e cinco bolas brancas. Quantas bolas vermelhas Beatriz deve colocar nessa urna para que, retirando-se uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser vermelha seja igual a $\frac{2}{3}$?

- a) 15 b) 20 c) 16 d) 22 e) 25

Problema 17. Sabendo que a área do quadrado $ABCD$ é 16 cm^2 e que E representa o ponto médio do lado AD , em relação a área do triângulo retângulo ECF , assinale o que for correto.

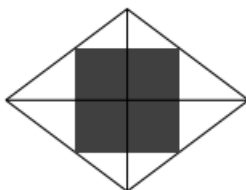


- a) A área do triângulo ECF é maior do que 8 cm^2 .
b) A área do triângulo ECF é igual a 8 cm^2 .
c) A área do triângulo ECF é menor do que 8 cm^2 .
d) A área do triângulo ECF é igual a 7 cm^2 .
e) A área do triângulo ECF é menor do que 7 cm^2 .

Problema 18. Qual o dígito das unidades de $x = 2024^2 + 2^{2024}$?

- a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

Problema 19. Calcular a área do quadrado inscrito no losango de diagonais medindo 3 e 4, conforme figura abaixo:



- a) 12 b) 9 c) 16 d) $\frac{36}{49}$ e) $\frac{144}{49}$

Problema 20. Quando divide-se o número inteiro

$$N = 2019 \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2022 + 2024^2$$

por 7 encontra-se como resto o número:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Gabarito da Primeira Fase

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	d	a	e	d	b	b	d	b	a
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
c	a	e	c	e	c	a	b	e	d

Segunda Fase

Problema 1. Ana faz o seguinte cálculo com números inteiros positivos: ela escolhe um número, eleva esse número à quarta potência, subtrai o dobro do cubo desse número e soma o quadrado desse número. Por exemplo, se Ana escolhe o número 2, então o resultado do cálculo é 4.

- a) Qual é o resultado do cálculo de Ana com o número 3?
- b) Qual é o número que deve ser escolhido por Ana para que o resultado do cálculo seja 1764?
- c) Explique por que, para qualquer número que Ana escolher, o resultado final do cálculo será sempre um quadrado perfeito.

Problema 2. A empresa SAÚDE incentiva o viver saudável de suas funcionárias. Para isso, dispensa mais cedo, duas vezes por semana, aquelas envolvidas em alguma prática esportiva. Aproveitando a oportunidade, Amanda, Bruna, Celina e Deise decidiram se associar a uma academia de ginástica, mas escolheram atividades físicas diferentes, quais sejam, musculação, ioga, natação e ginástica aeróbica. O intuito principal delas é manter a forma e, se possível, perder peso. No momento, o peso de cada funcionária assume um dos seguintes valores: 55 kg, 58 kg, 60 kg ou 66 kg. Sabe-se também que:

- I- Amanda não faz musculação e não pesa 58 kg.
- II- Bruna faz ioga e não tem 55 kg.
- III- A jovem que faz musculação pesa 60 kg e não é a Celina.
- IV- A jovem com 58 kg faz natação.

Com base nessas informações, responda:

- a) Qual é o peso de Amanda?
- b) Deise faz qual atividade?
- c) Bruna é mais pesada que Celina?

Problema 3. Uma sequência numérica é organizada, iniciando por um número inteiro positivo n e os demais termos obedecem a seguinte regra: cada termo se obtém do anterior subtraindo-se o maior quadrado perfeito que é menor ou igual ao termo anterior, até chegar ao número zero.

Por exemplo, se $n = 87$, a sequência numérica terá os cinco termos: $(87, 6, 2, 1, 0)$, pois

$$a_1 = 87,$$

$$a_2 = 87 - 9^2 = 87 - 81 = 6,$$

$$a_3 = 6 - 2^2 = 6 - 4 = 2,$$

$$a_4 = 2 - 1^2 = 2 - 1 = 1 \text{ e}$$

$$a_5 = 1 - 1^2 = 1 - 1 = 0.$$

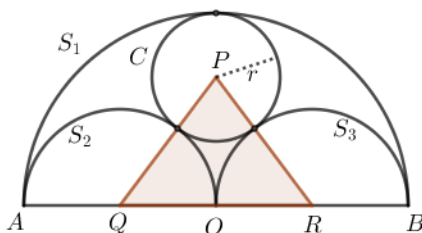
- a) Organize a sequência iniciando com $n = 502$.
- b) Dê exemplo de uma sequência que tenha exatamente seis termos.
- c) Encontre o menor valor de n para que a sequência assim criada tenha exatamente oito termos.

Problema 4. Um número natural é chamado **natureba** se o seu algarismo das unidades é 6 e quando este algarismo 6 for retirado da posição das unidades e colocado no início do número, o novo número aumenta em 9 unidades.

A partir disso responda:

- a) Caso o número **natureba** tenha dois algarismos, qual é a soma desses algarismos?
- b) Caso o número **natureba** tenha três algarismos, qual é a soma desses algarismos?
- c) Qual é a soma dos algarismos do número **natureba**, caso ele tenha n algarismos?

Problema 5. Uma circunferência C de centro P de raio r é tangente às duas semicircunferências menores, S_2 e S_3 , e à semicircunferência maior, S_1 , conforme a figura abaixo.



Sejam $\overline{AO} = \overline{BO} = 6$ cm e Q e R pontos médios dos segmentos AO e BO , respectivamente.

- Determine o valor de r .
- Calcule o perímetro do triângulo PQR .
- Encontre a área da região interna à semicircunferência S_1 e externa ao triângulo PQR .

Problema 6. Em um grupo de 9 medalhistas, alguns receberam medalhas de prata e outros de ouro. Quando, por acaso, quaisquer 3 medalhistas se encontram, a probabilidade de nenhum deles ter recebido medalha de prata é $\frac{2}{3}$.

- Quantos grupos de três medalhistas podemos formar?
- Quantos medalhistas receberam medalha de ouro?

Gabarito da Segunda Fase**Problema 1.** *(Resolução da Pauta)*

- a) Interpretando o enunciado, vamos realizar as operações:

$$3^4 - 2 \cdot 3^3 + 3^2 = 81 - 54 + 9 = 36.$$

- b) Repare que $x^4 - 2x^3 + x^2$, obtido da interpretação do enunciado, pode ser fatorado da seguinte forma

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x - 1)^2 = [x(x - 1)]^2,$$

donde fazemos

$$[x(x - 1)]^2 = 1764$$

$$x(x - 1) = 42 \Rightarrow x = 7.$$

- c) A justificativa segue da fatoração da alternativa acima, ou seja, o resultado do cálculo será sempre um quadrado perfeito, pois será o quadrado do número $x(x - 1)$, ou seja,

$$[x(x - 1)]^2.$$

Problema 2. *(Resolução de Luis Eduardo Cosseti Correia - Colégio Alfa Plus)*

Vamos interpretar o problema:

Para respondermos as alternativas abaixo, primeiro é necessário desvendar a lógica por trás do problema.

Primeiramente, é possível perceber que, nem Amanda, nem Bruna e nem Celine fazem musculação, sendo então, Deise a praticante desta atividade, pesando 66 kg. Além disso, é possível inferir quem nem Amanda e nem Bruna correspondem a jovem da afirmação IV, sendo necessário que Celina faça natação e pese 58 kg. Em última análise, é possível perceber, com as informações restantes que Amanda faz ginástica aeróbica e possui 55 kg e Bruna faz ioga, possuindo 66 kg. Dessa forma, é possível estabelecer tal organização:

Amanda: Pesa 55 kg e faz ginástica aeróbica.

Bruna: Pesa 66 kg e faz ioga.

Celina: Pesa 58 kg e faz natação.

Deise: Pesa 60 kg e faz musculação.

- a) Amanda pesa 55 kg.
- b) Deise pratica musculação.
- c) Sim, pois Bruna pesa 66 kg e Celina 58 kg. Logo, $66 \text{ kg} > 58 \text{ kg}$

Problema 3. (Resolução de Luiz Eduardo Cosseti Correia - Colégio Alfa Plus)

a)

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ +440 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$502 - 22^2 = 502 - 484 = 18$$

$$18 - 4^2 = 18 - 16 = 2$$

$$2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$$

$$1 - 1^2 = 0$$

A sequência terá os números: $\{502, 18, 2, 1, 0\}$

b) É possível estabelecer a seguinte sequência:

$$48 - 6^2 = 48 - 36 = 12$$

$$12 - 3^2 = 12 - 9 = 3$$

$$3 - 1^2 = 2$$

$$2 - 1^2 = 1$$

$$1 - 1^2 = 0$$

A sequência possui os termos:

$$\{48, 12, 3, 2, 1, 0\}$$

Possui, portanto, 6 termos.

- c) Para achar o menor valor de n , podemos fazer o processo inverso, usando os menores números.

$$0 + 1^2 = 1$$

$$1 + 1^2 = 2$$

$$2 + 1^2 = 3$$

depois temos:

$$7 - 2^2 = 3$$

$$23 - 4^2 = 7$$

$$167 - 12^2 = 23$$

84	$4 \times 4 = 16$ (sobe 1)
$\times 84$	$4 \times 8 = 32 + 1 = 33$
336	$8 \times 4 = 32$ (sobe 3)
$+6720$	$8 \times 8 = 64 + 3 = 67$
7056	

$$\begin{array}{r}
 85 \\
 \times 85 \\
 \hline
 425 \\
 +6800 \\
 \hline
 7225
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 5 \times 5 = 25 \text{ (sobe 2)} \\
 5 \times 8 = 40 + 2 = 42 \\
 8 \times 5 = 40 \text{ (sobe 4)} \\
 8 \times 8 = 64 + 4 = 68
 \end{array}$$

$$7223 - 84^2 = 167$$

A sequência será $\{7223, 167, 23, 7, 3, 2, 1, 0\}$. Assim, o menor valor de n será 7223

Problema 4. (*Resolução de Benjamin Finger Rocha - Colégio Positivo Master*)

- a) Como o número natureba deve ser formado por dois algarismos, ele é da forma $a6$, ou seja,

$$6a = 9 + a6$$

$$960 + a = 9 + 10a + 6$$

$$9a = 60 - 15$$

$$9a = 45$$

$$a = 5$$

Logo, o número natureba é 56 e a soma dos seus algarismos é $5 + 6 = 11$

- b) Como o número natureba deve ser formado por três algarismos, ele é da forma $ab6$, ou seja,

$$6ab = 9 + ab6$$

$$600 + 10a + b = 9 + 100a + 10b + 6$$

$$90a + 9b = 600 - 15$$

$$90a + 9b = 585$$

$$10a + b = 65.$$

Observamos que o único caso possível é se $\mathbf{a = 6}$ e o $\mathbf{b = 5}$. Logo, o número natureba é 656 e a soma dos seus algarismos é $6 + 5 + 6 = 17$

- c) Como o número natureba deve ser formado por n algarismos, ele é da forma $ab\dots c6$, ou seja,

$$6ab\dots c = 9 + ab\dots c6$$

$$6 \cdot 10^{n-1} + 10^{n-2}a + 10^{n-3}b + \dots + c = 9 + 10^{n-1}a + 10^{n-2}b + \dots + 10c + 6$$

$$6 \cdot 10^{n-1} - 6 - 9 = 10^{n-1}a - 10^{n-2}a + 10^{n-2}b - 10^{n-3}b + \dots + 10c - c$$

$$10^{n-1} - 15 = 10 \cdot 10^{n-2}a - 10^{n-2}a + 10 \cdot 10^{n-3}b - 10^{n-3}b + \dots + 10c - c$$

$$60 \cdot 10^{n-2} - 15 = (10a - a) \cdot 10^{n-2} + (10 - 1)b \cdot 10^{n-3} + \dots + 10c - c$$

e assim por diante.

Podemos também generalizar a partir das respostas obtidas em (a) e (b).

- Para $n = 2$, temos:

$$5 + 6(n - 1) = 5 + 6(2 - 1) = 5 + 6 = 11$$

- Para $n = 3$, temos:

$$5 + 6(n - 1) = 5 + 6(3 - 1) = 5 + 12 = 17$$

- Para $n = 4$, temos:

$$5 + 6(n - 1) = 5 + 6(4 - 1) = 5 + 18 = 23$$

Portanto, para n qualquer, teremos $5 + 6(n - 1)$.

Problema 5. (Resolução de Luis Eduardo Cosseti Correia - Colégio Alfa Plus)

- a) De acordo com a imagem, é possível perceber que r é a altura de um triângulo retângulo. O triângulo PQR tem altura r e base QR , que decorre de H .

Assim:

$$6 - H = r \quad (1)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, no triângulo PQO:

$$H^2 + 3^2 = (3 + r)^2 \quad (2)$$

Desenvolvendo:

$$H = \sqrt{r(r+6)} \quad (3)$$

Substituindo (3), em (1), temos:

$$\begin{aligned} 6 - \sqrt{r(r+6)} &= r \\ 6 - r &= \sqrt{r(6+r)} \\ (6 - r)^2 &= r(6+r) \\ r^2 - 6r + 36 &= r^2 + 6r \\ 36 &= 12r \\ r &= \frac{36}{12} \\ r &= 3 \end{aligned}$$

Portanto: $r = 3 \text{ cm}$.

- b) O perímetro é:

$$P = 12 + 2r$$

Como $r = 3$:

$$P = 12 + 2(3)$$

$$P = 12 + 6$$

$$P = 18 \text{ cm}$$

- c) A área de S_1 é:

$$A_{S_1} = \frac{\pi \times 6^2}{2} = \frac{36\pi}{2} = 18\pi \text{ cm}^2$$

A área do triângulo PQR é:

$$A_{PQR} = \frac{6 \times 4}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

(considerando base 6 e altura 4, já que $r = 2$ e altura $H = 4$)

Assim, a área desejada é:

$$A = A_{S_1} - A_{PQR}$$

$$A = 18\pi - 12$$

Colocando em evidência:

$$A = 6(3\pi - 2) \text{ cm}^2$$

Portanto, a resposta final é $6(3\pi - 2) \text{ cm}^2$

Problema 6. (Resolução Pedro Luiz Scheifer de Souza - Colégio Alfa Plus)

- a) A partir da combinação de 9 alunos de 3 em 3, é possível afirmar que podem ser formados 84 grupos de 3 medalhistas diferentes, segue o cálculo:

$$C_{9,3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

- b) Pensando a partir do princípio que possuímos 3 escolhas para os medalhistas de qualquer grupo, e que como a chance de nenhum ser de prata é $\frac{2}{3}$, a chance de pelo menos 1 ser de prata é $\frac{1}{3}$ e temos 9 medalhistas chega-se a conclusão que há apenas 1 medalhista de prata que estará presente em $\frac{1}{3}$ dos grupos, que seriam 28 grupos, ou seja, há 8 medalhistas de ouro.

Então conseguimos montar apenas 56 grupos com 8 medalhistas de ouro, o mesmo número que os $\frac{2}{3}$ de possibilidades dos 84 grupos, ou seja $\frac{2}{3} \times 84 = 56$

Seguem os cálculos:

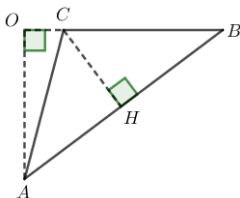
$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 5!} = 8 \times 7 = 56$$

Portanto há 8 medalhistas de ouro no grupo.

Nível 4

Primeira Fase

Problema 1. No diagrama abaixo, sabe-se que os segmentos AO e CH são perpendiculares aos segmentos BO e AB , respectivamente. Se $\overline{AO} = 6$, $\overline{BC} = 7$ e $\overline{AB} = 12$, então o valor de $\overline{CH}$ é:



- a) $7/2$ b) 21 c) $21/2$ d) 4 e) $9/2$

Problema 2. Quando divide-se o número inteiro

$$N = 2019 \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2022 + 2024^2$$

por 7 encontra-se como resto o número:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Problema 3. O marceneiro José tem duas chapas de madeira, ambas quadradas, de tamanhos 2304 cm^2 e 1296 cm^2 . José deseja recortá-las em quadrados, todos iguais e de maior área possível, para fazer tabuleiros de xadrez. Nessas condições, a medida do lado de cada tabuleiro será:

- a) 10 cm b) 11 cm c) 12 cm d) 13 cm e) 14 cm

Problema 4. Sabe-se que a *média geométrica* (z) entre dois números positivos x e y é dada da seguinte forma

$$z = \sqrt{x \cdot y}$$

Um quadriculado 3×3 preenchido com números é chamado de *geomágico* quando, em cada linha horizontal, vertical ou diagonal, o termo do meio é a média geométrica dos outros dois.

Neste caso, preenchendo o quadriculado abaixo de modo que ele seja *geomágico*, encontra-se que $a + b + c$ vale:

4		1
16		c
	a	b

- a) 56 b) 314 c) 44 d) 52 e) 28

Problema 5. João e Maria trabalharam durante o ano de 2023 ministrando aulas particulares de matemática e ganharam 960 reais cada. Maria ministrou 16 aulas a mais do que João, porém Maria recebeu 2 reais a menos por cada aula. Quantas aulas João ministrou?

- a) 72 b) 74 c) 76 d) 78 e) 80

Problema 6. O *Sudoku* é um jogo de raciocínio lógico bastante conhecido. Neste caso, o objetivo é que o jogador preencha a tabela com números de 1 a 6, sem que haja quaisquer repetições de números na mesma linha e nem na mesma coluna, ou seja, cada número deve aparecer exatamente uma vez em cada linha e cada coluna. Sabendo disso, João completou o *Sudoku* abaixo e obteve como soma dos números obtidos nos quatro cantos externos (quadrados pintados de cinza) o valor de:

		2	1		
4					
1	2	5	4	6	3
	5	1		3	
			6	5	

Sudoku 6×6 .

- a) 12 b) 14 c) 15 d) 16 e) 18

Problema 7. Dados dois números m e n . Sabe-se que a média aritmética de m e n corresponde a um número que é 25% menor do que um deles. Além disso, essa mesma média aritmética corresponde a um valor que é $a\%$ maior do que o outro número.

Nessas condições, o valor de a é:

- a) 50 b) 55 c) 75 d) 150 e) 40

Problema 8. Os números reais a , b e c satisfazem as igualdades $\frac{a}{b+c} = \frac{1}{3}$ e $\frac{b}{c+a} = 2$. Assim, o valor de $\frac{c}{a+b}$ será:

- a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 2 d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{11}$

Problema 9. Artur resolveu escrever em uma folha branca todos os números inteiros menores do que 1000, nos quais os algarismos 1 e 2 aparecem exatamente uma vez em cada número escrito. Quantos números Artur terá que escrever?

- a) 52 b) 45 c) 46 d) 50 e) 48

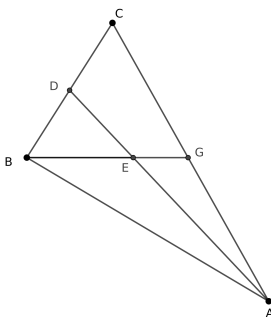
Problema 10. No planeta OPMAT, os times de futebol são formados por quatro opmatianos. Um grupo de 12 opmatianos pretende formar três times de futebol. Três opmatianos são goleiros e devem ficar em times separados. Outros três opmatianos jogam muito bem e também devem ficar em times separados. De quantas formas seria possível organizar os três times?

- a) 4320 b) 2160 c) 1080 d) 540 e) 270

Problema 11. Um conjunto X de inteiros positivos e distintos é formado por treze números múltiplos de onze, e apenas quatro desses números são pares. Sabendo que os elementos de X são os menores possíveis, nessas condições, assinale a alternativa que corresponde ao maior elemento do conjunto X .

- a) 187 b) 209 c) 143 d) 165 e) 275

Problema 12. Sabendo que na figura abaixo, $\overline{BE} = 4$, $\overline{EG} = 2$, $\overline{CG} = 6$, $\overline{BD} = 3$ e que $\overline{AD}$ é a mediana relativa ao vértice A no triângulo ABC , assinale a alternativa que representa a área do triângulo ABC .



- a) $\sqrt{3}$ b) $18\sqrt{3}$ c) 18 d) 9 e) $9\sqrt{3}$

Problema 13. Observe o padrão estabelecido para a construção da tabela abaixo. Em seguida assinale o termo que falta para completar a tabela.

C	G	J	N	Q	
3	7	15	31	63	

- a) T 127 b) U 126 c) T 131 d) U 127 e) V 131

Problema 14. Jorge e Manuela têm muitos gatos, todos irmãos, em sua casa. Jorge diz para Manuela: o gato Fratello tem o dobro de irmãos do que de irmãs. Maria, por sua vez, diz: e a gata Sorella tem 10 irmãos a mais do que o número de irmãs. Quantos gatos há na casa de Jorge e Manuela?

- a) 25 b) 27 c) 15 d) 16 e) 14

Problema 15. Assinale o número que representa a soma de todos os números de três algarismos distintos, formados com os algarismos 3, 5, 7 e 9.

- a) 8160 b) 14400 c) 15984 d) 1440 e) 144

Problema 16. Em uma caixa há cinco bolas idênticas, com as letras O, P, M, A e T. Em uma segunda caixa há três bolas idênticas, com as letras M, A e T. Uma bola é sorteada da primeira caixa e, a seguir, outra bola é sorteada da segunda caixa. Qual é a probabilidade de que essas bolas tenham a mesma letra?

- a) $1/6$ b) $1/5$ c) $1/4$ d) $1/3$ e) $1/2$

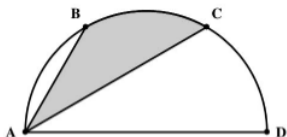
Problema 17. Na Progressão Aritmética $(2, 16, 30, 44, \dots)$ de primeiro termo 2 e razão 14, o segundo termo é um quadrado perfeito ($4^2 = 16$). Encontre o próximo termo dessa Progressão Aritmética que também é quadrado perfeito.

- a) 121 b) 100 c) 36 d) 81 e) 49

Problema 18. Qual o dígito das unidades de $y = x^2$ quando x for expresso por $x = 2024^2 + 2^{2024}$?

- a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

Problema 19. Os pontos B e C dividem o semicírculo AD de raio $r = 6 \text{ cm}$ em três arcos de comprimentos iguais, como mostra a figura. Qual é a área, em cm^2 , da região ABC que está hachurada.



- a) 18π b) 36π c) 9π d) 4π e) 6π

Problema 20. Alice e Bete são duas amigas que, apesar de boas amigas, as vezes gostam de gerar conflitos entre elas. Bete escreveu todos os números de 1 a 999 em um papel, tentando observar algum padrão. Todavia, Alice apagou todos os números nos quais 2 ou 3 aparecem mais de uma vez. Por exemplo, Alice não apagou 123 nem 382, mas apagou 322 e 433. Quantos números Bete contou após Alice ter apagado alguns números?

- a) 969 b) 846 c) 942 d) 959 e) 934

Gabarito da Primeira Fase

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	d	c	d	e	b	a	e	e	d
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	b	d	a	c	b	b	c	e	c

Segunda Fase

Problema 1. A empresa SAÚDE incentiva o viver saudável de suas funcionárias. Para isso, dispensa mais cedo, duas vezes por semana, aquelas envolvidas em alguma prática esportiva. Aproveitando a oportunidade, Amanda, Bruna, Celina e Deise decidiram se associar a uma academia de ginástica, mas escolheram atividades físicas diferentes, quais sejam, musculação, ioga, natação e ginástica aeróbica. O intuito principal delas é manter a forma e, se possível, perder peso. No momento, o peso de cada funcionária assume um dos seguintes valores: 55 kg, 58 kg, 60 kg ou 66 kg. Sabe-se também que:

- I- Amanda não faz musculação e não pesa 58 kg.
- II- Bruna faz ioga e não tem 55 kg.
- III- A jovem que faz musculação pesa 60 kg e não é a Celina.
- IV- A jovem com 58 kg faz natação.

Com base nessas informações, responda:

- a) Qual é o peso de Amanda?
- b) Deise faz qual atividade?
- c) Bruna é mais pesada que Celina?

Problema 2. Um número natural é chamado **natureba** se o seu algarismo das unidades é 6 e quando este algarismo 6 for retirado da posição das unidades e colocado no início do número, o novo número aumenta em 9 unidades.

A partir disso responda:

- a) Caso o número **natureba** tenha dois algarismos, qual é a soma desses algarismos?
- b) Caso o número **natureba** tenha três algarismos, qual é a soma desses algarismos?
- c) Qual é a soma dos algarismos do número **natureba**, caso ele tenha n algarismos?

Problema 3. Considere a seguinte sequência:

$$(a_1, a_2, a_3, 5, a_5, a_6, a_7, 2, \dots).$$

Definida de tal forma que a soma de três números consecutivos é sempre igual a 17, isto é, sempre teremos que

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 17$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$.

- a) Encontre o valor de a_{2010} .

Se 100 bolas são identificadas com os 100 primeiros números da sequência acima e elas são colocadas em uma urna. Responda:

- b) Qual é a probabilidade de se retirar duas bolas, sem reposição, de modo que a soma de seus números seja igual a 7?
- c) Qual é o número mínimo de bolas que devem ser retiradas, sem reposição, para que se possa garantir que pelo menos uma delas tenha o número 2?

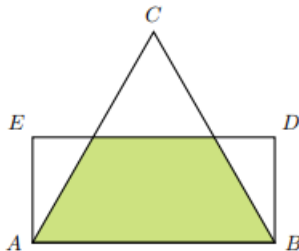
Problema 4. Sejam a, b números naturais ambos não nulos. Ruiter inventou uma operação aritmética representada por $\otimes$ e a definiu conforme segue:

$$a \otimes b = \frac{mmc(a, b)}{mdc(a, b)}.$$

Usando a operação que Ruiter inventou, responda:

- a) Qual é o valor de $(12 \otimes 8) \otimes 10$?
- b) Qual é o valor de $(24 \otimes 36) \otimes (45 \otimes 60)$?
- c) Se $120 \otimes b = 21$, qual é o valor de b ?

Problema 5. O triângulo equilátero ABC e o retângulo $ABDE$ mostrados na figura abaixo possuem a mesma área. Sabendo que $\overline{AB} = 8$ cm e que os pontos G e H são os pontos de interseção do segmento ED com os segmentos AC e BC , respectivamente, determine:



- A altura e a área do triângulo GCH .
- O perímetro da região formada pela interseção do triângulo equilátero ABC e o retângulo $ABDE$.
- A área da região formada pela interseção do triângulo equilátero ABC e o retângulo $ABDE$.
- A razão entre a área do trapézio, ou seja, da região formada pela interseção do triângulo ABC e do retângulo $ABDE$ e a área do triângulo ABC ?

Problema 6. Uma caixa contém $2n$ bolas distintas, das quais a são vermelhas e b são azuis, com $a + b = 2n$. Uma bola é retirada da caixa, ao acaso, e recolocada. Em seguida, uma outra bola é retirada ao acaso.

- Calcule a probabilidade de que as duas bolas sejam da mesma cor quando $n = 3$ nos casos em que:
 - $a = 2, b = 4$.
 - $a = b = 3$.
- Calcule, no caso geral, a probabilidade p de que as duas bolas sejam da mesma cor.
- Mostre que tal probabilidade p é mínima para $a = b = n$. Nessas condições, qual é o valor de p ?

Gabarito da Segunda Fase

Problema 1. (Resolução da Ana Julia da Silva- Centro Estadual de Educação Profissional Agrícola Augusto Ribas)

Construindo uma tabela:

(Seja A = Amanda, B = Bruna, C = Celine e D = Denise)

- A → não tem 58 kg, logo não faz natação;
A → não faz musculação e nem ioga, logo faz ginástica;
B → não faz natação, nem tem 58 kg (C ou D);
C → ela não faz musculação, logo faz natação (58 kg);
D → Musculação (60 kg);
B → não pesa 55 kg, então pesa 66 kg.

F	Atividade	Peso
A	Ginástica	55 kg
B	Ioga	66 kg
C	Natação	58 kg
D	Musculação	60 kg

- a) Amanda pesa 55 kg, para determinar isso fiz o uso de uma tabela e racionei logicamente as informações. Sabe-se que a Amanda não pesa 58 kg, então não faz natação.
Ela também não faz musculação, então não pesa 60 kg, e como Bruna faz ioga resta para Amanda fazer ginástica aeróbica. Quem faz musculação pesa 60 kg, quem faz natação pesa 58 kg, e quem faz ioga (Bruna) não pesa 55 kg, logo Bruna só pode pesar 66 kg, fazendo com que Amanda tenha 55 kg.
- b) Sabe-se que Amanda faz ginástica e Bruna faz ioga, a afirmação III diz que Celine não faz musculação também, então Deise é quem faz musculação, pois é quem sobra.
- c) Amanda pesa 55 kg, Celine pesa 58 kg (é quem faz natação, foi quem sobrou), Deise pesa 60 kg graças a musculação e para Bruna restou 66 kg. Como $66 > 58$, Bruna é sim mais pesada que Celine.

Problema 2. (*Resolução Lucas Rocha de Oliveira – Colégio Estadual Regente Feijó*)

- a) O algarismo da unidade deve ser 6, como representado a seguir (tendo A como o algarismo desconhecido):

$$A6$$

Para formarmos o número natural, é necessário que o 6 esteja na casa das dezenas: $A6$. A diferença desses números deve ser 9. Portanto:

$$6A - A6 = 09$$

Para esta operação ser verdadeira, o único valor possível de A é 5. Logo, a soma dos algarismos do número natural é:

$$5 + 6 = 11$$

- b) Utilizando a mesma lógica do item (a), temos:

$$6A5 - A56 = 009$$

O único valor possível para B é 5. Portanto:

$$6A5 - A56 = 009$$

Como uma unidade da dezena foi utilizada no primeiro cálculo, o A deve ser anulado pelo 5. Assim, temos $A = 6$. Logo, o número natural é 656. Sua soma é:

$$6 + 5 + 6 = 17$$

- c) É perceptível um padrão nos números naturais, sendo aquele em que o algarismo da dezena é 5 e os outros algarismos são 6 (pois a subtração das unidades sempre deve ser $5 - 6$, para sobrar 9).

Com apenas uma unidade “emprestada” restante, a soma de seus algarismos pode ser expressa desta maneira:

$$6(n-1)+5$$

Onde n é a quantidade de algarismos (subtraímos 1 a fim de descobrir quantos “6” tem o número, e o 5 é o número que difere). Logo:

$$6n - 6 + 5 \implies 6n - 1$$

Problema 3. (Resolução da Ana Julia da Silva - Centro Estadual de Educação Profissional Agrícola Augusto Ribas)

- a) Para encontrar o valor de a_{2010} , determinamos primeiro qual é a sequência

Se $a_2 + a_3 + 5 = 17$, então $a_2 + a_3 = 12$, com isso encontra-se $a_1 = 5$. De mesmo modo, temos $5 + a_5 + a_6 = 17$, então $a_5 + a_6 = 12$, logo $a_7 = 5$ (isto para que se respeite a condição do enunciado: $a_5 + a_6 + a_7 = 17$).

Sabendo que $a_7 = 5$, $a_8 = 2$, podemos determinar que $a_9 = 10$, isto por que 3 termos consecutivos sempre somam 17, concluímos então que os números da sequência são repetições de 2, 5, 10, ou seja, a sequência é: (5, 2, 10, 5, 2, 10, ...).

Agora para determinar o valor associado a a_{2010} , basta dividir 2010 por 3 para verificar quantos grupos de {5, 2, 10} ele comporta e se há resto da divisão. Ao realizar tal divisão, notamos que $2010 = 3 \times 670$, como não há resto, podemos determinar que o valor de a_{2010} é 10.

- b) Para que tal soma ocorra devem ser retiradas uma bola com o número 5 e uma bola com o número 2. Considerando as 100 bolinhas, sabemos que 33 delas possuem o número 2, 33 possuem o número 10 e 34 possuem o número 5. Isto porque $100 = 3 \times 33 + 1$, e o primeiro número da sequência é o 5. Vamos separar em duas situações:

- I- Tirar uma bola com o número 5 e depois com o número 2.

$$P_{5,2} = \frac{34}{100} \times \frac{33}{99} = \frac{17}{150}$$

II- Tirar uma bola com o número 2 e depois com o número 5.

$$P_{2,5} = \frac{33}{100} \times \frac{34}{99} = \frac{17}{150}$$

Considerando a união dos dois casos acima, sabe-se que a probabilidade pedida no enunciado equivale a $\frac{34}{150}$, ou seja, $\frac{17}{75}$.

- c) No pior dos casos serão retiradas as 33 bolas com o número 10, as 34 com o número 5 e só uma bola com o número 2. Logo o número mínimo de bolas que devem ser retiradas, sem reposição, para garantir que uma delas tenha o número 2 é de 68 bolas.

Problema 4. (*Resolução de João Gustavo Verner Eidam - Centro Estadual de Educação Profissional Agrícola Augusto Ribas*)

- a) Temos que $(12 \otimes 8) = \frac{\text{mmc}(12,8)}{\text{mdc}(12,8)}$. Fatorando os números 12 e 8, obtemos $\text{mmc}(12, 8) = 24$ e $\text{mdc}(12, 8) = 4$. Assim $(12 \otimes 8) = \frac{24}{4} = 6$.

Com isso, temos que $6 \otimes 10 = \frac{\text{mmc}(6,10)}{\text{mdc}(6,10)}$. Analogamente, pela fatoração de 6 e 10 em fatores primos, obtemos $\text{mmc}(6, 10) = 30$ e $\text{mdc}(6, 10) = 2$. Assim, $6 \otimes 10 = \frac{30}{2} = 15$, sendo esse o valor da expressão dada.

- b) Temos, para $(24 \otimes 36) = \frac{\text{mmc}(24,36)}{\text{mdc}(24,36)}$, sendo que $24 = 2^3 \times 3$ e $36 = 2^2 \times 3^2$, dessa forma, $\text{mmc}(24, 36) = 3^2 \times 2^3 = 72$, e $\text{mdc}(24, 36) = 2^2 \times 3 = 12$. Assim, $(24 \otimes 36) = \frac{72}{12} = 6$.

Temos, para $(45 \otimes 60) = \frac{\text{mmc}(45,60)}{\text{mdc}(45,60)}$, sendo que $45 = 3^2 \times 5$ e $60 = 3 \times 5 \times 2^2$, dessa forma, $\text{mmc}(45, 60) = 3^2 \times 2^2 \times 5 = 180$, e $\text{mdc}(45, 60) = 3 \times 5 = 15$. Assim, $(45 \otimes 60) = \frac{180}{15} = 12$.

Por fim, temos para $6 \otimes 12 = \frac{\text{mmc}(6,12)}{\text{mdc}(6,12)}$, sendo que $6 = 3 \times 2$ e $12 = 3 \times 2^2$, assim $\text{mmc}(6, 12) = 2^2 \times 3 = 12$ e $\text{mdc}(6, 12) = 3 \times 2 = 6$.

Portanto, $6 \otimes 12 = \frac{12}{6} = 2$, sendo esse o resultado da expressão dada.

- c) O valor de b é 280. Para isso, temos $120 \oplus b = 21 \Rightarrow \frac{\text{mmc}(120, b)}{\text{mdc}(120, b)} = 21 \Rightarrow \text{mmc}(120, b) = 21 \times \text{mdc}(120, b)$, logo, $\text{mmc}(120, b)$ é múltiplo de 21, no caso, é o 840. Com isso, um número que, multiplicado por 21, resulte em 840, sendo ele igual a 40. Logo, ambos os números têm esse faotre, como $\frac{840}{40} = 3 \times 7$ e o fator 3 já está contido em 120, resta a b , ser igual a $40 \times 7 = 280$.

Problema 5. (Resolução de Mitzi Vedan de Ramos - Colégio Integração)

- a) Sabemos que o triângulo equilátero ABC e o retângulo $ABDE$ têm a mesma área e que $AB = 8\text{ cm}$.

Como ABC é equilátero:

$$A_{ABC} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$$

Como $ABDE$ tem mesma área de ABC e base $AB = 8$:

$$A = b \cdot h \Rightarrow 16\sqrt{3} = 8 \cdot h \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

Altura do triângulo ABC :

$$h_{ABC} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Já que a altura do retângulo ocupa parte da altura do triângulo, temos:

$$\begin{aligned} h_{GCH} &= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ h_{GCH} &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Como os triângulos ABC e GHC são semelhantes, a razão entre suas alturas correspondentes é igual à razão entre seus lados correspondentes, ou seja,

$$\frac{GH}{AB} = \frac{h_{GCH}}{h_{ABC}} \Rightarrow \frac{GH}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{GH}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow GH = \frac{AB}{2}$$

Substituindo $AB = 8$ na fórmula anterior, temos:

$$GH = \frac{8}{2} \Rightarrow GH = 4$$

$$A_{GCH} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{GCH} = 4\sqrt{3}$$

- b) Como $GH = 4$, $AB = 8$ e $AG = BH$, o perímetro da área sombreada pode ser descrito da seguinte forma:

$$P_{ABHG} = 4 + 8 + AG + BH \Rightarrow P_{ABHG} = 12 + 2BH$$

Já que $AB - GH = 4$, temos que $EG = 2$ e $HD = 2$. Aplicando o teorema de Pitágoras em BDH:

$$BH^2 = DB^2 + HD^2$$

$$BH^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2$$

$$BH^2 = 12 + 4$$

$$BH^2 = 16$$

$$BH = \sqrt{16} \Rightarrow BH = 4$$

Por fim, substituindo na fórmula do perímetro do trapézio, temos:

$$P_{ABHG} = 12 + 2BH$$

$$P_{ABHG} = 12 + 2 \times 4$$

$$P_{ABHG} = 12 + 8$$

$$P_{ABHG} = 20\text{cm}$$

- c) A fórmula da área do trapézio ABHG é definida por

$$A_{ABHG} = \frac{h(AB + GH)}{2}$$

Porém, ela também pode ser descrita como

$$A_{ABHG} = A_{ABC} - A_{GHC} = 16\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$

$$A_{ABHG} = 12\sqrt{3}\text{cm}^2$$

- d) A razão entre as áreas do trapézio e do triângulo encontradas anteriormente é

$$\frac{A_{ABHG}}{A_{ABC}} = \frac{12\sqrt{3}}{16\sqrt{3}}$$

$$\frac{A_{ABHG}}{A_{ABC}} = \frac{3}{4}$$

Problema 6. (Resolução de Felipe Tramontin - Colégio Sant'Ana)

- a) (i) $a = 2, b = 4$

Vamos calcular todas as probabilidades, calculamos as probabilidades separadamente e depois as somamos.

Para $a = 2, b = 4$:

$$P(2 \text{ vermelhas}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36}$$

$$P(2 \text{ azuis}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36}$$

$$P(\text{mesma cor}) = \frac{4}{36} + \frac{16}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

No caso (i), a probabilidade é de $\frac{5}{9}$.

- (ii) $a = b = 3$

Para $a = 3, b = 3$:

$$P(2 \text{ vermelhas}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$$

$$P(2 \text{ azuis}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$$

$$P(\text{mesma cor}) = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

No caso (ii), a probabilidade é de $\frac{1}{2}$.

b)

Seguindo a mesma lógica da questão anterior, e apenas mudando o fato de que não temos números exatos, mas variáveis, teremos a fórmula:

- Casos onde ambas são vermelhas: $\frac{a}{2n} \cdot \frac{a}{2n} = \frac{a^2}{4n^2}$
- Casos onde ambas são azuis: $\frac{b}{2n} \cdot \frac{b}{2n} = \frac{b^2}{4n^2}$

Somando os dois casos:

$$p = \frac{a^2}{4n^2} + \frac{b^2}{4n^2} = \frac{a^2 + b^2}{4n^2}$$

Resposta: $p = \frac{a^2 + b^2}{4n^2}$

c)

Para responder essa questão, vou elaborar uma tabela cujos valores de n é 3 e os valores de a e b variam:

A	B	PROBABILIDADE
0	6	100% ou 1
1	5	72,22% ou $\frac{13}{18}$
2	4	55,55% ou $\frac{5}{9}$
3	3	50% ou $\frac{1}{2}$
4	2	55,55% ou $\frac{5}{9}$
5	1	72,22% ou $\frac{13}{18}$
6	0	100% ou 1

Podemos ver que a probabilidade vai diminuindo conforme a diferença entre a e b diminui. Alcançamos o ponto mínimo onde $a = b = n$.

Nessas condições ($a = b = n$), o valor de p é $\frac{1}{2}$ ou 50%.



Olimpíada Pontagrossense
de Matemática **UEPG**

Curiosidades

Um taxi, dois matemáticos, e o número perfeito.

O número 1729 é famoso por sua aparição em uma história clássica envolvendo os matemáticos Harold Hardy e Srinivasa Ramanujan.

Ramanujan nasceu na Índia em 1887 e, sem formação acadêmica formal, desenvolveu milhares de fórmulas matemáticas por conta própria. Ele acreditava que suas ideias eram revelações divinas, enquanto o matemático britânico Hardy, da Universidade de Cambridge, era um defensor do rigor matemático.

A história conta que certa vez Hardy foi visitar Ramanujan no hospital, em 1918. Ao chegar, comentou casualmente:

“Vim no táxi número 1729. Um número sem graça, espero que não seja um mau presságio.”

Ramanujan, mesmo doente, respondeu com brilho nos olhos:

“Não, é um número muito interessante! É o menor número que pode ser expresso como a soma de dois cubos de duas maneiras diferentes.”

Desde então, o número 1729 é considerado “especial”, conhecido como o número de Hardy-Ramanujan. É o menor número que pode ser expresso como a soma de dois cubos de duas maneiras diferentes:

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$$

Um pouco mais da história de Srinivasa Ramanujan, pode ser vista no filme "O homem que viu o infinito".



Taxi 1729, cena do filme "O homem que viu o infinito"

Fonte: KANIGEL, Robert. The Man Who Knew Infinity: a life of the genius Ramanujan. New York: Charles Scribner's Sons, 1991.

A mulher por trás de "Monsieur LeBlanc"

Na França do século XVIII, mulheres eram proibidas de frequentar instituições como a École Polytechnique, em Paris. Foi então que Sophie Germain, utilizou um pseudônimo masculino "Monsieur LeBlanc", desta maneira ela conseguiu se comunicar com importantes matemáticos da época, um deles Carl Friedrich Gauss.

O contexto político da época era conturbado, e quando Napoleão ocupou a cidade onde Gauss vivia, Sophie intercedeu por sua segurança. Gauss ficou surpreso ao descobrir que seu brilhante correspondente era uma mulher e elogiou sua coragem e genialidade, dizendo: "Quando uma mulher, por causa de seu sexo, nossos costumes e preconceitos encontra infinitamente mais obstáculos para se familiarizar com a teoria dos números, e ainda assim vence as dificuldades e penetra no que está oculto, ela certamente tem a mais nobre das coragens, talento extraordinário, e gênio superior".

Apesar de todo o seu brilhantismo a matemática só pode frequentar a Academia de Ciências da França em 1823, com a mudança de regulamentos. Germain é considerada uma das fundadoras da teoria da elasticidade e deixou contribuições importantes para a teoria dos números, como os Primos de Germain.



Selo comemorativo 240 anos de Sophie Germain, La Posto

<https://impa.br/notices/na-folha-viana-counta-que-sophie-germain-usou-pseudonimo-masculino/>



Olimpíada Pontagrossense
de Matemática **UEPG**

**Soluções dos
Problemas
Propostos**

Parabenizamos nossos leitores que enviaram as soluções dos problemas propostos do sexto volume publicado em 2024:

Problema 1. Se $3^x = 69$ e $23^y = 69$, encontre o valor de

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Solução de Jardel Leite de Oliveira - Escola de Ensino Médio em Tempo Integral Dona Maria Amélia Bezerra - Juazeiro do Norte, CE:

Queremos calcular $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, que reescrevendo, temos: $\frac{y+x}{xy}$.

Sejam:

$$3^x = 69 \quad (\text{I})$$

$$23^y = 69 \quad (\text{II})$$

Então, por comparação, temos que:

$$3^x = 23^y \quad (\text{III})$$

Dividindo a equação (I), por 3, temos:

$$3^{x-1} = 23 \quad (\text{IV})$$

Agora podemos substituir o resultado (IV) na equação (III), onde vamos obter:

$$\begin{aligned} 3^x &= (3^{x-1})^y \\ 3^x &= 3^{xy-y} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$x = xy - y$$

$$x + y = xy$$

Dividindo ambos os membros da equação por xy , obtemos:

$$\frac{x+y}{xy} = 1$$

Logo, temos

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$$

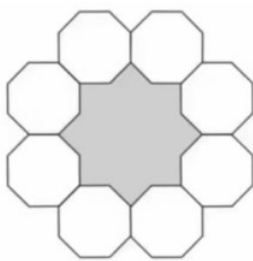
Além disso:

$$\frac{x+y}{xy} = 1$$

Portanto, por transitividade,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

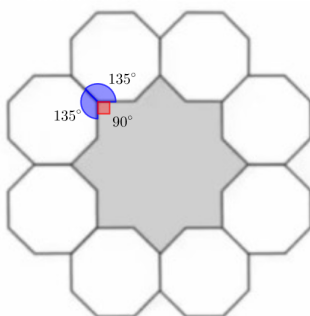
Problema 2. A figura abaixo mostra 8 octógonos regulares unidos envolvendo uma forma sombreada.



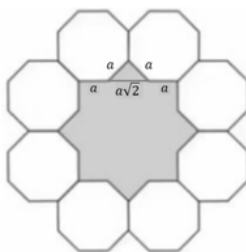
Cada octógono tem lados de comprimento a . Encontre, em termos de a , uma expressão para a área da região sombreada? Dê sua resposta na forma: $p(2 + \sqrt{2})a^2$, em que p é um número inteiro.

Solução de Jardel Leite de Oliveira - Escola de Ensino Médio em Tempo Integral Dona Maria Amélia Bezerra - Juazeiro do Norte, CE:

Como a figura é formada por 8 octógonos regulares, então podemos redesenhar a imagem do problema acrescentando os seguintes ângulos:



Ou seja, nosso problema se resume em obter a soma das áreas de um quadrado de lado $a(2 + \sqrt{2})$ e de 4 triângulos isósceles de lado a , conforme figura abaixo:



Assim, chamando de S a área sombreada, teremos

$$S = [a(2 + \sqrt{2})]^2 + 4 \times \frac{a \times a}{2}$$

$$S = a^2(4 + 4\sqrt{2} + 2) + 2a^2$$

$$S = a^2(6 + 4\sqrt{2}) + 2a^2$$

$$S = a^2(6 + 4\sqrt{2} + 2)$$

$$S = a^2(8 + 4\sqrt{2})$$

$$S = 4a^2(2 + \sqrt{2})$$

Portanto, a área da região sombreada, em função de a , é $4(2 + \sqrt{2})a^2$ com $p = 4$.

Problema 3. Observe as igualdades a seguir:

$$\begin{aligned}3^2 + 4^2 &= 5^2 \\5^2 + 12^2 &= 13^2 \\7^2 + 24^2 &= 25^2 \\9^2 + 40^2 &= 41^2 \\&\dots\end{aligned}$$

Considere a igualdade $17^2 + x^2 = y^2$. Qual o valor de $x + y$?

Solução de João Victor Zampieri - Escola Estadual Medalha Milagrosa - Ponta Grossa, PR:

Para começar a solucionar, vemos que há um padrão na forma que as bases das potências das equações crescem.

Observe que a base da primeira potência, sempre cresce em 2 unidades de uma equação para outra. Além disso, vemos que a base da terceira potência é sempre 1 unidade maior que a base da segunda potência. Já a base segunda potência, cresce em um padrão um pouco diferente, da seguinte forma; a base da segunda potência, é igual a base da segunda potência da equação anterior, mais 4 vezes o "número" da equação que estamos, por exemplo na terceira equação:

$$\begin{aligned}12 + (4 \times 3) &= \\12 + 12 &= \\24 &= \end{aligned}$$

O 12, representa a base da segunda potência, da segunda equação, o 3 representa que estamos calculando a base da segunda potência da terceira equação, e observe que de fato, encontramos a base da segunda potência da terceira equação. Dessa forma, vamos construir as potências, até chegarmos na equação que possua o 17^2 ,

como pede o enunciado.

$$\begin{aligned}
 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\
 5^2 + 12^2 &= 13^2 \\
 7^2 + 24^2 &= 25^2 \\
 9^2 + 40^2 &= 41^2 \\
 11^2 + 60^2 &= 61^2 \\
 13^2 + 84^2 &= 85^2 \\
 15^2 + 112^2 &= 113^2 \\
 17^2 + 144^2 &= 145^2
 \end{aligned}$$

Então chegamos que $17^2 + 144^2 = 145^2$, observe que essa equação, é parecida com a do enunciado, então concluímos que $x = 144$ e $y = 145$, portanto:

$$x + y = 144 + 145 = 289$$

Problema 5. A respeito da resposta de um exercício, Ana, Beatriz, Carolina e Daniela fizeram as seguintes afirmações:

- Ana: É maior que 5.
- Beatriz: É menor que 10.
- Carolina: É um número primo.
- Daniela: É maior que 12.

Entre as afirmações anteriores, quantas, no máximo, podem ser verdadeiras?

Solução de Julia Stanislavski e Silva - Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell du Vernay - Ponta Grossa, PR:

Podem estar corretas, no máximo, três afirmativas. Se Ana estiver dizendo a verdade ao afirmar que a resposta do exercício é maior que 5, então os números 1, 2, 3, 4, 5 devem ser descartados. Se Beatriz também disser a verdade, ao declarar que a resposta é menor que 10, os números possíveis passam a ser: 6, 7, 8, 9. Nesse intervalo, Carolina igualmente estaria certa ao afirmar que “existe um número primo entre os possíveis valores”, já que o número 7 é primo. Daniela não poderia estar dizendo a verdade.



Olimpíada Pontagrossense
de Matemática **UEPG**

Problemas Propostos

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos. As melhores soluções serão publicadas no próximo volume com a devida menção do(s) autor(es).

Problema 1. Posso 9 laranjas e sei que uma delas está estragada e por isso mais leve. As outras têm o mesmo peso. Usando uma balança de dois pratos, com apenas duas pesagens, como posso descobrir a laranja estragada?

Problema 2. Uma calculadora quebrada pode somente somar, subtrair e obter o inverso dos números. Como podemos calcular o produto de dois números com essa máquina? (Sugestão: tente obter uma expressão para calcular o quadrado de um número).

Problema 3. Construimos dois triângulos equiláteros: ABE interno e BFC externo ao quadrado $ABCD$. Prove que os pontos D , E e F se localizam na mesma reta.

Problema 4. Três amigos: André, Bianca e Caio disputam um torneio de xadrez, jogando o mesmo número de partidas entre si. Ao final da competição, fizeram as seguintes declarações:

André: “Venci o maior número de partidas.”

Bianca: “Perdi o menor número de partidas.”

Caio: “Ganhei o maior número de pontos.”

É possível que os três tenham falado a verdade? (Cada jogador ganha 0 pontos quando perde, 0,5 pontos quando empata, e 1 ponto quando vence uma partida.)

Problema 5. Sejam a , b e c positivos. Prove que

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

Problema 6. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 8, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 22, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -\frac{z}{xy}. \end{cases}$$



Olimpíada Pontagrossense
de Matemática **UEPG**

Informações Gerais

Envio de Artigos e Soluções

Os **Artigos** podem ser submetidos para a publicação nos próximos volumes da Revista da OPMat. Os documentos devem ser, preferencialmente, redigidos em LaTeX. As **Soluções** para os desafios encontrados na seção "Problemas Propostos" devem ser claras e submetidas juntamente com o nome do participante e o número da respectiva questão.

As submissões de artigos e soluções podem ser feitas pelo e-mail:

revistaopmat@gmail.com

Como Adquirir a Revista

A versão eletrônica está disponível no link:

<https://www2.uepg.br/opmat/revista-da-opmat/>

Fale Conosco

Entre em contato em caso de dúvidas, sugestões e correções.

Comitê Editorial

revistaopmat@gmail.com

Olímpiada Pontagrossense de Matemática

opmat@uepg.br - (42) 3220-3048

www2.uepg.br/opmat/

facebook.com/opmat.uepg

Instagram: @opmat_uepg

Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Estadual de Ponta Grossa

Campus Uvaranas - Bloco L - Uvaranas

Avenida General Carlos Cavalcanti, 4748

Ponta Grossa - Paraná - CEP 84030-000

demat@uepg.br - (42) 3220-3050

www2.uepg.br/demat/

REALIZAÇÃO:



APOIO:



Informações:

www2.uepg.br/opmat

E-mail: opmat@uepg.br

www.facebook.com/olimpiada.pontagrossensedematematica

Instagram: [@opmat_uepg](https://www.instagram.com/opmat_uepg)

Fones: 99831-1222 / 3220-3048