

Você está participando da
12ª Olimpíada Pontagrossense de Matemática!
Primeira Fase - Nível 4

Instruções

A duração da prova é de 3 horas. E o tempo mínimo de prova é de 30 minutos. O caderno de questões pode ser feito à lápis ou à caneta, você poderá levá-lo para a casa.

É permitido o uso de borracha, régua, esquadros e compasso para resolver as questões da prova.

Durante a prova não será permitido: comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas; bem como usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios, *smartwatches*, etc.). Não é permitido entrar na sala de aplicação de provas com folhas de rascunho, anotações ou livros.

Você receberá um cartão de respostas. Ele é personalizado. Verifique se o cartão de respostas que você recebeu tem seu nome, em caso afirmativo assine-o ou então comunique ao fiscal de sala que o cartão que você recebeu não é o seu.

O cartão de respostas que você recebeu tem 60 questões, mas sua prova tem apenas 20 questões, assim você deve marcar as respostas de sua prova nas questões do seu cartão de respostas numeradas de 1 a 20.

Cada questão tem cinco alternativas de resposta: (a), (b), (c), (d), (e), e apenas uma delas é correta.

Marque suas respostas com caneta esferográfica com tinta azul escura ou preta, escrita grossa e de corpo transparente. Como no exemplo abaixo:

Questão 60: Enunciado?

- (a) Correta
- (b) Incorreta
- (c) Incorreta
- (d) Incorreta
- (e) Incorreta

60
<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>

Observe que a alternativa correta da Questão 60 é (a), e no gabarito, na Questão 60 o quadradinho (a) foi preenchido. Lembre-se de pintar todo o quadradinho, como na figura.

Marque apenas uma alternativa para cada questão. Marcando mais de uma alternativa perderá os pontos da questão, mesmo que uma das alternativas seja a correta.

Ao final da prova, entregue o cartão de respostas para o fiscal de sala.

Boa Prova! Que a Matemática esteja com você!

Realização:

Apoio:

Questão 1

Rascunho

João, Joaquim e Jorge são suspeitos de roubar o celular da Diretora do Colégio, eles foram levados à presença de um velho e sábio professor de Matemática do Colégio. Sabe-se que um e apenas um dos suspeitos é culpado e que o culpado às vezes fala a verdade e às vezes mente. Sabe-se, também, que dos outros dois suspeitos, ou seja, dos suspeitos que na verdade são inocentes, um sempre mente e o outro sempre diz a verdade. O velho e sábio professor de Matemática perguntou, a cada um dos suspeitos, qual entre eles era o culpado.

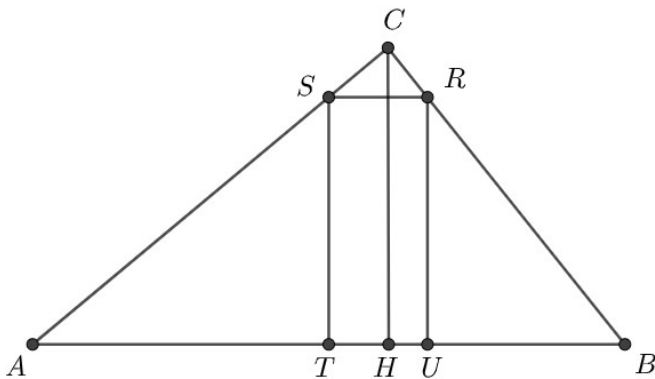
- O João disse: "Eu sou o culpado".
- O Joaquim disse, apontando para o João: "Ele é o culpado".
- Disse, por fim, o Jorge: "Eu roubei o celular da diretora e o culpado sou eu".

O velho e sábio professor de Matemática, então, sorriu e concluiu corretamente que:

- (a) O culpado é o Joaquim e o Jorge é o inocente que sempre mente
- (b) O culpado é o Jorge e o João é o inocente que sempre mente
- (c) O culpado é o João e o Jorge é o inocente que sempre mente
- (d) O culpado é o Jorge e o João é o inocente que sempre diz a verdade
- (e) O culpado é o João e o Joaquim é o inocente que sempre mente

Questão 2

Na figura abaixo, sabe-se que $\overline{AB} = 12$ cm, $\overline{CH} = 6$ cm e que CH é perpendicular a AB . Além disso, a área do retângulo $RSTU$ é igual a 10 cm².



Considerando que um dos lados do retângulo mede mais do que 1 cm, assinale a alternativa que representa as medidas dos lados desse retângulo.

- (a) 2 e 5 centímetros
- (b) 1 e 10 centímetros
- (c) 3,33 e 3 centímetros
- (d) 2,5 e 4 centímetros
- (e) 1,25 e 8 centímetros

Questão 3

Pedro lança um dado honesto três vezes e observa o produto dos resultados. Ele ganha um prêmio se o produto for igual a um número N .

Entre os valores abaixo, qual escolha de N maximiza a probabilidade de vitória?

- (a) 16
- (b) 18
- (c) 20
- (d) 24
- (e) 30

Rascunho

Questão 4

Rascunho

Amarildo, Bruno e Camilo receberam uma proposta para executar uma obra da prefeitura. Em seguida são registradas as declarações dadas pelos três, após a conclusão da obra:

- Amarildo: Não é verdade que Bruno e Camilo executaram a obra.
- Bruno: Se Amarildo não executou a obra, então Camilo a executou.
- Camilo: Eu não executei a obra, mas Amarildo ou Bruno a executaram.

Se somente a afirmação de Bruno é falsa, então a obra foi executada apenas por:

- (a) Bruno e Camilo
- (b) Amarildo e Camilo
- (c) Camilo
- (d) Amarildo
- (e) Bruno

Questão 5

Suponha que Márcio tenha um total de 30 moedas, sendo que algumas são de cinco centavos, outras de dez centavos e outras ainda de vinte e cinco centavos. Márcio no total tem R\$ 4,15 em dinheiro.

Um dia Márcio encontra uma varinha mágica que tem a capacidade de transformar moedas de cinco centavos em dez centavos e de dez centavos em vinte e cinco centavos.

Depois que Márcio acenou com a varinha sobre o dinheiro, ele descobre que tem R\$ 6,00.

Quantas moedas de dez centavos Márcio tinha inicialmente?

- (a) 9
- (b) 10
- (c) 11
- (d) 12
- (e) 8

Questão 6

Suponha que $P\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1$. Qual é a soma de todos os valores de x para os quais $P(3x) = 7$?

- (a) $-\frac{1}{3}$
- (b) $\frac{0}{2}$
- (c) $-\frac{1}{9}$
- (d) $\frac{5}{9}$
- (e) $\frac{5}{3}$

Questão 7

Uma ampliação faz com que a área de um quadrado aumente em 44%. Sabendo que o quadrado permaneceu com seus ângulos retos, o aumento no raio do círculo circunscrito a esse quadrado foi de:

- (a) 10%
- (b) 20%
- (c) 22%
- (d) 40%
- (e) 44%

Questão 8

Sejam x , y e z números reais, $y \geq 0$, que satisfazem a equação:

$$x^2y + 2x\sqrt{y} + z^6 - 2z^3 = -2$$

Determine o valor de z .

- (a) 2
- (b) -2
- (c) 1
- (d) $\sqrt{2}$
- (e) -3

Rascunho

Questão 9

Rascunho

Considere uma urna com 7 bolas vermelhas, 5 azuis e 4 brancas, todas indistinguíveis quanto ao tamanho e ao material. Retiram-se duas bolas sucessivamente, sem reposição.

Sabendo que as duas bolas retiradas têm cores diferentes, qual é a probabilidade de que uma delas seja vermelha e a outra branca?

- (a) $\frac{28}{83}$
- (b) $\frac{7}{30}$
- (c) $\frac{37}{120}$
- (d) $\frac{56}{83}$
- (e) $\frac{1}{2}$

Questão 10

Carlos, começando com R\$ 128,00, faz seis apostas consecutivas, em cada uma das quais arrisca perder ou ganhar a metade do que possui naquele momento.

Se ele ganha três e perde três dessas apostas, pode-se afirmar que ele:

- (a) Ganha ou perde dinheiro, pois depende da ordem em que ocorrem suas vitórias e derrotas
- (b) Ganha dinheiro
- (c) Não ganha dinheiro nem perde dinheiro
- (d) Perde R\$ 54,00
- (e) Perde R\$ 74,00

Questão 11

Rascunho

O Palácio do Congresso Nacional é um dos cartões postais da cidade de Brasília-DF. Foi projetado pelo arquiteto Oscar Niemeyer e pelo engenheiro estrutural Joaquim Cardoso, o edifício abriga o Senado Federal (cúpula voltada para baixo).

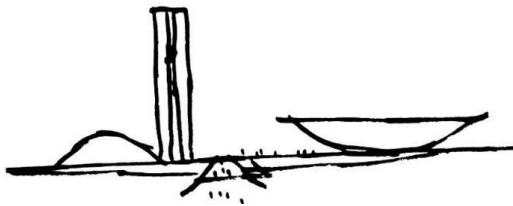
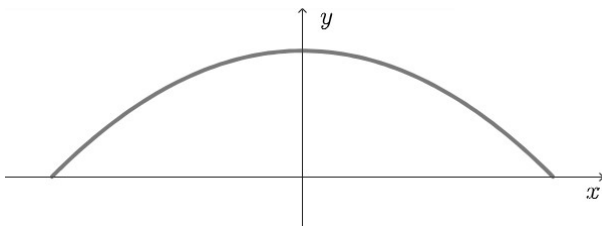


Figura 1: Croqui do Palácio, Oscar Niemeyer.

A Cúpula do Senado pode ser aproximada por um parabolóide de revolução, gerado pelo giro de uma parábola.



Sabendo que a cúpula possui aproximadamente 40 m de diâmetro e 10 m de altura, determine a equação cartesiana da parábola geradora. Suponha que os pontos em que a cúpula toca o solo correspondem às raízes da parábola, e que seu ponto mais alto pertence ao eixo das ordenadas.

- (a) $y = -\frac{1}{40}x^2 + 10$
- (b) $y = \frac{1}{40}x^2 + x + 10$
- (c) $y = \frac{1}{40}x^2 + 10$
- (d) $y = -\frac{1}{40}x^2 + x + 10$
- (e) $y = -\frac{1}{40}x^2$

Questão 12

Rascunho

Considere a sequência numérica:

$$1, 3, 7, 15, 31, \dots$$

Chamamos de a_n o n -ésimo termo dessa sequência. Por exemplo, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7, \dots$

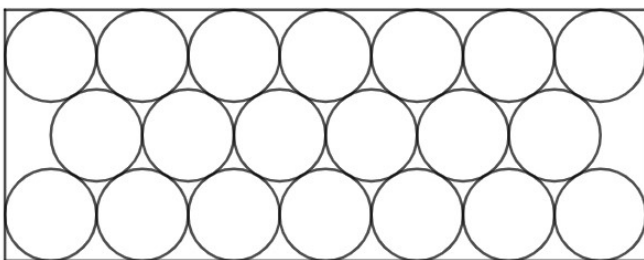
Sabe-se que o primeiro termo é $a_1 = 1$ e que, para todo número natural $n \geq 1$ cada termo seguinte é igual a 2 vezes o termo anterior mais 1. Isto é, $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

Qual é o valor de $\frac{a_{20} + 1}{a_{16} + 1}$?

- (a) 4
- (b) 8
- (c) 12
- (d) 16
- (e) 20

Questão 13

A secção transversal de uma caixa de lápis de cor é um retângulo que acomoda os lápis como na figura.



Se o raio de cada círculo do lápis é r , as dimensões do retângulo são:

- (a) $14r$ e $2r(1 + \sqrt{3})$
- (b) $14r$ e $6r$
- (c) $7r$ e $3r$
- (d) $14r$ e $3r$
- (e) $(2 + 3\sqrt{3})r$ e $2r\sqrt{3}$

Questão 14

Rascunho

Carlinhos está estudando potências de 2. Ele deseja contar quantos números da forma 2^n satisfazem simultaneamente as seguintes condições:

- I. são menores ou iguais a 32^5 ;
- II. são divisíveis por 4;
- III. não são quadrados perfeitos.

Quantos números satisfazem essas condições?

- (a) 11
- (b) 12
- (c) 13
- (d) 24
- (e) 25

Questão 15

Considere um triângulo isósceles de base 8 e altura 18. Traça-se um segmento paralelo à base, que divide o triângulo em duas regiões: um triângulo isósceles menor, no topo, e um trapézio, na parte inferior. Sabe-se que essas duas regiões possuem a mesma área.

Nessas condições, a medida da base do triângulo menor é:

- (a) $2\sqrt{2}$
- (b) 4
- (c) $8\sqrt{2}$
- (d) 6
- (e) $4\sqrt{2}$

Questão 16

Seja N um número inteiro tal que $1000 \leq N \leq 9999$. Sabendo que $N + S(N) = 2002$, onde $S(N)$ representa a soma dos algarismos de N , assinale a alternativa que representa o valor de N .

- (a) 1971
- (b) 1979
- (c) 1982
- (d) 1988
- (e) 1994

Questão 17

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período 7, ou seja, $f(x + 7) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Suponha que $f(x)$ seja ímpar, isto é, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e considerando que $f(10) = 8$, então $f(2023) - f(2019)$ vale:

- (a) 8
- (b) -8
- (c) -3
- (d) 3
- (e) Não é possível determinar o valor solicitado

Questão 18

Assinale a alternativa que representa o comprimento do lado de um hexágono regular que tem área de 1 cm^2 .

- (a) $\sqrt{\frac{3}{4}} \text{ cm}$
- (b) $\frac{3}{4} \text{ cm}$
- (c) $\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$
- (d) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \text{ cm}$
- (e) $\sqrt[4]{\frac{4}{27}} \text{ cm}$

Rascunho

Questão 19

Rascunho

José faz parte de um grupo de n professores. Desse grupo serão escolhidos aleatoriamente quatro professores para formar uma comissão de concurso. Sabe-se que a probabilidade de José ser escolhido é o dobro da probabilidade de ele não ser escolhido.

Nessas condições, a quantidade n de professores no grupo é:

- (a) 5
- (b) 6
- (c) 8
- (d) 10
- (e) 12

Questão 20

Qual é o último algarismo da seguinte soma:

$$2^{2026} + 7^{2026}.$$

- (a) 9
- (b) 7
- (c) 5
- (d) 3
- (e) 1