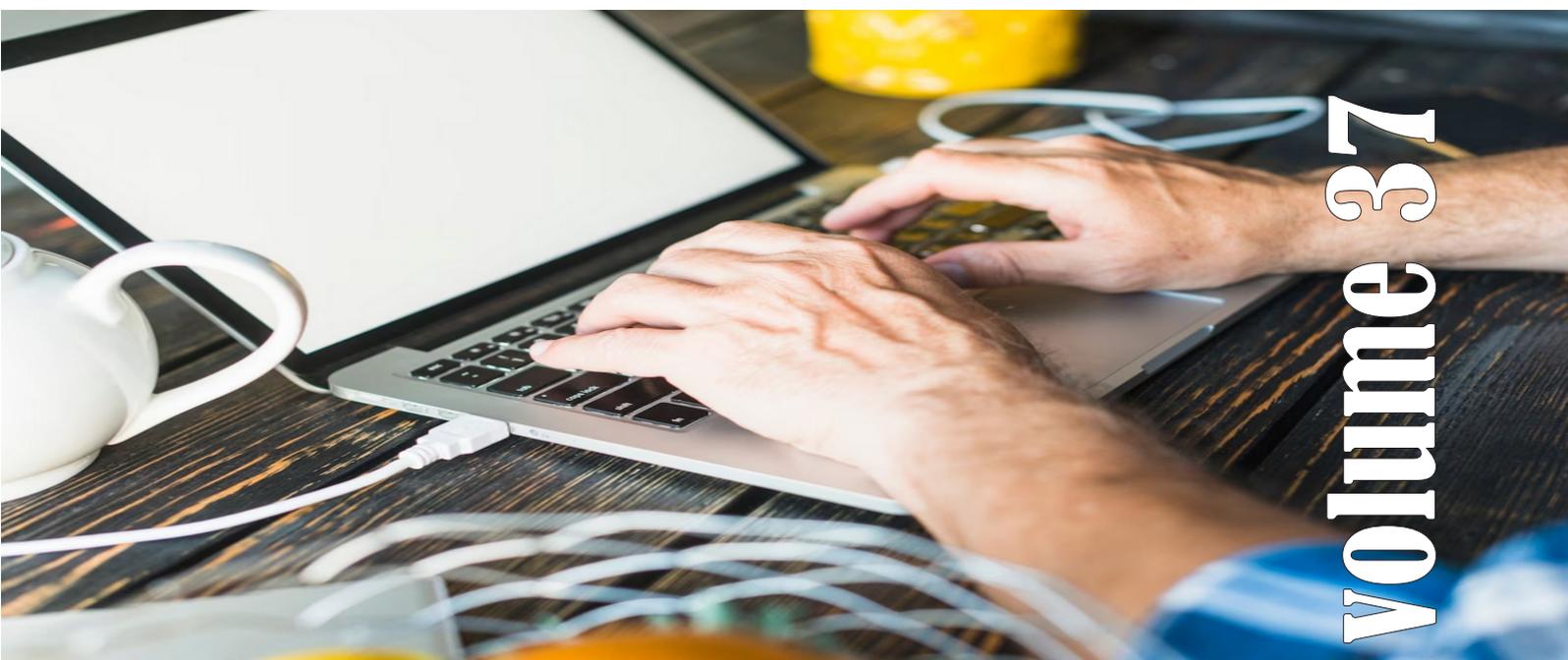


MNPEF Mestrado Nacional
Profissional em
Ensino de Física

PPGF
ensino de física

Silvio Luiz Rutz da Silva
André Vitor Chaves de Andrade
André Maurício Brinatti
Antônio Sérgio Magalhães de Castro
Jeremias Borges da Silva
(organizadores)

**Gaspar Gilmar Romaniuk
Paulo Cesar Facin
André Vitor Chaves de Andrade**



**Simulações em Planilhas Eletrônicas do
Microsoft Excel:
Botões de Rotação como Ferramenta Auxiliar
no Estudo do Campo Elétrico**

**SÉRIE
Produtos Educacionais em Ensino de Física**

UEPG - PROPESP

SÉRIE:
PRODUTOS EDUCACIONAIS EM ENSINO DE FÍSICA

Volume 37

GASPAR GILMAR ROMANIUK
PAULO CESAR FACIN
ANDRÉ VITOR CHAVES DE ANDRADE

Simulações em Planilhas
Eletrônicas do Microsoft Excel:
Botões de Rotação como
Ferramenta Auxiliar no
Estudo do Campo Elétrico

Silvio Luiz Rutz da Silva
André Maurício Brinatti
André Vitor Chaves de Andrade
Antônio Sérgio Magalhães de Castro
Jeremias Borges da Silva

(ORGANIZADORES)

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Prof. Dr. Miguel Sanches Neto
REITOR

Prof. Dr. Ivo Mottin Demiate
VICE-REITOR

Prof. Dr. Renê Francisco Hellman
PRÓ-REITOR DE PESQUISA E PÓSGRADUAÇÃO

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE FÍSICA MNPEF - POLO 35 – UEPG MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA

Colegiado

Prof. Dr. Paulo César Facin (Coordenador)

Prof. Dr. Jeremias Borges da Silva (*Vice-Coodenador*)

Prof. Dr. André Vitor Chaves de Andrade (*Titular*)

Prof. Dr. Antônio Sérgio Magalhães de Castro (*Titular*)

Prof. Dr. Lucas Stori de Lara (*Titular*)

Prof. Dr. Luiz Antônio Bastos Bernardes (*Suplente*)

Prof. Dr. Julio Flemming Neto (*Suplente*)

SÉRIE:

PRODUTOS EDUCACIONAIS EM ENSINO DE FÍSICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
AV. CARLOS CAVALCANTI, 4748
CEP 84030-900 – PONTA GROSSA – PARANÁ
ppgef.sites.uepg.br

CONSELHO EDITORIAL

SÉRIE:

PRODUTOS EDUCACIONAIS EM ENSINO DE FÍSICA

Prof. Dr. Ademar de Oliveira Ferreira (IFPR)
Prof. Dr. André Assmann (UNIOESTE)
Prof. Dr. André Maurício Brinatti (UEPG)
Prof. Dr. André Vitor Chaves de Andrade (UEPG)
Prof. Dr. Antonio Sérgio Magalhães de Castro (UEPG)
Prof. Dr. Celso Araújo Duarte (UFPR)
Prof. Dr. Danilo Augusto Ferreira de Jesus (IFPR)
Prof. Dr. Gélson Biscaia de Souza (UEPG)
Prof. Dr. Gérson Kniphoff da Cruz (UEPG)
Profa. Dra. Hatsumi Mukai (UEM)
Prof. Dr. Hercília Alves Pereira de Carvalho (UFPR)
Profa. Dra. Jaqueline Pavelegine de Medeiros (SEED-PR)
Prof. Dr. Jeremias Borges Da Silva (UEPG)
Prof. Dr. João Amadeus Pereira Alves (UTFPR)
Prof. Dr. Júlio Flemming Neto (UEPG)
Prof. Dr. Lucas Stori de Lara (UEPG)
Prof. Dr. Luiz Américo Alves Pereira (UEPG)
Prof. Dr. Luiz Antônio Bastos Bernardes (UEPG)
Prof. Dr. Milton Thiago Schivani Alves (UFRN)
Prof. Dr. Paulo Cesar Facin (UEPG)
Prof. Dr. Romeu Miqueias Szmoski (UTFPR)
Prof. Dr. Sérgio da Costa Saab (UEPG)
Profa. Dra. Silvana Perez (UFPA)
Prof. Dr. Silvio Luiz Rutz Da Silva (UEPG)

Ficha catalográfica



Este trabalho está licenciado com uma Licença Creative Commons
Atribuição -Não Comercial- Compartilha Igual 4.0 Internacional.

PREFÁCIO

Durante as últimas décadas, no Brasil se tem conseguido avanços significativos em relação a alfabetização científica, em especial na área do Ensino de Física, nos diversos níveis de ensino, entretanto continua pendente o desafio de melhorar a qualidade da Educação em Ciências. Buscando superar tal desafio a Sociedade Brasileira de Física (SBF) implementou o Programa Nacional de Mestrado Profissional em Ensino de Física (MNPEF) que se constitui em um programa nacional de pós-graduação de caráter profissional, voltado a professores de ensino médio e fundamental com ênfase principal em aspectos de conteúdos na Área de Física, resultando em uma ação que engloba diferentes capacidades apresentadas por diversas Instituições de Ensino Superior (IES) distribuídas em todas as regiões do País.

O objetivo do MNPEF é capacitar em nível de mestrado uma fração muito grande de professores da Educação Básica quanto ao domínio de conteúdos de Física e de técnicas atuais de ensino para aplicação em sala de aula como, por exemplo, estratégias que utilizam recursos de mídia eletrônica, tecnológicos e/ou computacionais para motivação, informação, experimentação e demonstrações de diferentes fenômenos físicos.

A abrangência do MNPEF é nacional e universal, ou seja, está presente em todas as regiões do País, sejam elas localizadas em capitais ou estejam afastadas dos grandes centros. Fica então clara a necessidade da colaboração de recursos humanos com formação adequada localizados em diferentes IES. Para tanto, o MNPEF está organizado em Polos Regionais, hospedados por alguma IES, onde ocorrerem as orientações das dissertações e são ministradas as disciplinas do currículo.

A Universidade Estadual de Ponta Grossa, por meio de um grupo de professores do Departamento de Física, faz parte do MNPEF desde o ano de 2014 tendo nesse período proporcionado a oportunidade de aperfeiçoamento para quarenta e cinco professores de Física da Educação Básica, sendo que desses quinze já concluíram o programa tornando-se Mestres em Ensino de Física.

A Série: **Produtos Educacionais em Ensino de Física**, que ora apresentamos, consta de vários volumes que correspondem aos produtos educacionais derivados dos projetos de dissertação de mestrado defendidos. Alguns desses volumes são constituídos de mais de um tomo.

Com essa série o MNPEF - Polo 35 - UEPG, não somente busca entregar materiais instrucionais para o Ensino de Física para professores e estudantes, mas também pretende disponibilizar informação que contribua para a identificação de fatores associados ao Ensino de Física

a partir da proposição, execução, reflexão e análise de temas e de metodologias que possibilitem a compreensão do processo de ensino e aprendizagem, pelas vias do ensino e da pesquisa, resultado da formação de docentes pesquisadores.

A série é resultado de atividade reflexiva, crítica e inovadora aplicada diretamente à atuação profissional do docente, na produção de conhecimento diretamente associado à prospecção de problemas e soluções para o ensino-aprendizagem dos conhecimentos em Física, apresentando estudos e pesquisas que se propõem com suporte teórico para que os profissionais da educação tenham condições de inovar sua prática em termos de compreensão e aplicação da ciência.

A intenção é que a Série: **Produtos Educacionais em Ensino de Física** ofereça referências de propostas de Ensino de Física coerentes com as estruturas de pensamento exigidas pela ciência e pela tecnologia, pelo exemplo de suas inserções na realidade educacional, ao mesmo tempo que mostrem como se pode dar tratamento adequado à interdependência de conteúdo para a formação de visão das interconexões dos conteúdos da Física.

Prof. Dr. Silvio Luiz Rutz da Silva

Prof. Dr. André Maurício Brinatti

Prof. Dr. André Vitor Chaves de Andrade

Prof. Dr. Antônio Sérgio Magalhães de Castro

Prof. Dr. Jeremias Borges da Silva

Organizadores

SUMÁRIO

METODOLOGIA ADOTADA	13
CAPÍTULO 1 – O VETOR	15
1.1 MODELO MATEMÁTICO DE VETOR	15
1.2 MÓDULO DE UM VETOR	16
1.3 ADIÇÃO GEOMÉTRICA DE VETORES	17
1.4 COMPONENTES ORTOGONAIS.....	18
CAPÍTULO 2 – O CAMPO ELÉTRICO	21
2.1 A DESCOBERTA DAS CARGAS ELÉTRICAS.....	23
2.2 O VALOR DA CARGA ELÉTRICA ELEMENTAR	25
2.3 CONCEITO DE CAMPO.....	28
2.3.1 Leitura complementar: O campo de Faraday	29
2.4 CAMPO ELÉTRICO.....	30
2.5 CARGA ELÉTRICA E O SENTIDO DO VETOR CAMPO ELÉTRICO	32
2.6 QUESTIONÁRIO 1.1	34
2.7 SIMULAÇÃO 1: SENTIDO DO VETOR CAMPO ELÉTRICO DE UMA CARGA ELÉTRICA PUNTIFORME	36
2.8 SIMULAÇÃO 2: MÓDULO DO VETOR CAMPO ELÉTRICO DE UMA CARGA PUNTIFORME	39
2.9 DISCUSSÃO GERAL.....	42
2.10 QUESTIONÁRIO 1.2	43
CAPÍTULO 3 – CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE DE DUAS CARGAS ELÉTRICAS PUNTIFORMES	45
3.1 SIMULAÇÃO 3: VETOR CAMPO ELÉTRICO DE DUAS CARGAS ELÉTRICAS PUNTIFORMES	48
3.2 DISCUSSÃO GERAL.....	52
3.3 LINHAS DE CAMPO ELÉTRICO	53
3.4 SIMULAÇÃO 4: LINHAS DE CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE DE DUAS CARGAS ELÉTRICAS PUNTIFORMES	56
3.5 DISCUSSÃO GERAL.....	59
3.6 QUESTIONÁRIO FINAL	60
CAPÍTULO 4 – SUGESTÕES AO PROFESSOR	64
4.1 POSSÍVEIS ENCAMINHAMENTOS PEDAGÓGICOS	65
4.2 PONTOS IMPORTANTES A CONSIDERAR.....	70
CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
REFERÊNCIAS	73
APÊNDICE A – SENTIDO DO VETOR CAMPO ELÉTRICO	76
APÊNDICE B – MÓDULO DO VETOR CAMPO ELÉTRICO	83
APÊNDICE C – CAMPO ELÉTRICO DE DUAS CARGAS ELÉTRICAS PUNTIFORMES	90
APÊNDICE D – LINHAS DE CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE DE DUAS CARGAS ELÉTRICAS PUNTIFORMES	99
ANEXO A: APOSTILA – PLANILHAS ELETRÔNICAS NO ENSINO DE FÍSICA	113

APRESENTAÇÃO

Caro professor, este trabalho, volta-se ao estudo vetorial do conceito de físico de campo elétrico, implica na utilização do *software Microsoft Excel*[®], parte do pacote *Office da Microsoft*[®], como ferramenta auxiliar no Ensino de Física.

A utilização do *Microsoft Excel*[®] baseia-se na modelização do conceito de vetor e, respectivamente, da soma vetorial aplicado no estudo, qualitativo e quantitativo, do vetor de campo elétrico.

Por meio da construção de planilhas eletrônicas e gráficos vetoriais interativos, professores e alunos poderão, utilizando controles de formulários, mais precisamente de botões de rotação, interagir diretamente no comportamento vetorial, dando movimento a eles. Com isso, poderão fazer diversas observações quantitativas e, principalmente, qualitativa, dando um significado maior ao conceito a ser estudado.

Cabe ainda salientar que muitas das construções oferecidas nesse trabalho poderão ser utilizadas em outros contextos do Ensino de Física, como por exemplo, o estudo do conceito de vetor e, conseqüentemente, a adição destes. Geralmente essa etapa básica é abordada nas primeiras séries do Ensino Médio, muitas vezes superficialmente.

A dinâmica deste trabalho ocorre através da alteração de parâmetros vetoriais por intermédio de botões de rotação que deverão ser inseridos e configurados de modo a tornar o estudo de vetores mais dinâmico e atrativo, além de permitir ao aluno participar das construções gráficas interagindo com seus pares, ter um tempo maior para desenvolver suas capacidades de abstração e interpretação.

Cabe destacar que muitas das construções apresentadas nesse trabalho também podem ser realizadas em outros *softwares* de planilhas eletrônicas, tais como o *LibreOffice*, *Free Office* e Planilhas Google.

Nesse sentido, por que utilizar o *Microsoft Excel*[®] se há outros *softwares* de planilhas eletrônicas, inclusive muitos de distribuição gratuita?

A resposta pauta-se em dois pontos: primeiro porque este *software* é um dos mais utilizados no mundo, seja por usuários básicos, avançados e até mesmo por empresas. Nele também há algumas particularidades/ferramentas que não há em outros, como por exemplo, a aplicação da seta indicadora de sentido sobre o

segmento de reta do vetor. Outro ponto importante a mencionar é o fato de que muitos dos alunos não seguirão a carreira científica ou acadêmica. Ao ensinar o aluno a construir tabelas, gráficos e simulações necessárias para a construção de planilhas e gráficos dinâmicos, está-se indo além da apresentação dos conteúdos de Física. Dá-se a oportunidade de aprendizagem de novas competências e habilidades importantes tanto no mundo do trabalho, quanto no mundo de diversas carreiras acadêmicas que se utilizam de tais ferramentas. É uma aprendizagem para a vida que visa superar a visão conteudista de ensino.

Diante das várias possibilidades de trabalho que o *software* oferece para o Ensino de Física, escolheu-se abordar o estudo de vetores com aplicação ao conceito físico de campo elétrico, desenvolvendo tabelas de dados e representações gráficas dinâmicas, cujos alunos poderão observar e analisar quantitativa e qualitativamente diversas possibilidades a partir de uma situação inicial, que poderá ser alterada por intermédio da inserção de botões de rotação. Ou seja, o estudante sairá das representações estáticas dos livros didáticos, ou daquelas desenhadas na lousa, para visão dinâmica dos fenômenos físicos, uma vez que podem alterá-los em tempo real, enriquecendo suas observações, análises e conclusões a respeito de conceitos e aplicações do cálculo vetorial.

Apesar deste material trazer muitas instruções sobre a operacionalidade do *software*, não objetiva ensinar todas as funcionalidades da ferramenta, mas de tornar o ensino de Física mais dinâmico, ativo, cooperativo e colaborativo, além de proporcionar o domínio do uso dessa importante ferramenta de análise de dados.

Ao professor que desejar um maior aprofundamento na ferramenta adotada neste trabalho, sugere-se o blog "facin.pro.br" do professor Paulo Cesar Facin onde são disponibilizadas várias planilhas com o uso do botão de rotação e de vetores, que podem ser utilizadas para o ensino/estudo da ótica geométrica, ótica física e mecânica. Além das planilhas é disponibilizado ainda um tutorial básico de como usar o *Microsoft Excel*[®] e de como foram construídas as planilhas, também são disponibilizados endereços eletrônicos de vídeos postados na plataforma Youtube que auxiliam na compreensão do tutorial.

Importante que, antes de iniciar o trabalho em sala de aula, o professor leia e pratique realizando algumas construções. Pois antes de propor uma nova abordagem, o educador deve familiarizar-se com o *software* e verificar suas

possibilidades a fim de planejar melhor suas intervenções pedagógicas junto aos alunos.

Cientes das diversas possibilidades metodológicas que este produto oferece, as quais devem ser planejadas com foco na aprendizagem, considerando as características tanto dos alunos quanto do professor, adotou-se para esse trabalho a metodologia sociointeracionista de Lev Semenovitch Vygotsky, na qual o desenvolvimento cognitivo ocorre por meio da interação social com outros indivíduos e com o meio, tendo o professor como mediador de todo o processo de ensino-aprendizagem.

Segundo Vygotsky, o desenvolvimento cognitivo ocorre através da interação do homem com a sociedade ao seu redor – ou seja, o indivíduo modifica o ambiente e o ambiente modifica o indivíduo. Nesse contexto, a interação que cada pessoa estabelece com o meio é chamada de experiência pessoalmente significativa.

A mediação, conceito chave da teoria Vygotskiana, consiste na intervenção de um elemento intermediador na relação de aprendizado. No processo de formação do aluno, existem dois tipos de elementos mediadores que dão suporte à ação do aluno: os instrumentos e os signos.

De acordo com Soares (2015, p. 4), “instrumento é todo objeto externo criado pelo homem com a intenção de facilitar seu trabalho e sua sobrevivência, enquanto os signos são instrumentos psicológicos (internos), que auxiliam o homem diretamente nos processos internos”.

Já os signos são elementos mediadores exclusivamente dos seres humanos. A linguagem, por exemplo, é toda composta por signos: a palavra mesa remete ao objeto concreto sem a necessidade de vê-lo. A capacidade de construir representações mentais sem a necessidade concreta de objetos reais, permite ao indivíduo desenvolver sua capacidade de abstração.

Desse modo, o professor deve antecipar aquilo que o aluno não sabe e tampouco é capaz de aprender sozinho, pois o aprendizado vem sempre antes do desenvolvimento. Nesse contexto de interações e mediações surge um dos principais conceitos da teoria de Vygotsky, o de zona de desenvolvimento proximal. Segundo Cole e Scribner (2007, p. 97), a zona de desenvolvimento proximal,

É a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas

sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes.

Ou seja, a zona de desenvolvimento proximal é o caminho entre o que o aluno é capaz de fazer sozinho – desenvolvimento real - e aquilo que ele está próximo de conseguir realizar de forma autônoma – desenvolvimento potencial. A zona de desenvolvimento proximal define funções que ainda não amadureceram, mas que estão em estágio de maturação.

Todo o processo de desenvolvimento do sujeito é mediado e, isso torna o papel da escola e do professor mais preponderante no processo de ensino e aprendizagem. É no ambiente escolar que o aluno poderá interagir com seus pares e instrumentos que potencializam seu processo de aprendizagem.

E é na perspectiva de Vygotsky que elaborou-se para você professor, professora, este produto educacional que busca ir além do modelo tradicional de ensino, que ainda é meramente conteudista e bancário e que precisa ser superado para tornar-se mais próximo do projeto de vida do aluno que virá a se tornar membro ativo e participativo de uma sociedade.

METODOLOGIA ADOTADA

A metodologia adotada neste produto educacional possibilita aos alunos aprofundarem em conceitos teóricos progredindo-os em cada uma das etapas/simulações.

Em um primeiro momento os conceitos são enunciados e verificados através de simples cálculos do modelo matemático que os ilustram.

Num segundo momento é realizada a análise do modelo matemático utilizado na descrição do fenômeno e, através da interpretação de alguns parâmetros, a transposição do modelo matemático para o computacional.

Após a compreensão teórica do fenômeno e seu modelo matemático, inicia-se a terceira etapa com a transposição da linguagem matemática para a computacional, em que os alunos reunidos em pequenos grupos constroem suas representações gráficas e respectivas simulações. De acordo com Alves, Amaral e Medeiros Neto (2002, p. 212), essa etapa do processo,

permite refinar, fixar, e até estender esses conceitos além dos limites com que foram apresentados. Exercita, ainda, outro aspecto fundamental do processo de aprendizagem: o domínio completo da representação abstrata do problema, sem o qual é impossível organizar os conceitos em rotinas computacionais [...] a atividade de “programação” também inclui tipicamente um divertimento e induz à interação entre alunos, uma vez que a atividade se faz em pequenos grupos. O ingrediente humano adiciona um aspecto subjetivo positivo e importante à atividade. Além disso, o aspecto de colaboração, tão útil na carreira científica, passa a ser um fator importante para o sucesso do grupo, durante as atividades de programação.

A última etapa possibilita aos alunos aumentarem a compreensão dos conceitos físicos trabalhados, fixando as ideias teóricas através de observações realizadas pela alteração de alguns parâmetros importantes à teoria abordada. Nessa etapa os alunos podem comparar o modelo matemático com as representações gráficas sem perdas de proporções e/ou escalas, o que muitas vezes ocorre em ilustrações de livros didáticos pela falta de escalas fixas.

Por fim, os alunos têm a oportunidade de testar variações sem, para isso, terem de realizar vários e/ou longos cálculos – passíveis de erros – para cada situação imaginada.

Um detalhe importante deste processo de aprendizagem, destacado por Alves, Amaral e Medeiros Neto (2002, p. 212), consiste na

velocidade com que os alunos são capazes de testar suas próprias ideias, uma vez que o programa para analisá-las foi feito por eles mesmos. A resposta dos programas vem - em tempo real - quase instantaneamente. Isso permite concentrar, num lapso pequeno de tempo, um número grande de respostas, tratando diversos aspectos de um mesmo tema, com o ingrediente emocional positivo de que a “ferramenta útil” foi feita pelo próprio aluno

Ao construir as planilhas interativas os alunos percebem a necessidade de antes de tudo entender o conceito físico, depois entender o modelo matemático que o representa para poder modelar computacionalmente. Em cada uma dessas etapas os alunos podem se apropriar do mesmo assunto de diferentes maneiras e aprofundar-se com mais interação e envolvimento no processo de construção de seus conhecimentos.

CAPÍTULO 1 – O VETOR

Antes de se iniciar o estudo do campo elétrico, é necessário entender a ideia matemática de vetor e quais os procedimentos necessários para sua representação gráfica no *Microsoft Excel*[®]. Ou seja, é preciso entender o conceito matemático de vetor, como representá-lo geometricamente em um plano cartesiano e depois realiza-se a transposição do modelo matemático para o modelo computacional.

1.1 MODELO MATEMÁTICO DE VETOR

Em termos básicos, da Física e Matemática, vetores são segmentos de reta orientados, responsáveis pela caracterização de grandezas vetoriais indicando seu módulo (intensidade, magnitude, valor...), direção e sentido. O deslocamento, a velocidade, a aceleração e a força são alguns exemplos de grandezas físicas vetoriais.

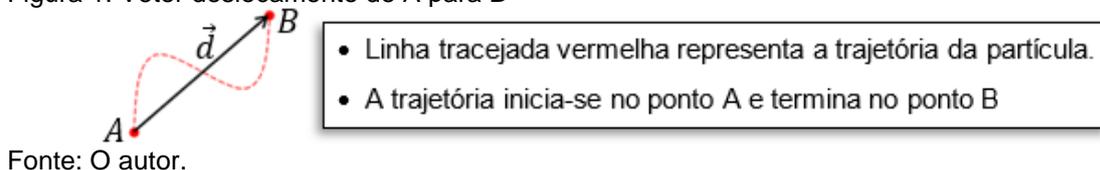
Entretanto, nem todas as grandezas físicas são vetoriais. A massa de um corpo, a temperatura, a energia e o tempo são exemplos de grandezas físicas que não são vetoriais, pois são expressas apenas em função dos seus módulos, não tendo direção e sentido. Nesse caso, tais grandezas são chamadas de escalares.

O módulo de um vetor é o seu valor numérico seguido da unidade de medida que define a grandeza física vetorial. Sua direção é a reta sobre a qual o vetor está localizado, também chamada de reta suporte. Sua orientação é definida por um ângulo entre o vetor (ou sua reta suporte) e um eixo de um dado sistema de referência.

A grandeza vetorial mais simples é o deslocamento, ou a mudança da coordenada da posição. Um vetor que representa o deslocamento é chamado de vetor deslocamento.

Na figura 1, considere uma partícula, por exemplo, que muda de posição movendo-se do ponto A para o ponto B. O deslocamento da partícula é representado por um vetor que aponta de A para B.

Figura 1: Vetor deslocamento de A para B



Nesse caso diz-se que o vetor tem origem no ponto A e extremidade final no ponto B. O vetor deslocamento não nos fornece a trajetória da partícula, mas sim o resultado final, por exemplo, do deslocamento de uma partícula.

IMPORTANTE!

A palavra vetor assume significados diferentes dependendo do contexto em que é aplicada. Os agentes que disseminam doenças infectocontagiosas, por exemplo, também são chamados de vetores. Contudo, aqui, no estudo da Física, vetor é um ente matemático que expressa o valor da grandeza física vetorial, sua direção e sentido.

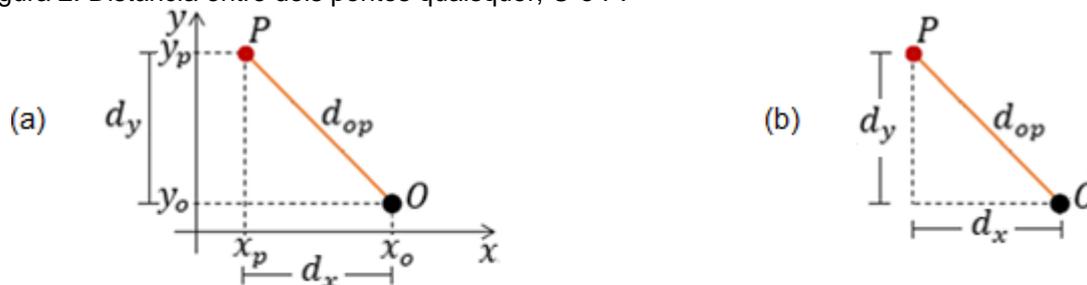
1.2 MÓDULO DE UM VETOR

O módulo do vetor expressa o valor da grandeza física vetorial representada. Geometricamente e de maneira mais simplista, pode-se dizer que o módulo do vetor é o tamanho do vetor.

Portanto, sabendo a distância entre o ponto de origem e ponto de sua extremidade final pode-se calcular geometricamente o seu módulo.

Para melhor entendimento, fazer-se-á uma breve retomada de geometria analítica. Para isso, vamos supor dois pontos quaisquer, $O(x_o, y_o)$ e $P(x_p, y_p)$ e, sejam d_{op} a distância entre os pontos O e P , d_x a distância entre as abscissas x_o e x_p e d_y a distância entre as ordenadas y_o e y_p , conforme mostra a figura 2.

Figura 2: Distância entre dois pontos quaisquer, O e P.



Em (a) são representados os pontos O e P nos eixos coordenados, em (b) é representado somente o triângulo retângulo usado para o cálculo do módulo do vetor.

Fonte: O autor.

Da Geometria Analítica que, por consequência recorre a trigonometria pitagórica e de acordo com a figura 2 (b), temos que:

$$(d_{op})^2 = (d_x)^2 + (d_y)^2 \Rightarrow d_{op} = \sqrt{(d_x)^2 + (d_y)^2}. \quad (1)$$

Sendo $d_x = |x_p - x_o|$ e $d_y = |y_p - y_o|$, fazendo as devidas substituições, teremos o módulo vetorial expresso pela equação (2).

$$d_{op} = \sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - y_o)^2}. \quad (2)$$

Essa equação é constantemente utilizada para calcular o módulo de vetores no plano cartesiano. Entende-la será importante para compreendermos as fórmulas utilizadas para o cálculo dos módulos dos vetores posição inicial \vec{P}_A , posição final \vec{P}_B e deslocamento \vec{d}_{AB} .

1.3 ADIÇÃO GEOMÉTRICA DE VETORES

Para entender a adição vetorial, supõe-se uma situação simples e prática: suponha, conforme ilustrado na figura 3, que em um domingo pela manhã você sai de sua casa e vai até a igreja da cidade. Após o culto (missa), você vai ao mercado fazer compras para o seu almoço. Tomando sua casa como ponto inicial (origem) e o mercado como ponto final, os vetores \vec{d}_1 e \vec{d}_2 representam os deslocamentos parciais e o vetor \vec{d} o deslocamento total (também chamado de deslocamento resultante ou apenas vetor resultante) do trajeto da sua casa até o mercado.

Figura 3: Sucessivos deslocamentos.



- (a) posições da casa, igreja e mercado com os respectivos vetores deslocamentos; (b) representação geométrica simplificada dos vetores deslocamentos \vec{d}_1 , \vec{d}_2 e \vec{d} .

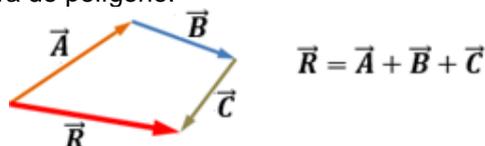
A construção do vetor resultante, constitui o modelo geométrico da soma vetorial.

$$\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 \quad (3)$$

TEXTO COMPLEMENTAR

Para somar dois ou mais vetores, basta desenhá-los de modo que a extremidade final de um coincida com a origem do vetor seguinte. O vetor soma (vetor resultante) tem início na origem do primeiro vetor e extremidade final coincidindo com a extremidade final do último vetor adicionado. Essa regra é denominada **regra do polígono**. Na figura 4 temos a representação geométrica da soma vetorial pela regra do polígono.

Figura 4: Soma vetorial – regra do polígono.



Fonte: O autor.

1.4 COMPONENTES ORTOGONAIS

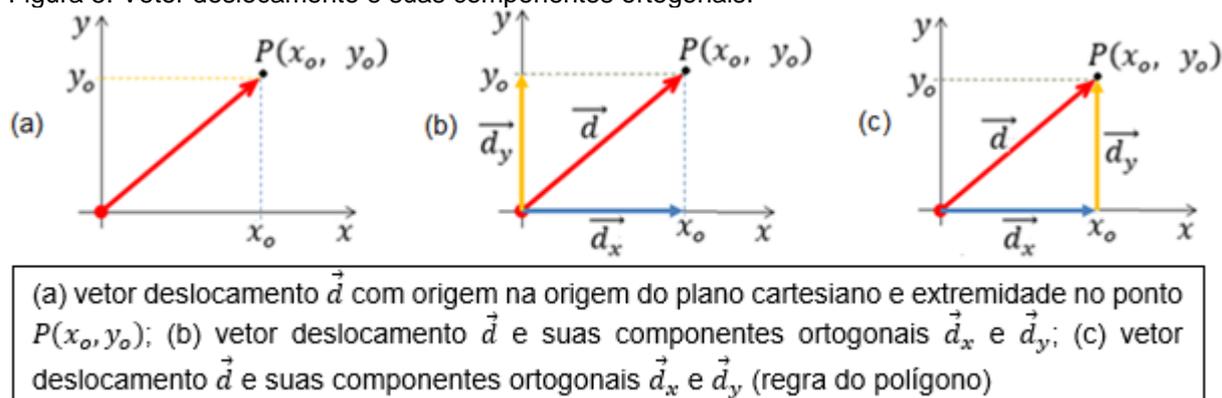
Um outro modo de somar e subtrair vetores no plano cartesiano é através da soma de suas projeções ortogonais sobre os eixos x e y. Esse conceito é bastante usado em diversas áreas relacionadas às Ciências Exatas e Naturais e às Engenharias.

Talvez a soma de vetores por decomposição ortogonal, seja a maneira mais prática e abrangente para as diversas situações que possam ser apresentadas. Contudo, cabe salientar que foi necessário percorrer as situações anteriores para se ter os subsídios necessários para o entendimento dessa importante etapa.

A decomposição vetorial pode ser definida como a determinação das projeções ortogonais do vetor sobre os eixos orientados x e y do plano cartesiano. Note na figura 5, abaixo, que ao deslocar-se a partir da origem até o ponto $P(x_o, y_o)$, ocorre simultaneamente um afastamento tanto horizontal quanto vertical da origem do sistema de coordenadas cartesianas, figura 5 (b). Portanto, pode-se tratar o vetor deslocamento \vec{d} como a soma dos vetores deslocamento horizontal \vec{d}_x e deslocamento vertical \vec{d}_y , ilustrado na figura 5 (c).

As projeções ortogonais do vetor deslocamento \vec{d} dão origem aos vetores \vec{d}_x e \vec{d}_y , ilustrados figura 5 (b). A esse par de vetores damos o nome de componentes ortogonais do vetor deslocamento \vec{d} . Chamamos a componente horizontal \vec{d}_x e a componente vertical de \vec{d}_y .

Figura 5: Vetor deslocamento e suas componentes ortogonais.



Fonte: O autor.

Se mover o vetor \vec{d}_y horizontalmente de modo que sua origem coincida com a extremidade final do vetor \vec{d}_x , figura 5 (c), verifica-se que sua extremidade final irá coincidir com a extremidade final do vetor \vec{d} . Ao fazer isso a soma vetorial toma a forma de um triângulo retângulo e, agora, pode-se lançar mão de conceitos trigonométricos básicos.

Para que se possa dar continuidade ao estudo das decomposições vetoriais necessitou-se retomar alguns conceitos básicos de trigonometria, os quais são fundamentais para obtenção do modelo matemático da decomposição vetorial.

As relações entre os lados de um triângulo retângulo e seus ângulos agudos são o que chamamos de razões trigonométricas. Aqui, abordar-se-ão as razões trigonométricas mais comuns e necessárias ao prosseguimento dos nossos estudos. São elas: seno, cosseno e tangente.

Como ilustração, vamos tomar o triângulo retângulo da figura 6, em que se usa apenas o ângulo θ de inclinação da hipotenusa em relação ao lado horizontal do triângulo. Neste caso, devido a inclusão do ângulo de inclinação da hipotenusa em relação ao lado horizontal do triângulo retângulo, pode-se diferenciar os catetos. Chamar-se-á o cateto ao lado do ângulo θ de cateto adjacente e o cateto do lado oposto ao ângulo θ de cateto oposto.

Figura 6: Elementos de um triângulo retângulo.



Fonte: O autor.

Da trigonometria temos que:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}, \quad (4)$$

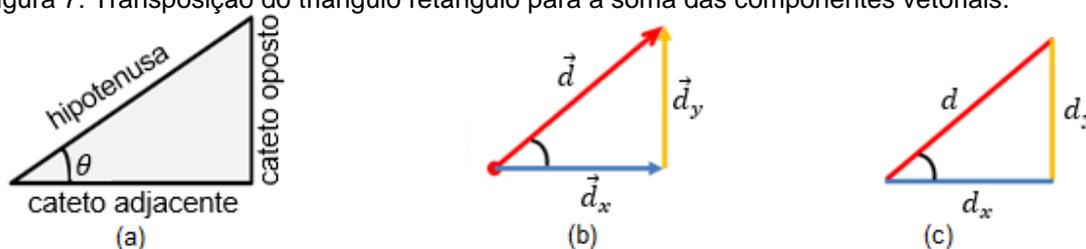
$$\text{cos}(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}, \quad (5)$$

$$\text{tang}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}, \quad (6)$$

$$\text{tang}(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}. \quad (7)$$

Na figura 7, fazendo a transposição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para a soma vetorial das componentes do vetor deslocamento \vec{d} , temos:

Figura 7: Transposição do triângulo retângulo para a soma das componentes vetoriais.



(a) elementos do triângulo retângulo; (b) vetor deslocamento \vec{d} e suas componentes ortogonais \vec{d}_x e \vec{d}_y ; (c) triângulo retângulo formado pelos módulos dos vetores \vec{d} , \vec{d}_x e \vec{d}_y .

Fonte: O autor.

Aplicando as razões trigonométricas ao triângulo retângulo formado pelos módulos do vetor deslocamento e de suas componentes, obtém-se o modelo matemático que nos permitirá calcular os módulos das componentes vetoriais. Vejamos abaixo:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{d_y}{d} \Rightarrow d_y = d \cdot \text{sen}(\theta), \quad (8)$$

$$\text{cos}(\theta) = \frac{d_x}{d} \Rightarrow d_x = d \cdot \text{cos}(\theta). \quad (9)$$

CAPÍTULO 2 – O CAMPO ELÉTRICO

Forças elétricas são conhecidas desde antes da era cristã. Há relatos que na Grécia antiga, por volta do século VII a.C., a força elétrica em objetos eletrizados através de fricção já era conhecida.

Tales de Mileto⁸ verificou que quando ele esfregava um pedaço de âmbar⁹ em pele de carneiro, esse âmbar atraía lascas de madeira, fundamento básico da eletrostática. Posteriormente, em seus estudos verificou que pequenos pedaços de um tipo especial de pedra, tinham a capacidade de atrair materiais com ferro e também eram atraídos por esses materiais, dando origem aos estudos sobre magnetismo. (BARUM, 2019, p. 33).

Contudo, apenas no século XVII que os primeiros estudos sobre a eletrização por atrito foram iniciados. De acordo com Camilo (2006, p. 25-4), a primeira máquina eletrostática da história foi criada por Otto Von Guericke¹⁰ e apresentada em 1672. A máquina de Guericke, o gerador eletrostático, consistia em uma esfera de enxofre, com um eixo central montado sobre um suporte de madeira e que pode girar facilmente sobre ele. Nessa máquina, a eletrização era obtida através do atrito contínuo da esfera de enxofre com as mãos. Posteriormente esse processo foi aperfeiçoado para que a esfera fosse atritada com pedaços de lã. Ainda de acordo com Camilo, a esfera carregada era usada para estudar a interação elétrica com outros corpos leves.

Raicik e Peduzzi (2016, p. 113), destacam que esse aparato confere a Otto Von Guericke o título de inventor da máquina eletrostática. No entanto, os autores destacam que, sua intenção com esse dispositivo foi a de desenvolver uma réplica da Terra e não uma máquina geradora de eletricidade. Realizando experimentações, Guericke observou que uma penugem, inicialmente neutra, ao ser aproximada do globo era atraída e repelida da sua superfície.

Para Bonaudi (1993, *apud* RAICIK; PEDUZZI, 2016, p. 113), considerando que o objetivo da inicial da máquina de Guericke era ser uma réplica do planeta Terra, o primeiro dispositivo desenvolvido com a finalidade de ser um gerador de eletricidade ocorreu no século seguinte, em 1706. Segundo consta, Francis Hauksbee (1666-1713), cientista inglês, substituiu o globo de enxofre por uma esfera de vidro que

⁸ Pensador grego pré-socrático, considerado “pai da Ciência” e “pai da Filosofia Ocidental”. Suas ideias ajudaram a expandir os horizontes teóricos da astronomia, matemática e filosofia.

⁹ Resina fossilizada, não se trata de um mineral apesar de ser utilizado várias vezes como gema preciosa.

¹⁰ Físico e engenheiro alemão (1602 – 1686)

girava por intermédio de uma polia. Com esse dispositivo, Hauksbee desenvolveu diversos experimentos. Em um de seus experimentos, Hauksbee observou que a luz barométrica era causada pelo atrito do mercúrio com o vidro, relacionando essa luz ao efeito âmbar e também constatou que não era necessário friccionar um vidro evacuado para fazê-lo brilhar; bastava aproximá-lo de um corpo eletrizado. A partir daí, os fenômenos elétricos tomaram tais proporções a ponto de muitas pessoas começarem a construir máquinas elétricas para tentar todos os tipos de experiências e, até mesmo, para exibi-las por dinheiro.

O século XVIII trouxe novas e importantes contribuições para o estudo da eletricidade. De acordo com Boss; Assis e Caluzi (2012, p. 12), Stephen Gray¹¹ foi o responsável por perceber que existiam dois tipos de substâncias com propriedades elétricas bem diferentes. Atualmente, tais substâncias são conhecidas por condutores e isolantes elétricos. Os autores ainda mencionam que Stephen Gray também descobriu algumas das principais propriedades destes materiais e, atribuiu aos metais e outros condutores, pela primeira vez na história, a propriedade de atrair corpos leves colocados em suas proximidades. Atualmente esse fenômeno é chamado de indução ou polarização elétrica. Gray, utilizando tubos de vidro eletrizado, conseguiu eletrizar condutores eletrizados produzindo faíscas (descargas elétricas) ao colocá-los próximos aos tubos de vidro.

De acordo com IFSC/USP (2013, p. 1), em 1733, o físico francês Charles François de Cisternay Du Fay¹² propôs que: a eletricidade existia em dois tipos e que o atrito entre vidro e papel poderia fazer com que eles trocassem esses tipos de eletricidade entre si e; corpos com o mesmo tipo de eletricidade se repelem, e corpos com tipos diferentes se atraem. O tipo de eletricidade presente no vidro atritado por lã foi chamado de “eletricidade *vítrea*”, e o presente no âmbar de “eletricidade resinosa.

IFSC/USP (2013, p. 1 e 2) complementa que, na segunda metade do século XVIII, Benjamin Franklin tratou a eletricidade como um fluido único que estaria presente em toda a matéria com uma quantidade precisa. Se o houvesse em excesso desse fluido, a matéria estaria positivamente carregada, e se o houvesse em falta, a matéria, estaria negativamente carregada. Franklin definiu arbitrariamente que a eletricidade *vítrea* é positiva (excesso de fluido), e a eletricidade resinosa é negativa (falta de fluido), convenção utilizada até os dias atuais. De acordo com Franklin,

¹¹ Físico e astrônomo inglês (1666 – 1736).

¹² Charles François de Cisternay du Fay: Químico francês (1698 – 1739).

quando dois corpos são atritados, o fluido elétrico (que corresponde ao conceito atual de carga elétrica) pode passar de um corpo para o outro, deixando um com excesso e outro com falta, mas não era nunca criado nem destruído. Hoje essa hipótese se converteu na lei da conservação da carga elétrica.

Ou seja, Franklin observou que no fenômeno de eletrização por atrito, ambos os objetos utilizados ficavam carregados com a mesma grandeza, porém de tipos contrários.

Atualmente, acredita-se que a matéria é constituída por átomos e que em seu estado natural o número de elétrons (carga negativa) e prótons (carga positiva) são idênticos. Acredita-se também que o fluido elétrico anteriormente descrito por Benjamin Franklin é a transferência de elétrons entre átomos ou moléculas. No caso do atrito entre o pano de seda e o vidro, alguns elétrons do vidro são transferidos para a seda, ficando esta com carga negativa e o objeto de vidro com carga positiva.

Note que a diferença do que Benjamin Franklin propôs para o que é atualmente aceito está apenas no referencial adotado para a transferência e nos termos utilizados, fluido e cargas. Contudo, os sinais adotados permanecem iguais.

2.1 A DESCOBERTA DAS CARGAS ELÉTRICAS

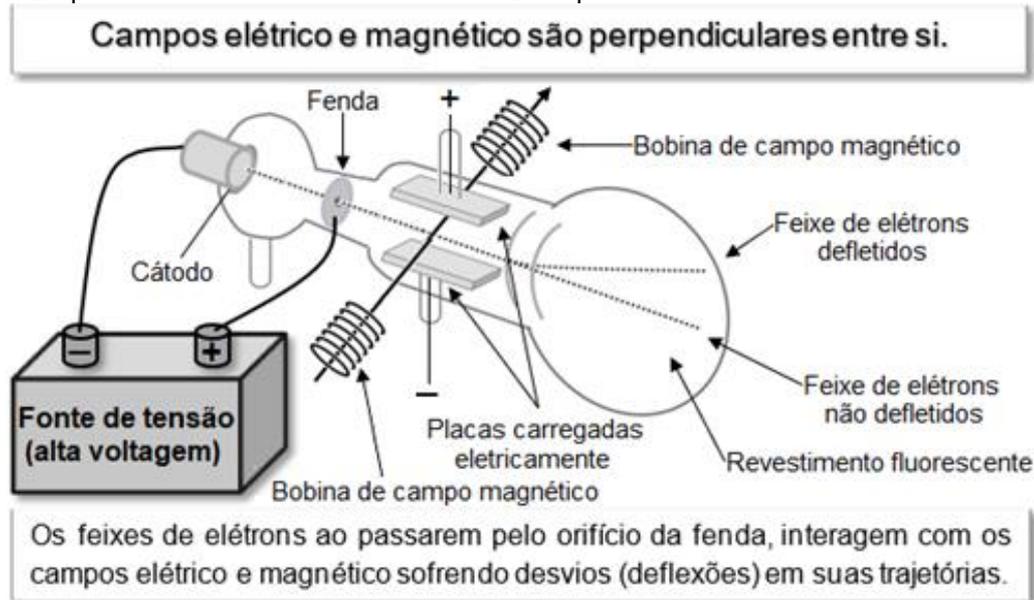
A descoberta do elétron, que revolucionou os estudos das ciências físicas e químicas é fruto do trabalho de inúmeros cientistas ao longo dos anos. Atualmente, acredita-se que o elétron é uma partícula de carga negativa presente nos átomos que constituem toda e qualquer substância conhecida por nós.

Pode-se dizer que a sua descoberta é relativamente recente e, resultado do interesse de J. J. Thomson pelas propriedades de certas radiações, conhecidas na época como raios catódicos¹³.

De acordo com Sussuchi; Machado e Moraes (2021, p. 24), a primeira evidência experimental da estrutura atômica ocorreu em 1897 quando J. J. Thomson estava investigando os raios catódicos em um tubo de vidro sob vácuo. Essa experiência apontou para a existência da partícula subatômica conhecida hoje por nós como elétron. O esquema experimental utilizado por J. J. Thomson é mostrado na figura 8.

¹³ raios que são emitidos quando uma alta diferença de potencial (uma alta tensão) é aplicada entre dois eletrodos (contatos metálicos) em um tubo de vidro sob vácuo.

Figura 8: Esquema do tubo de raios catódicos utilizado por J. J. Thomson.



Fonte: O autor.

Através deste experimento, segundo Sussuchi, Machado e Moraes (2021, p. 24-25), Thomson mostrou que os raios catódicos eram feixes de partículas carregadas negativamente que se originavam de átomos que constituem o eletrodo carregado negativamente, chamado de cátodo. Através desse aparato, Thomson observou muitas propriedades dos raios catódicos, inclusive que, independentemente do material constituinte do cátodo, sua natureza é a mesma e que uma lâmina metálica exposta aos raios catódicos adquire carga elétrica negativa. Com isso, Thomson concluiu que os raios catódicos faziam parte de todos os átomos. Essas partículas foram chamadas de elétrons (representados por e-)

Ainda de acordo com Sussuchi, Machado e Moraes (2021, p. 25), ao construir um tubo de raios catódicos com uma tela fluorescente, Thomson pôde medir de maneira quantitativa os efeitos dos campos elétricos e magnéticos no jato fino de elétrons que passava através de um orifício em um eletrodo carregado positivamente.

Buscando descobrir o valor da carga elétrica do elétron usou uma câmara de gás e obteve valores relativamente próximos ao conhecido e aceito atualmente. Seu melhor resultado foi de $1,1 \times 10^{-19} C$. J. J. Thomson também tentou descobrir a massa do elétron. Entretanto, conseguiu apenas obter a razão entre a carga/massa.

O valor da carga elétrica elementar aceito atualmente somente foi determinado em 1909 por Robert Andrews Millikan no famoso experimento conhecido como "O Experimento da Gota de Óleo", que lhe rendeu, em 1923, o prêmio Nobel de Física.

2.2 O VALOR DA CARGA ELÉTRICA ELEMENTAR

Conforme exposto acima, o precursor na investigação da carga do elétron foi J.J. Thomson, que descobriu esta partícula em 1897.

Com seu estudante C.T.R. Wilson, Thomson determinou a carga do elétron fazendo uso de uma câmara de bolhas, ou câmara de nuvens, desenvolvida por Wilson. O uso da câmara de Wilson para a determinação da carga do elétron fundamenta-se no fato de que íons gasosos servem como núcleos de condensação de vapor d'água. Em outras palavras, os íons são decorados por gotículas do vapor supersaturado. Os íons são produzidos com um feixe de raios X, ou com um feixe de raios gama emitidos por uma fonte radioativa. (SANTOS, 2002).

De acordo com Santos (2002), sendo o movimento de cada gota ionizada na câmara de bolhas desenvolvida por C. T. R. Wilson o mesmo descrito por Stokes, em 1851, para uma gota esférica de raio a e densidade r , caindo sob ação de um campo gravitacional g , em um fluido uniforme de viscosidade h , Thomson usou a relação de Stoke para o cálculo da velocidade terminal das gotas ionizadas, expressa por

$$v = \frac{2}{9} \frac{ga^2r}{h} \quad (10)$$

Santos (2002) descreve superficialmente algumas etapas do método de Thomson:

A carga total da nuvem de gotículas era medida com um eletrômetro¹⁴, de modo que a carga de cada gotícula era obtida pela média; o número de gotículas era obtido através de um complicado processo de medidas e cálculos, começando pela medida da velocidade da nuvem e passando pelo uso da relação de Stokes. O melhor valor obtido por Thomson foi da ordem de $1,1 \times 10^{-19}$ coulomb.

Santos (2002) ainda destaca que, em 1903, H. A. Wilson, outro aluno de Thomson, implementou o método com a decisão de observar apenas a parte superior da nuvem de gotículas, introduzindo um campo elétrico na mesma direção do campo gravitacional, pois ali as gotículas eram menores e moviam-se mais lentamente. Com esse método, obteve o valor de $1,04 \times 10^{-19}$ coulomb para a carga do elétron.

Em 1907, Robert Andrews Millikan e seu aluno Louis Begeman, a fim de refinar seus resultados do experimento de H.A. Wilson, lançou mão de três métodos distintos e diversas tentativas. Seu experimento final consistia em borrifar pequenas

¹⁴ dispositivo usado para medir correntes ou tensões muito pequenas, baseado em deformações mecânicas produzidas por campos elétricos.

gotas de óleo em direção a um capacitor de placas paralelas preenchido com ar e alimentado por baterias que geravam alguns milhares de volts de diferença de potencial elétrico.

De acordo com Santos (1995, p. 110), o método I era a reprodução do experimento de H. A. Wilson, o método II consistia em isolar gotículas de água com o uso de um elevado campo elétrico e, por fim o método III, que logrou mais sucesso, fazia uso de gotículas de óleo. Santos destaca que com o método I eles obtiveram, para a carga do elétron, uma relação formalmente idêntica à de Thomson-Wilson, com valor médio em torno de 1.3×10^{-19} coulomb. Contudo, uma fonte de erro muito importante nos métodos baseados na câmara de bolhas e destacada por Ernest Rutherford, físico neerlandês, foi a dificuldade de se levar em consideração o efeito da evaporação das gotículas de água, resultando em valores superestimados para o número de gotículas e, conseqüentemente, em valores subestimados para a carga do elétron. Portanto, o problema estava em reduzir o efeito da evaporação. Para resolver esse problema, segundo Santos (1995, p. 110), Millikan utilizou um forte campo elétrico (obtido com uma tensão da ordem de 10 kV) para imobilizar a camada superior da nuvem de gotículas ionizadas e com conseguiu observar e acompanhar o processo de evaporação.

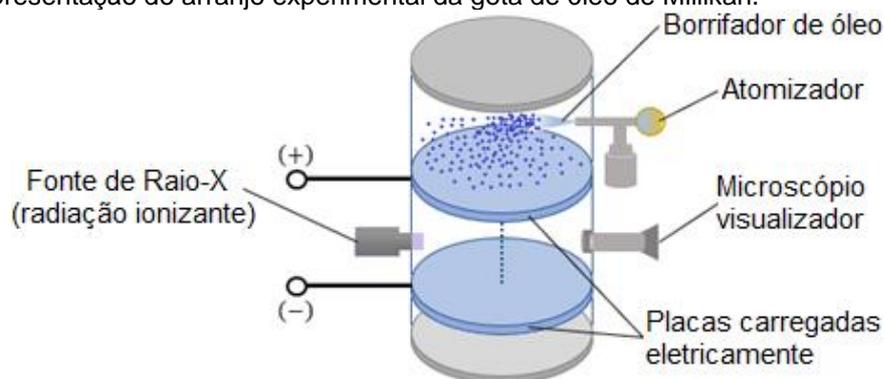
De acordo com Santos (1995, p. 110-111), ao ligar a bateria, a nuvem de vapor, ao invés de ficar imobilizada como Millikan esperava, se dissipou completa e imediatamente. Sucessivas observações o levaram a descobrir que depois da "explosão" da nuvem, algumas minúsculas gotículas permaneciam, proporcionando, pela primeira vez, a observação de gotas individuais que iniciavam o movimento e, depois paravam e/ou invertiam o sentido do movimento quando o campo elétrico era desligado e religado. Estava nascendo o Método II. O autor ainda destaca que para concluir essa fase experimental de Millikan, "é importante destacar o fato de que, com a colaboração de Begeman, ele chegou à conclusão de que os valores das cargas das diversas gotículas eram sempre múltiplos exatos da menor carga que eles haviam obtido". Ou seja, a conclusão de suas observações, do Método II, trouxe o resultado fundamental de que existe uma carga elementar, a carga do elétron. Entretanto, o principal problema deste método estava na rápida evaporação das gotículas de água. A água foi substituída por várias outras substâncias, entre as quais mercúrio e óleo. Devido a facilidade de obtenção e de manuseio, o óleo foi selecionado, dando início ao desenvolvimento do Método III.

Com o método II obtiveram o valor aproximado 1.56×10^{-19} coulomb para a carga do elétron.

Segundo Santos (1995, p. 111-112) informa, em 1909 Harvey Fletcher, procurou Millikan para orientá-lo em sua tese de doutorado. Millikan sugeriu que ele investigasse e descobrisse alguma substância que não evaporasse ao ser submetida a alta tensão. Após algumas discussões, o mercúrio, óleo e mais algumas substâncias foram sugeridas. Ainda segundo o autor, os resultados obtidos com óleo de relógio se apresentaram suficientemente bons que eles resolveram não tentar com outros materiais.

O arranjo experimental utilizado por Millikan e Fletcher é esquematizado de forma resumida na figura 9.

Figura 9: Representação do arranjo experimental da gota de óleo de Millikan.



Fonte: O autor.

De acordo com Santos (2002), o atomizador de perfume foi utilizado para borrifar óleo de relógio na câmara acima do capacitor. Durante a pulverização, devido ao atrito, algumas gotículas de óleo ionizavam-se. Ao penetrar no capacitor, algumas gotículas, eletrizadas pelo atrito, ficam sob a ação do campo elétrico que havia entre as placas do capacitor. Santos complementa que, nos primeiros experimentos Fletcher investigou o efeito de um campo elétrico, criado através da aplicação de uma diferença de potencial de 1000 volts, onde observou, através de um pequeno telescópio, que algumas gotículas subiam lentamente, enquanto outras desciam rapidamente. Um resultado lógico para quem sabia que algumas gotículas estavam eletrizadas positivamente e negativamente. Controlando a frequência da bateria e conseqüentemente o campo elétrico, Fletcher conseguia selecionar uma gotícula e observá-la por um longo tempo. Com a anotação de alguns dados e o tratamento matemático utilizado por Millikan e Begeman, Fletcher obteve, com seu rústico equipamento, resultados bastante razoáveis. Logo depois Millikan encomendou uma

montagem "profissional", com a qual obteve o valor mais preciso até hoje para a carga do elétron, isto é, $1,59 \times 10^{-19}$ C.

Em alguns casos, devido a resultante das forças (peso, elétrica, empuxo e resistência do ar) ser próximo de zero, as gotículas de óleo movimentavam-se muito lentamente. Esse fato permitiu a Robert Andrews Millikan e seus alunos obterem medidas precisas do seu diâmetro e massa, algumas das medidas necessárias para a determinação da carga elétrica.

2.3 CONCEITO DE CAMPO

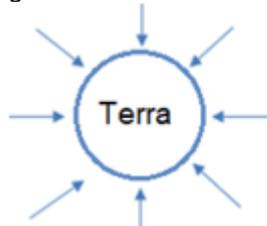
Facilmente é possível observar que muitos fenômenos ocorrem sem o contato direto entre corpos. Podemos citar, por exemplo, as interações gravitacionais da mecânica newtoniana, as trocas de calor por irradiação estudadas na termodinâmica, a atração e repulsão de corpos com propriedades elétricas e/ou magnéticas no estudo do eletromagnetismo, entre outros.

Neste trabalho definiu-se campo, de modo simplista e direto, como uma grandeza associada ao espaço em que é possível medir a interação entre corpos.

Pode-se pensar na ideia de campos vetoriais (campos de vetores no espaço), que formam linhas de campo.

Pensando num exemplo simples, pode-se citar o caso da atração gravitacional terrestre, em que todos os corpos dentro da atmosfera da Terra são atraídos para o centro do planeta devido a ação do campo gravitacional. Nesse caso, os vetores das linhas de força do campo gravitacional convergem para o centro, conforme indica a figura 10.

Figura 10: Sentido do campo gravitacional terrestre.



- As setas mostram o sentido das linhas de força do campo gravitacional terrestre convergindo para o centro do planeta.
- Os corpos imersos na atmosfera terrestre são atraídos para o centro do planeta.
- Existe apenas forças atrativas.

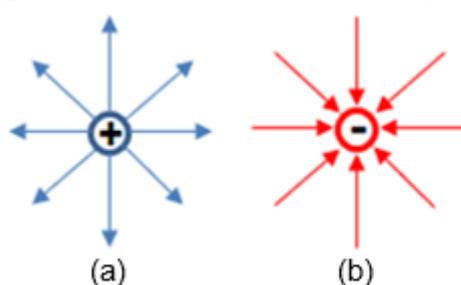
Fonte: O autor.

Nesse exemplo, a ação gravitacional ocorre devido a interação entre as massas dos objetos imersos na atmosfera terrestre e a massa do planeta.

No caso do campo elétrico, a interação ocorre entre cargas elétricas que, diferente da força gravitacional que é sempre atrativa, as forças elétricas podem ser

tanto atrativas quanto repulsivas, dependendo do sinal. Desse modo, as linhas de campo elétrico podem convergir tal como o campo gravitacional ou divergir. A figura 11 exemplifica o sentido das linhas de campo de acordo com o sinal da carga elétrica responsável pelo campo elétrico.

Figura 11: Sentido das linhas de campo elétrico.



a) Linhas de força de uma carga elétrica puntiforme positiva com sentido de afastamento de carga (linhas de campo divergente em relação à carga elétrica positiva).

b) Linhas de força de uma carga elétrica puntiforme negativa com sentido de aproximação (linhas de campo convergente em relação à carga elétrica negativa).

Fonte: O autor.

2.3.1 Leitura complementar: O campo de Faraday

Até o século XX, a ideia de ação a distância nunca satisfiz inteiramente os cientistas, muitos evitavam fazer afirmações que não fossem sustentadas pela experiência. Pires (2011, p. 271), afirma que “muitos deles acreditavam numa espécie de tensão ou pressão no meio que pudesse transmitir a força. Atribui-se a Faraday o crédito de ter tomado o primeiro e decisivo passo na direção certa”.

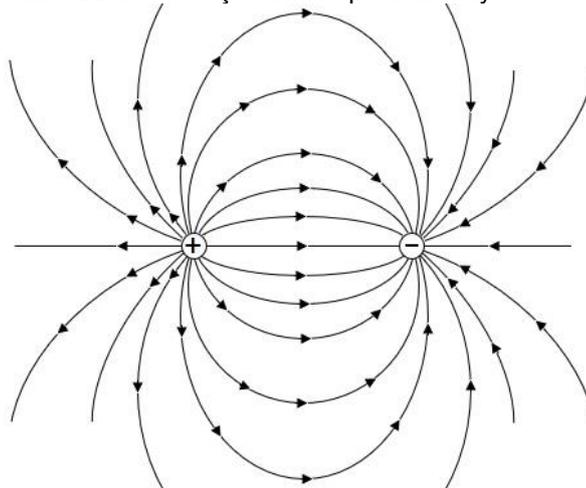
Embora Faraday tivesse recebido pouca educação, é considerado um dos maiores físicos experimentais de todos os tempos. Por conhecer muito pouco de Matemática, “procurou explicações para os fenômenos físicos usando ideias simples e qualitativas e, sempre que possível, analogias com outros fenômenos. Antes dele, as forças elétricas e magnéticas eram imaginadas como atuando através do espaço” (PIRES, 2011, p. 272).

As contribuições de Faraday ao eletromagnetismo, principalmente a ideia de linha de campo, segundo Rocha (2009, p. 1604-6), tiveram início em 1821, quando convidado, pelo editor da revista *Annals of Philosophy*, a escrever um resumo sobre as experiências e teorias eletromagnéticas que haviam aparecido no ano anterior em consequência dos trabalhos de Hans Oersted e outros. Faraday, não querendo relatar apenas sobre o que já existia, resolveu realizar suas próprias experiências. Ao realizar suas experiências com ímãs e limalhas de ferro colocadas sobre folhas de papel ou lâminas de vidro, observou linhas de forças magnéticas e elétricas como se fossem tubos de borracha ou linhas elásticas que se estendiam, a partir de ímãs

e/ou corpos eletrizados, no espaço. Faraday também observou que tais linhas podiam ser distorcidas. Desse modo, como essas linhas preenchem o espaço vazio, elas representavam um campo de forças.

A descrição de como Faraday visualizou as linhas de campo (ou linhas de força) é ilustrada, para um dipolo elétrico, na figura 12.

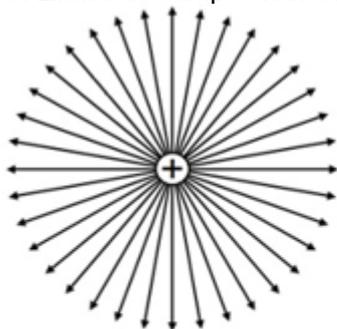
Figura 12: Representação das linhas de força obtidas por Faraday.



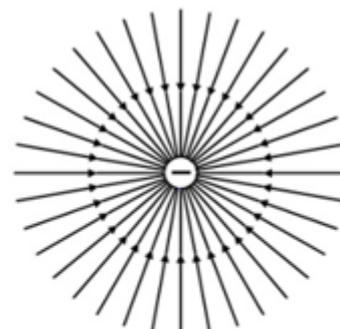
Fonte: O autor.

Faraday “percebeu no meio um estado de tensão” (figura 13).

Figura 13: Linhas de campo elétrico.



a) Representação das linhas de campo elétrico de uma carga pontual positiva. As linhas de campo têm sentido de afastamento da carga.



b) Representação das linhas de campo elétrico de uma carga pontual negativa. As linhas de campo têm sentido de aproximação da carga.

Fonte: O autor.

2.4 CAMPO ELÉTRICO

Na sequência será analisado o conceito de campo elétrico do ponto de vista do modelo matemático, o qual permite calcular sua intensidade e, do ponto de vista da física, que nos dá interpretações muito mais ricas. Neste material, por simplicidade, será considerado apenas o campo elétrico de uma carga puntiforme em repouso.

Do ponto de vista do modelo matemático, o campo elétrico é uma função que depende tanto do módulo da carga elétrica quanto da distância desta ao ponto onde se deseja calcular sua intensidade. Tal equação é obtida através das equações de Maxwell e tem seu módulo calculado pela equação

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^3} \hat{r}. \quad (11)$$

Onde Q é a carga responsável por gerar o campo elétrico e tem seu valor medido em coulomb (C), r é a distância, medida em metros (m) da carga até um ponto qualquer do espaço que se deseja calcular o valor do campo elétrico e k é a constante elétrica cujo valor aproximado, no vácuo é

$$k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}. \quad (12)$$

O valor da constante eletrostática para o ar é ligeiramente menor, logo pode-se, por simplicidade dos cálculos, utilizar o mesmo valor citado para o vácuo.

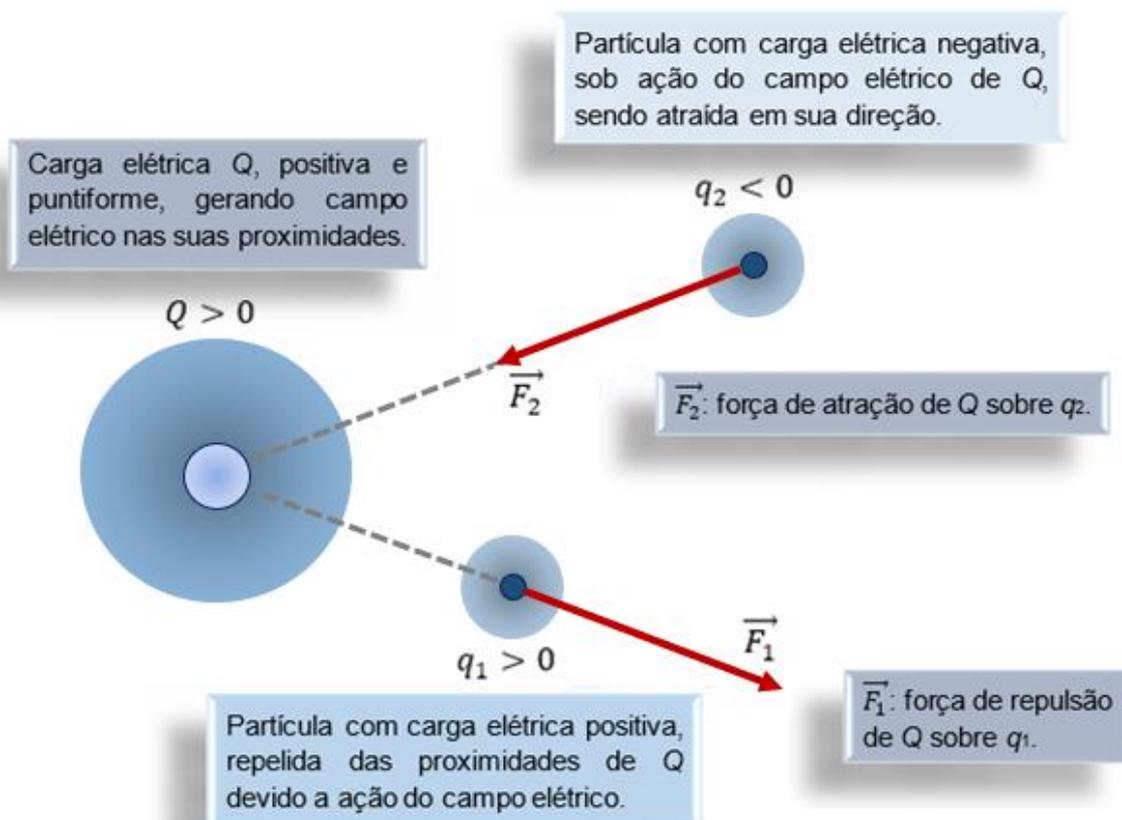
Contudo, fisicamente, a ideia de campo elétrico vai além da equação matemática. Para entender melhor o conceito de campo elétrico, vamos imaginar uma região do espaço inicialmente vazia, livre de qualquer influência elétrica.

Agora, se transportarmos uma carga elétrica qualquer para dentro dessa região, cada ponto vai adquirir propriedades elétricas que não tinha anteriormente e, a região antes vazia deixará de ser neutra. Ou seja, cada ponto do espaço adquire propriedades elétricas onde podemos associar um valor numérico, o qual chamamos de módulo do campo elétrico. As propriedades elétricas de cada ponto do espaço ao redor da carga formarão uma atmosfera elétrica. É essa atmosfera que chamamos de campo elétrico.

Em resumo, pode-se dizer que a partícula carregada tem um campo elétrico ao seu redor, independentemente da existência ou não de outras cargas.

Contudo, para verificar a existência do campo elétrico precisa-se de uma outra carga, a qual geralmente chama-se de carga de prova. Ao colocar a carga de prova nessa região de propriedades elétricas, o campo elétrico criado pela primeira carga, a qual será chamada de carga geradora, será o responsável pela interação entre elas. Tal interação é chamada de Força Elétrica, que pode ser de atração ou repulsão, conforme ilustrado na figura 14.

Figura 14: Campo elétrico e interação entre cargas elétricas.



Fonte: O autor.

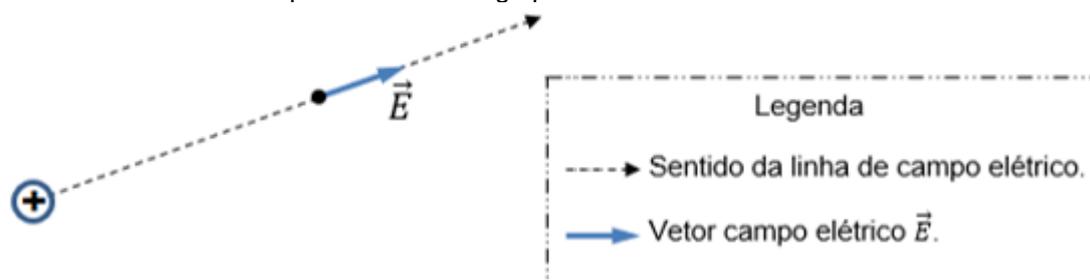
2.5 CARGA ELÉTRICA E O SENTIDO DO VETOR CAMPO ELÉTRICO

Como já visto, há dois tipos de cargas elétricas, as positivas e as negativas e ambas geram campo elétrico ao seu redor. O sinal das cargas é o responsável direto pelo sentido do vetor campo elétrico.

Como o sentido das linhas de campo elétrico da carga positiva são divergentes, o campo elétrico gerado por essa carga também será divergente.

Para traçar o vetor campo elétrico produzido por uma carga positiva, num ponto qualquer do espaço, basta traçar uma linha tracejada do centro da carga passando pelo ponto desejado e indicar nessa mesma linha o sentido da linha de campo, nesse caso divergente. O campo elétrico gerado no ponto escolhido sempre o mesmo sentido da linha de campo da carga elétrica que o gerou. Veja o exemplo na ilustração da figura 15 da próxima página.

Figura15: Sentido do vetor campo elétrico de carga positiva.

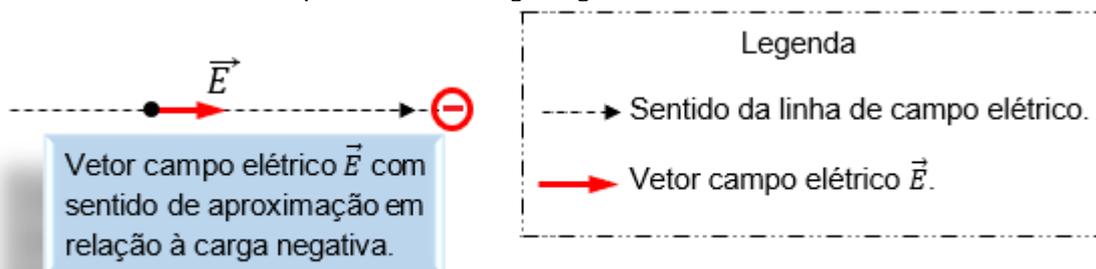


Vetor campo elétrico \vec{E} com sentido de afastamento em relação à carga positiva.

Fonte: O autor.

Já para uma carga negativa, como as linhas de campo elétrico convergem para a carga, o campo elétrico terá sentido do ponto escolhido para o centro da carga. Conforme mostra a figura 16.

Figura16: Sentido do vetor campo elétrico da carga negativa.



Vetor campo elétrico \vec{E} com sentido de aproximação em relação à carga negativa.

Fonte: O autor.

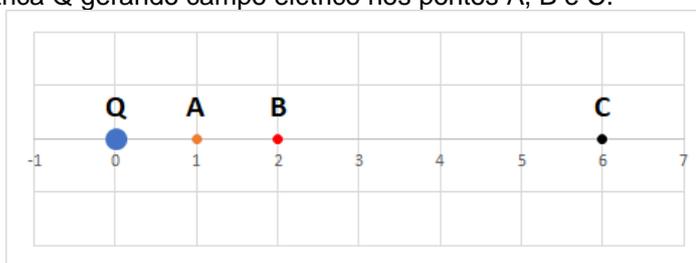
2.6 QUESTIONÁRIO 1.1

Este questionário tem por finalidade diagnosticar o nível de conhecimento dos alunos/turma para que, posteriormente, após a realização das simulações em planilhas eletrônicas, possa ser verificado o progresso na aprendizagem da respectiva turma.

Com base no que foi exposto neste capítulo, responda as questões propostas abaixo:

Na figura 17, o ponto *A* está distante 1 unidade da carga *Q*, o ponto *B* está distante 2 unidades e o ponto *C* está distante 6 unidades. O Campo elétrico no ponto *B*, gerado pela carga *Q*, é 36 N/C.

Figura 17: Carga elétrica *Q* gerando campo elétrico nos pontos *A*, *B* e *C*.



Fonte: O autor.

Baseando-se na figura 17 e nas informações expostas acima, responda as questões 1 e 2.

- 1) O valor do campo elétrico no ponto *A* é:
 - A) 9 N/C
 - B) 18 N/C
 - C) 36 N/C
 - D) 72 N/C
 - E) 144 N/C

- 2) O módulo do campo elétrico no ponto *C* é:
 - A) 1 N/C
 - B) 4 N/C
 - C) 12 N/C
 - D) 108 N/C
 - E) 324 N/C

- 3) O módulo do campo elétrico E_A de uma carga Q em no ponto A é 90 N/C. Qual é o módulo do campo elétrico E_B , em um ponto B , três vezes mais distante da carga Q ?
- A) 10 N/C
 - B) 30 N/C
 - C) 90 N/C
 - D) 270 N/C
 - E) 360 N/C
- 4) O módulo do campo elétrico E_1 de uma carga Q_1 em no ponto A é 50,0 N/C. Se substituirmos essa carga por outra, Q_2 , com o dobro da carga anterior, qual será o valor novo campo elétrico, E_2 no mesmo ponto A ?
- A) 12,5 N/C
 - B) 25,0 N/C
 - C) 50,0 N/C
 - D) 100 N/C
 - E) 200 N/C
- 5) O módulo do campo elétrico E_1 de uma carga Q_1 em no ponto A , distante 1 unidade da carga Q_1 , é 180 N/C. Sabendo que $Q_2 = 2Q_1$, qual deve ser o módulo do campo elétrico E_2 , da carga Q_2 num ponto B , distante 3 unidades da carga Q_2 ?
- A) 10 N/C. O módulo do novo campo elétrico será 4 vezes menor.
 - B) 20 N/C. O módulo do novo campo elétrico será 2 vezes menor.
 - C) 40 N/C. O módulo do novo campo será igual ao anterior.
 - D) 80 N/C. O módulo do novo campo elétrico será 2 vezes maior.
 - E) 160 N/C. O módulo do novo campo elétrico será 4 vezes maior.

2.7 SIMULAÇÃO 1: SENTIDO DO VETOR CAMPO ELÉTRICO DE UMA CARGA ELÉTRICA PUNTIFORME

Por meio das representações gráficas interativas, serão simuladas algumas situações que enriquecerão as análises.

Com o uso das planilhas eletrônicas do *Microsoft Excel*[®], tentar-se-á observar tanto numericamente, quanto graficamente o comportamento do vetor campo elétrico através de alterações de alguns dos parâmetros.

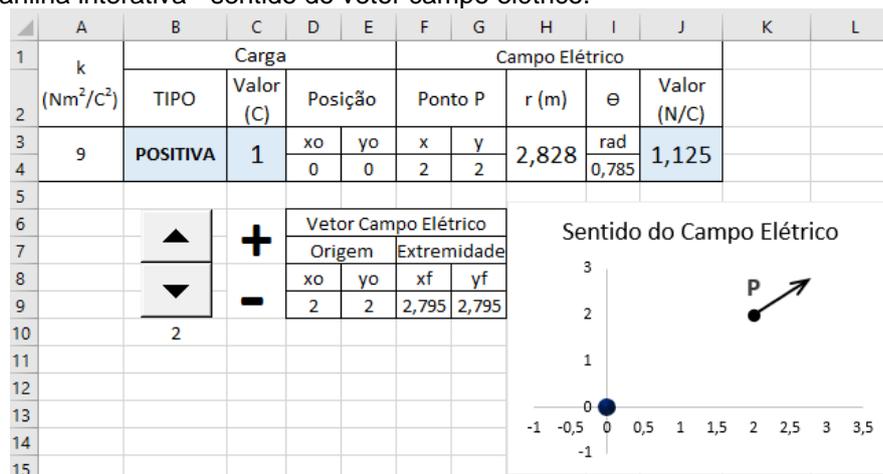
Na sequência adentrar-se-á no contexto da modelagem computacional e matemática do vetor campo elétrico.

Conforme visto, o sentido do campo elétrico depende do tipo de carga (negativa ou positiva). Aqui o objeto desejo será apenas a observação do sentido do vetor campo elétrico. A análise do módulo do campo elétrico será objeto da próxima simulação.

Agora, reunidos em grupos de, no máximo, quatro alunos irão realizar a simulação, usando a planilha interativa do apêndice B, figura 18.

Link para download da planilha interativa – sentido do vetor campo elétrico: <https://www2.uepg.br/ppgef/wp-content/uploads/sites/204/2021/11/1-Sentido-do-Campo-Eletrico.xlsx>

Figura 18: Planilha interativa - sentido do vetor campo elétrico.



Fonte: O autor.

INSTRUÇÕES/ORIENTAÇÕES

- ☞ A carga elétrica responsável pelo campo elétrico no ponto P está localizada na origem do plano de coordenadas cartesianas.

- ☞ Para alterar o sinal da carga elétrica, basta clicar sobre os botões de controle escolhendo entre os sinais positivo e negativo, figura 19.

Figura 19: Botão de Rotação - Sentido do Campo Elétrico.



Fonte: O autor.

- ☞ Ao clicar sobre o botão ▲ vocês estarão escolhendo o sinal positivo para a carga elétrica.
- ☞ Ao clicar sobre o botão ▼ o sinal escolhido para a carga elétrica será negativo.
- ☞ A indicação de qual sinal foi escolhido para a carga elétrica também será indicado na tabela de dados localizada acima do gráfico, bem como o valor do campo elétrico. Confira na figura 20, abaixo:

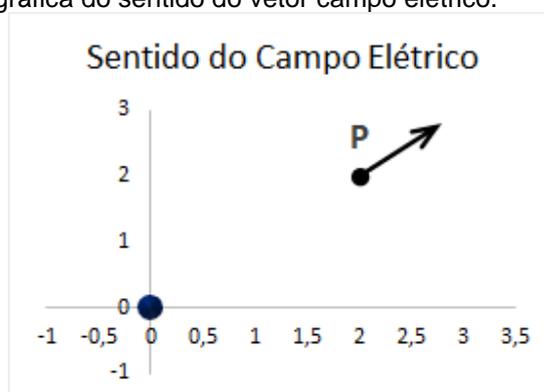
Figura 20: Tabela de dados - Sentido do Vetor Campo Elétrico.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	k	Carga				Campo Elétrico				
2	(Nm ² /C ²)	TIPO	Valor (C)	Posição		Ponto P		r (m)	θ	Valor (N/C)
3	9	POSITIVA	1	x ₀	y ₀	x	y	2,828	rad	1,125
4				0	0	2	2		0,785	

Fonte: O autor.

- ☞ O que observar?
 - O sentido do vetor campo elétrico no ponto P conforme o sinal escolhido para a carga elétrica, figura 21.

Figura 21: Representação gráfica do sentido do vetor campo elétrico.



Fonte: O autor.

- ☞ O tempo de execução: 5 minutos.
- ☞ Após a discussão com o grupo, anote, na próxima página, suas observações e conclusões.

2.8 SIMULAÇÃO 2: MÓDULO DO VETOR CAMPO ELÉTRICO DE UMA CARGA PUNTIFORME

Conforme visto anteriormente, o módulo do vetor campo elétrico originário de uma carga Q , em um ponto do espaço é:

- ☞ diretamente proporcional ao módulo da carga elétrica e;
- ☞ inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa a carga elétrica do ponto escolhido.

Agora, novamente reunidos em grupos de, no máximo, quatro alunos vocês deverão realizar segunda simulação, usando a planilha interativa do apêndice C, figura 22.

Link para download planilha interativa – simulação do módulo do vetor campo elétrico: <https://www2.uepg.br/ppgef/wp-content/uploads/sites/204/2021/11/2-Modulo-do-Campo-Eletrico.xlsx>

Figura 22: Planilha interativa – simulação do módulo do vetor campo elétrico.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	MÓDULO DO VETOR CAMPO ELÉTRICO								
2	k (Nm ² /C ²)	Carga			Campo Elétrico				
3		Módulo (C)	Posição		r (m)	Orientação (θ)	Módulo (N/C)	Componentes (N/C)	
4	9	3	xo	yo	2,0	radianos	6,750	Ex	Ey
5			0	0		0,000		6,750	0,000
6		▲			▲				
7		▼			▼				
8	RELAÇÕES								
9	Dados do vetor				Grandezas			Valores	
10	Origem		Extremidade final		Físicas	Inicial	Final	Razão	
11	xo	yo	xf	yf	Q (C)	1	3	3	
12	2,00	0,00	8,75	0,00	r (m)	1	2	2	
13					E (N/C)	9	6,750	3/4	
14									
15									
16	Módulo do vetor Campo Elétrico								
17									
18									
19									
20									
21									

Fonte: O autor.

INSTRUÇÕES/ORIENTAÇÕES

- ☞ A carga elétrica responsável pelo campo elétrico no ponto P está localizada na origem do plano de coordenadas cartesianas.
- ☞ O parâmetro inicial é o campo elétrico num ponto P situado à distância r (m) de 1 metro da carga Q , de módulo 1 C, conforme indicado na figura 23, na página seguinte.

Figura 23: Módulos: vetor campo elétrico, carga elétrica e distância.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	MÓDULO DO VETOR CAMPO ELÉTRICO								
2	k	Carga			Campo Elétrico				
3	(Nm ² /C ²)	Módulo (C)	Posição		r (m)	Orientação (Θ)	Módulo (N/C)	Componentes (N/C)	
4	9	1	xo	yo	1,0	radianos	9,000	Ex	Ey
5			0	0		0,000		9,000	0,000
6		▲			▲				
7		▼			▼				
8		Botão 1		Botão 2					

Fonte: O autor.

- ☞ O botão 1: altera o valor do módulo da carga elétrica.
 - Clicando para cima (▲) o valor da carga elétrica aumenta em uma unidade.
 - Clicando para baixo (▼) o valor da carga elétrica diminui em uma unidade. Nessa simulação, o valor máximo do módulo da carga elétrica é 4 C.
- ☞ O botão 2: altera a distância do ponto P em relação a carga elétrica.
 - Clicando para cima (▲) a distância aumenta em 1 metro.
 - Clicando para baixo (▼) a distância diminui em 1 metro.
 - Nessa simulação, o valor máximo da distância é de 5 metros.
- ☞ A razão entre os parâmetros iniciais (módulo da carga elétrica, distância e módulo do vetor campo elétrico) podem ser acompanhadas na tabela denominada RELAÇÕES, figura 24.

Figura 24: Relações dos parâmetros iniciais e finais.

RELAÇÕES			
Grandezas Físicas	Valores		Razão
	Inicial	Final	
Q (C)	1	4	4
r (m)	1	5	5
E (N/C)	9	1,440	4/25

Fonte: O autor.

- ☞ Gráfico Módulo do vetor Campo Elétrico (figura 25): representação gráfica do tamanho do vetor campo elétrico, de acordo com os valores escolhidos para a carga elétrica e para a distância do ponto P em relação a posição da carga elétrica.

2.10 QUESTIONÁRIO 1.2

Este questionário tem por objetivo verificar a evolução do aprendizado dos alunos/turma a respeito do conceito de campo elétrico após a realização das simulações em planilhas eletrônicas. Sequencialmente, pode-se realizar um comparativo de desempenho em relação aos apontamentos/respostas do questionário 1.1.

Com base em tudo que foi estudado e discutido até o momento, responda de forma **individual** a atividade proposta abaixo:

ATIVIDADE 2

Na figura 26, o ponto *A* está distante 1 unidade da carga *Q*, o ponto *B* está distante 2 unidades e o ponto *C* está distante 6 unidades.

Figura 26: Carga elétrica *Q* produzindo campo elétrico nos pontos *A*, *B* e *C*.



Fonte: O autor.

Com base na figura 26 acima e considerando que o módulo do campo elétrico no ponto *B* é 36 N/C, responda as questões 1 e 2 que se seguem.

- 1) O valor do campo elétrico no ponto *A* é:
 - A) 9 N/C
 - B) 18 N/C
 - C) 36 N/C
 - D) 72 N/C
 - E) 144 N/C

- 2) O módulo do campo elétrico no ponto *C* é:
 - A) 1 N/C
 - B) 4 N/C
 - C) 12 N/C
 - D) 108 N/C
 - E) 324 N/C

- 3) O módulo do campo elétrico E_A de uma carga Q em no ponto A é 90 N/C. Qual é o módulo do campo elétrico E_B , em um ponto B , três vezes mais distante da carga Q ?
- A) 10 N/C
 - B) 30 N/C
 - C) 90 N/C
 - D) 270 N/C
 - E) 360 N/C
- 4) O módulo do campo elétrico E_1 de uma carga Q_1 em no ponto A é 50,0 N/C. Se substituirmos essa carga por outra, Q_2 , com o dobro da carga anterior, qual será o valor novo campo elétrico, E_2 no mesmo ponto A ?
- A) 12,5 N/C
 - B) 25,0 N/C
 - C) 50,0 N/C
 - D) 100 N/C
 - E) 200 N/C
- 5) O módulo do campo elétrico E_1 de uma carga Q_1 em no ponto A , distante 1 unidade da carga Q_1 , é 180 N/C. Sabendo que $Q_2 = 2Q_1$, qual deve ser o módulo do campo elétrico E_2 , da carga Q_2 num ponto B , distante 3 unidades da carga Q_2 ?
- A) 10 N/C. O módulo do novo campo elétrico será 4 vezes menor.
 - B) 20 N/C. O módulo do novo campo elétrico será 2 vezes menor.
 - C) 40 N/C. O módulo do novo campo será igual ao anterior.
 - D) 80 N/C. O módulo do novo campo elétrico será 2 vezes maior.
 - E) 160 N/C. O módulo do novo campo elétrico será 4 vezes maior.

CAPÍTULO 3 – CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE DE DUAS CARGAS ELÉTRICAS PUNTIFORMES

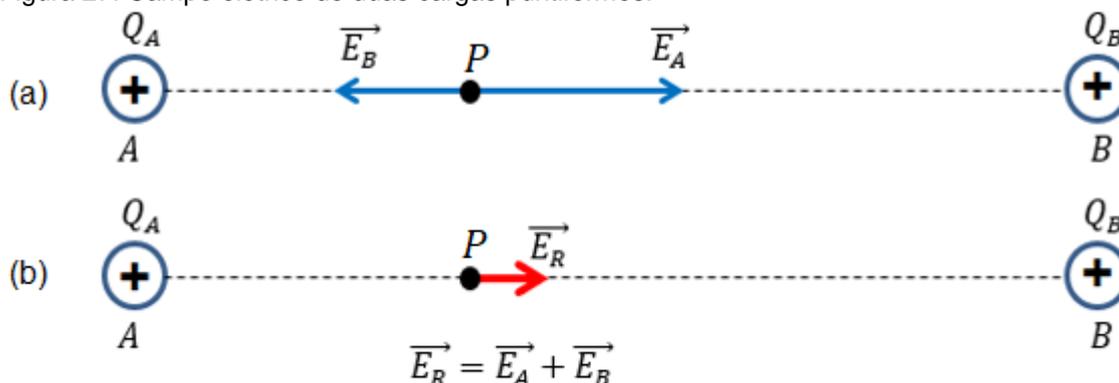
Quando duas cargas elétricas estão suficientemente próximas, seus campos elétricos interagem resultando no vetor campo elétrico resultante.

Para entender melhor, serão analisados alguns casos em que duas cargas elétricas geram campo elétrico em um mesmo ponto do espaço.

Suponha, duas cargas elétricas positivas, Q_A e Q_B , localizadas nos pontos A e B , respectivamente. Vamos tomar um ponto P , localizado entre as cargas elétricas e analisar a influência dos campos elétricos gerados simultaneamente sobre ele.

Primeiro são analisados os campos elétricos das cargas Q_A e Q_B , separadamente, conforme figura 27 (a). Depois, realizando a soma vetorial $\vec{E}_A + \vec{E}_B$, obtemos o vetor campo elétrico resultante \vec{E}_R , figura 27 (b).

Figura 27: Campo elétrico de duas cargas puntiformes.

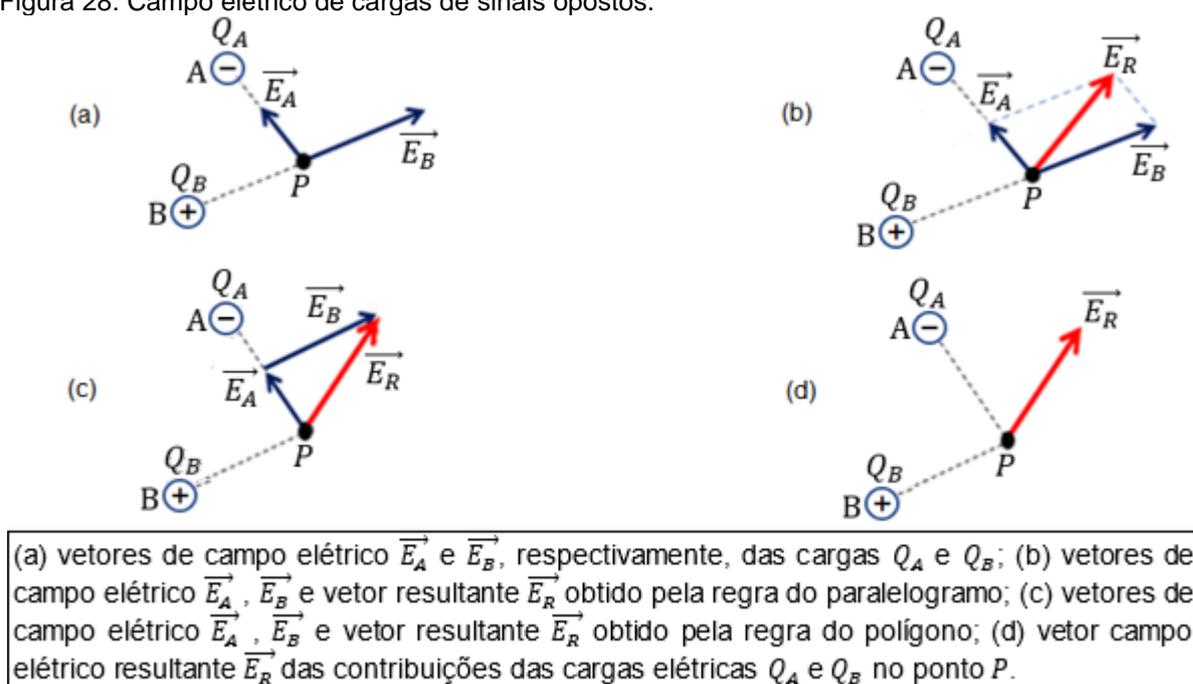


(a) vetores de campo elétrico \vec{E}_A e \vec{E}_B no ponto P referente as cargas elétricas puntiformes Q_A e Q_B , respectivamente; (b) vetor campo elétrico resultante \vec{E}_R no ponto P das contribuições das cargas elétricas puntiformes Q_A e Q_B .

Fonte: O autor.

Agora vamos supor duas cargas elétricas, $Q_A < 0$ e $Q_B > 0$, situadas próximas uma da outra e um ponto P próximo a elas, conforme figura 28.

Figura 28: Campo elétrico de cargas de sinais opostos.



Fonte: O autor.

Inicialmente analisa-se de forma separada o comportamento vetorial dos campos elétricos produzido pelas duas cargas, figura 28 (a). Através da soma vetorial, figuras 28 (b) e (c), obtém-se o vetor campo elétrico resultante no ponto desejado, figura 28 (d).

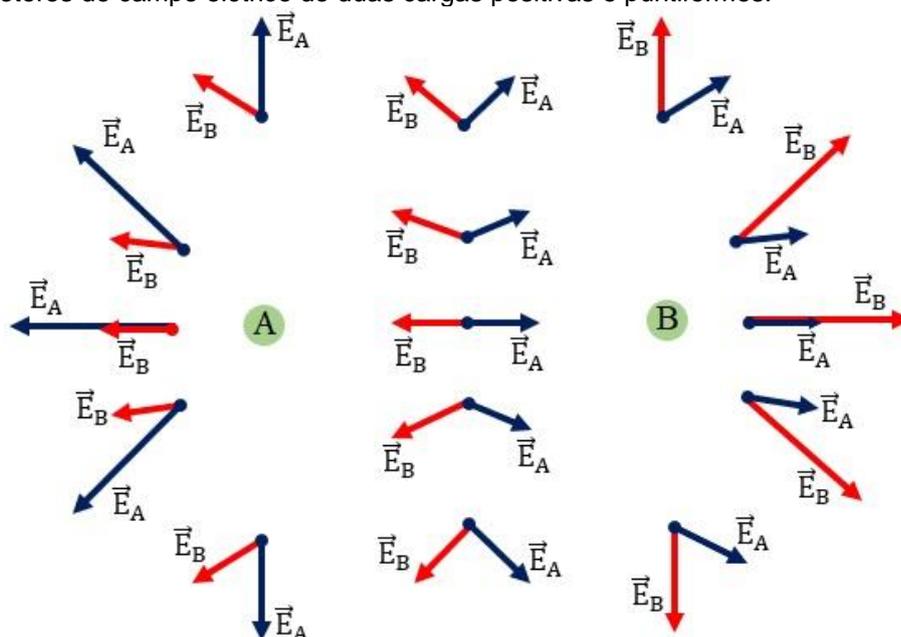
Na soma vetorial através da regra do paralelogramo, a partir das extremidades de cada vetor traça-se linhas paralelas ao outro vetor. O vetor resultante obtém-se ligando o ponto P ao ponto de intersecção das linhas paralelas.

Já a soma vetorial obtida pela aplicação da regra do polígono, o vetor \vec{E}_B é transportado da sua posição original até a extremidade do vetor \vec{E}_A .

A seguir, nas figuras 29 e 30, são apresentados dois exemplos da representação do campo elétrico gerado por duas cargas elétricas puntiformes positivas e de mesmo módulo em vários pontos próximo às cargas elétricas.

Importante destacar que nos exemplos destas figuras as escalas – tamanho dos vetores em relação às distâncias das cargas A e B – não são preservadas. Contudo, ainda podem ser usadas para analisar o comportamento do vetor campo elétrico resultante. Esse problema das escalas poderá ser melhor analisado no item 3.1 que trata, na simulação 3, do vetor campo elétrico de duas cargas elétricas puntiformes. Por enquanto as figuras 29 e 30 serão úteis apenas para análise do sentido do vetor campo elétrico resultante.

Figura 29: Vetores de campo elétrico de duas cargas positivas e puntiformes.

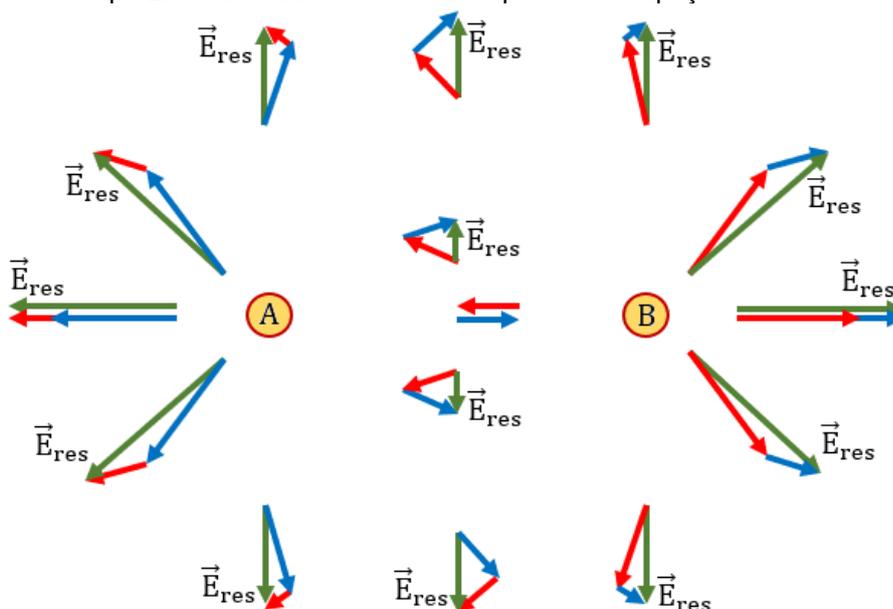


Fonte: O autor. (Reprodução da ilustração apresentada no livro didático).

Note que, como as cargas geradoras são ambas positivas, todos os vetores são de afastamento em relação às respectivas cargas elétricas.

Na figura 29, os vetores representados na cor azul referem-se ao campo elétrico \vec{E}_A da carga Q_A , os vetores de cor vermelha referendam o campo elétrico \vec{E}_B da carga Q_B .

Figura 30: Vetor Campo Elétrico Resultante em vários pontos do espaço.



Fonte: O autor. (Reprodução da ilustração apresentada no livro didático).

Na figura 30, os vetores representados na cor azul referem-se ao campo elétrico \vec{E}_A da carga Q_A , os vetores de cor vermelha referendam o campo elétrico \vec{E}_B da carga Q_B .e, o vetor resultante \vec{E}_{res} está destacado na cor verde.

Para cada ponto representado no espaço cartesiano, o vetor resultante é obtido através da soma vetorial dos vetores campos elétricos \vec{E}_A e \vec{E}_B , figura 30.

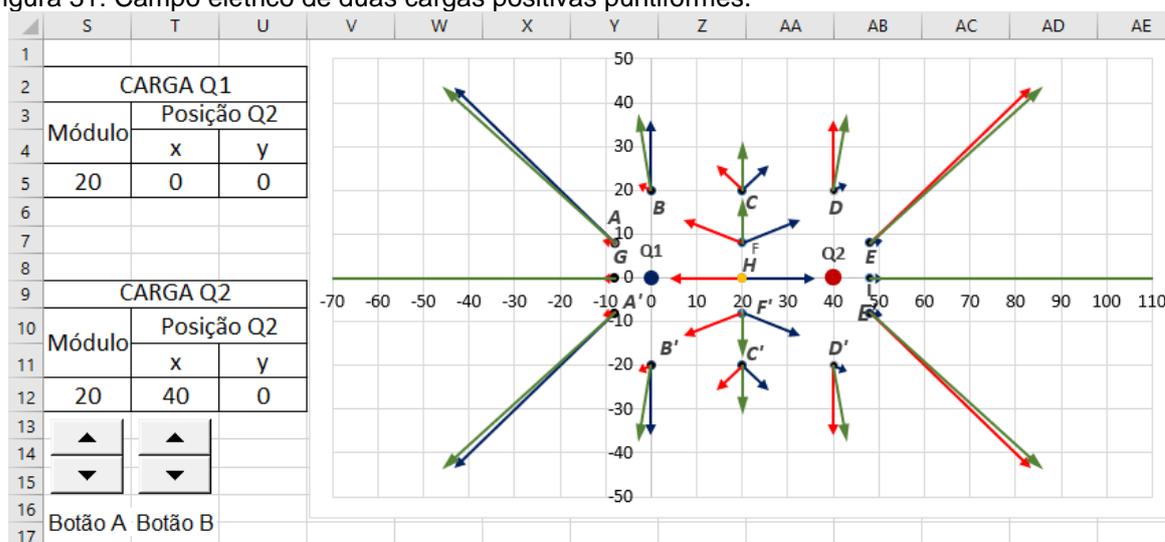
3.1 SIMULAÇÃO 3: VETOR CAMPO ELÉTRICO DE DUAS CARGAS ELÉTRICAS PUNTIFORMES

Através da planilha interativa do apêndice D, figura 32, reunidos em grupos de, no máximo, quatro alunos, realizar a simulação do vetor campo elétrico resultante de duas cargas positivas e puntiformes.

Na figura 31, são representados os vetores de campo elétrico de cada uma das cargas (Q_1 e Q_2) e o respectivo vetor de campo elétrico resultante para 15 pontos do plano cartesiano, de modo a ilustrar as configurações apresentadas nas figuras 29 e 30, preservando as proporções dos vetores em cada ponto do plano cartesiano.

Link para download planilha interativa – campo elétrico de duas cargas puntiformes:
<https://www2.uepg.br/ppgef/wp-content/uploads/sites/204/2021/11/3-Vetor-campo-eletrico-resultante-de-duas-cargas.xlsx>

Figura 31: Campo elétrico de duas cargas positivas puntiformes.



Fonte: O autor.

Observação: Os vetores representados na cor azul são vetores de campo elétrico originados pela carga elétrica Q_1 ; os vetores em vermelho são vetores de

campo elétrico originados pela carga Q_2 e; os vetores representados na cor verde são os vetores resultantes.

INSTRUÇÕES/ORIENTAÇÕES

- ☞ A carga elétrica Q_1 tem módulo 20 C e está fixa na origem do plano cartesiano, conforme indica a figura 32 abaixo.
- ☞ A carga elétrica Q_2 tem módulo variável de 0 C a 20 C e o valor da sua abscissa é variável de 0 à 60 unidades.

Figura 32: Cargas elétricas Q_1 e Q_2 e botões de rotação para a carga Q_2 .

	S	T	U
1			
2	CARGA Q1		
3		Posição Q2	
4	Módulo	x	y
5	20	0	0
6			
7			
8			

(a) Carga elétrica Q_1 .

	S	T	U
8			
9	CARGA Q2		
10		Posição Q2	
11	Módulo	x	y
12	20	40	0
13	▲	▲	
14	▼	▼	
15			
16	Botão A	Botão B	
17			

(b) Carga elétrica Q_2 .

Fonte: O autor.

- ☞ O botão A: altera o valor do módulo da carga elétrica Q_2 .
 - Clicando para cima (▲) o valor da carga elétrica aumenta em duas unidades. O valor mínimo é 0 .
 - Clicando para baixo (▼) o valor da carga elétrica diminui em duas unidades. Nessa simulação, o valor máximo do módulo da carga elétrica é 4 C . O valor máximo é 20 C .
- ☞ O botão B: altera o valor da abscissa da carga elétrica Q_2 . Aproximando-a ou afastando da carga elétrica Q_1 .
 - Clicando para cima (▲) a distância aumenta em 2 unidades, sendo o valor mínimo estabelecido em 0 unidade.
 - Clicando para baixo (▼) a distância diminui em 2 unidades, com o valor mínimo estabelecido em 60 unidade.
- ☞ O que observar?
 - O comportamento dos vetores de campo elétrico das cargas Q_1 e Q_2 e o respectivo vetor de campo elétrico resultante em cada um dos pontos representados no gráfico.
- ☞ O tempo de execução: 30 minutos.

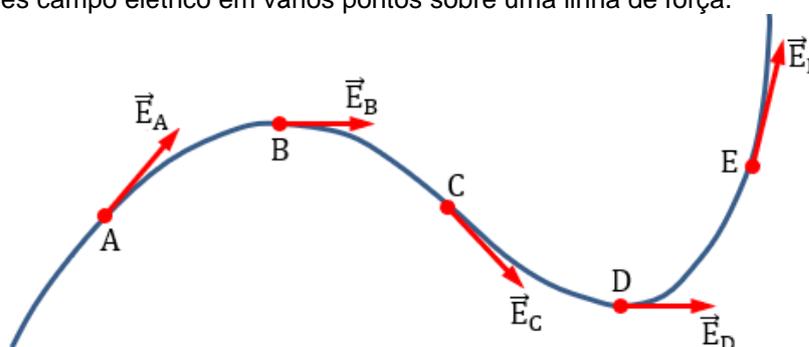
ANOTE AQUI SUAS OBSERVAÇÕES!

3.3 LINHAS DE CAMPO ELÉTRICO

Além de representar o campo elétrico através de vetores, Faraday o representou geometricamente e sua variação nas proximidades de uma carga elétrica, criando o conceito de linhas de campo ou linhas de força.

De acordo com a ideia proposta por Faraday, os vetores de campo elétrico, em cada ponto, têm o mesmo sentido da linha de campo elétrico, contudo, são tangentes a ela. A figura 33 ilustra de forma exemplar a proposta de Faraday, aceita até o momento.

Figura 33: Vetores campo elétrico em vários pontos sobre uma linha de força.

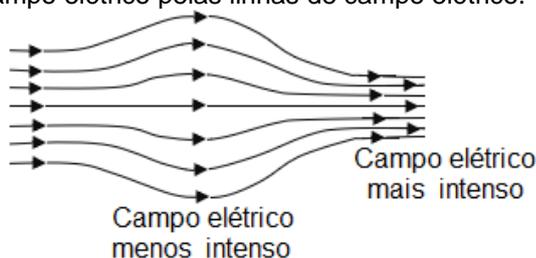


Fonte: O autor.

Se considerar as várias linhas de campo elétrico nas proximidades de uma carga elétrica, tem-se uma representação da configuração do campo elétrico nessa região.

De acordo com a proposta de Faraday, apresentada no texto do item 2.3.1, a intensidade do campo elétrico é dada pela concentração das linhas de campo. Quanto mais concentradas estão as linhas, mais intenso é o campo elétrico na região. Confira a ilustração da figura 34.

Figura 34: Intensidade do campo elétrico pelas linhas de campo elétrico.

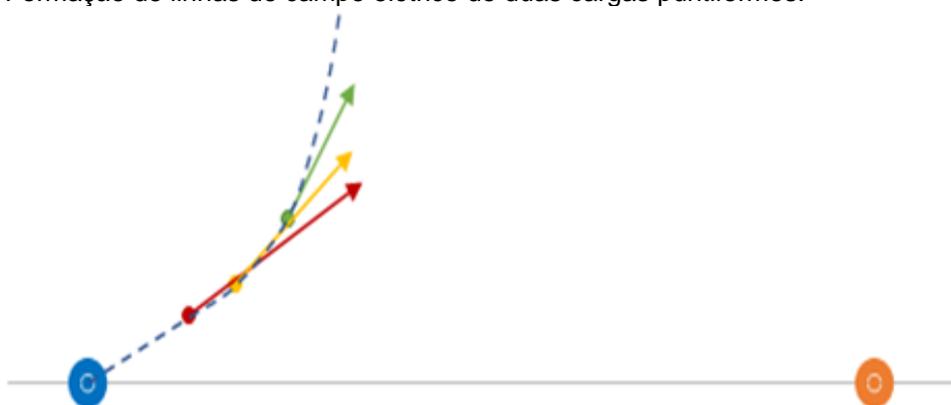


Fonte: O autor.

Para a confecção de linhas de campo elétrico, vamos tomar duas cargas elétricas positivas alinhadas sobre o eixo x.

Aleatoriamente escolheu-se um ponto não alinhado às cargas e próximo a uma delas. Nesse ponto calculou-se o campo elétrico resultante e o representou-se vetorialmente. Em seguida, escolheu-se o segundo ponto, próximo ao anterior e localizado na reta suporte do primeiro vetor, e nesse segundo ponto calculou-se o “novo” vetor de campo elétrico resultante e novamente representou-se graficamente. Escolheu-se um terceiro ponto, próximo ao anterior e localizado na reta suporte do segundo vetor e, novamente, calculou-se e representou-se graficamente o terceiro vetor de campo elétrico resultante. Veja o exposto na figura 35.

Figura 35: Formação de linhas de campo elétrico de duas cargas puntiformes.



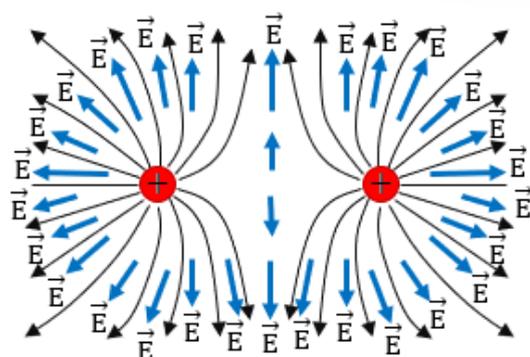
Fonte: O autor.

Se prosseguir repetindo o processo infinitamente e tomando pontos na mesma direção e sentido do vetor anterior e muito próximos a sua origem, consegue-se desenhar uma linha de campo elétrico produzida pela presença das duas cargas elétricas.

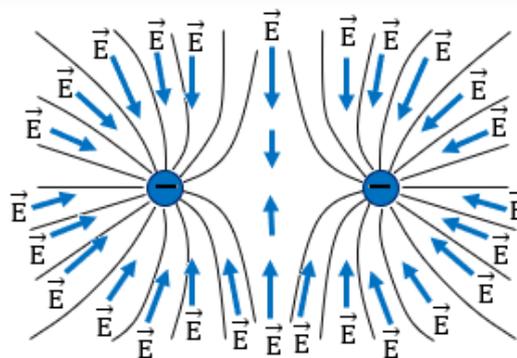
Na figura 36, da página seguinte, há quatro exemplos de representações de linhas de campo para pares de cargas elétricas puntiformes.

Figura 36: Configuração das linhas de campo elétrico para um pares de cargas.

As setas em azul representam o vetor campo elétrico resultante \vec{E} em alguns pontos do espaço.

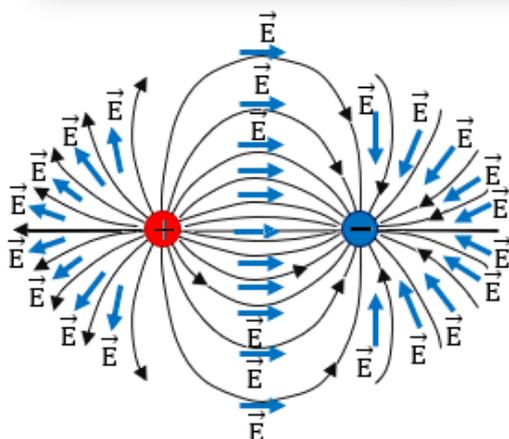


a) Linhas de campo elétrico para duas cargas positivas de mesmo módulo.

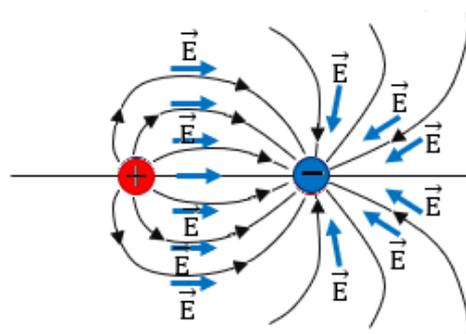


b) Linhas de campo elétrico para duas cargas negativas de mesmo módulo.

O vetor campo elétrico resultante \vec{E} , em qualquer ponto do espaço, sempre será tangente à linha de campo elétrico.



c) Linhas de campo elétrico para duas cargas de sinais contrários e de mesmo módulo.



d) Linhas de campo elétrico para duas cargas de sinais contrários e de módulo diferentes.

Fonte: O autor.

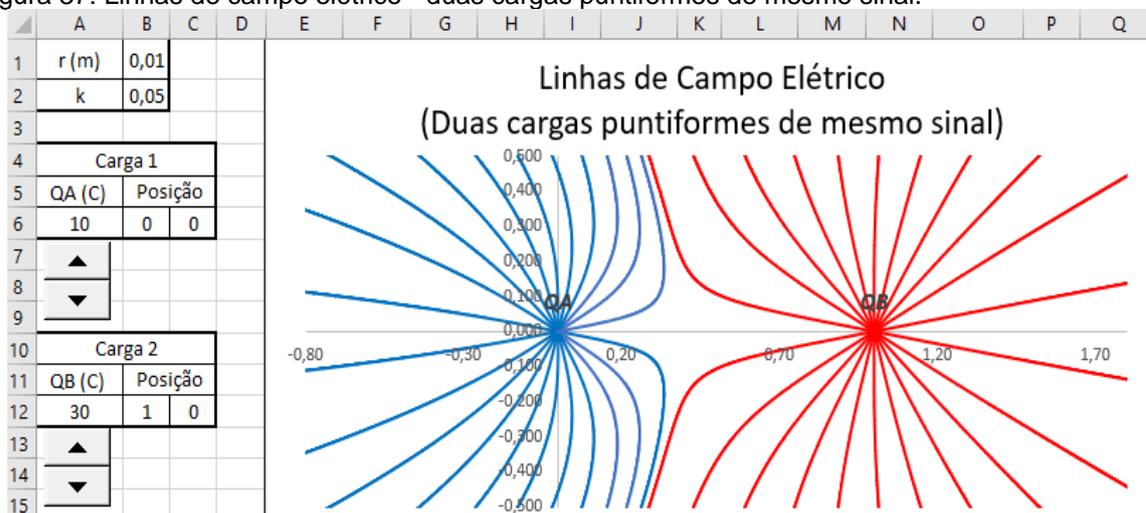
Para cargas elétricas positivas, os sentidos das linhas de campo são de afastamento em relação às cargas. Já para cargas negativas, o sentido das linhas de campo elétrico é de aproximação.

3.4 SIMULAÇÃO 4: LINHAS DE CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE DE DUAS CARGAS ELÉTRICAS PUNTIFORMES

Através da planilha interativa do apêndice E, figura 37, reunidos em grupos de, no máximo, quatro alunos, realizar a simulação referente às linhas de campo elétrico resultante de duas cargas positivas e puntiformes.

Link para download planilha interativa – campo elétrico de duas cargas puntiformes:
[https://www2.uepg.br/ppgef/wp-content/uploads/sites/2021/11/4-Linhas-de-campo-eletrico-de-duas-cargas-puntiformes-de-mesmo-sinal.xlsx](https://www2.uepg.br/ppgef/wp-content/uploads/sites/204/2021/11/4-Linhas-de-campo-eletrico-de-duas-cargas-puntiformes-de-mesmo-sinal.xlsx)

Figura 37: Linhas de campo elétrico - duas cargas puntiformes de mesmo sinal.



Fonte: O autor.

Observação: As linhas de campo elétrico de cor azul são linhas de campo que saem da carga Q_A e, as linhas de campo elétrico de cor vermelha são linhas de campo com origem na carga Q_B .

INSTRUÇÕES/ORIENTAÇÕES

- ☞ A carga elétrica Q_A está posicionada e fixa na origem do sistema de coordenadas cartesianas. Seu módulo é variável, com valor mínimo fixado em 1C e valor máximo em 20C. Para alterar o valor do módulo desta carga, utilize o botão de rotação posicionado logo abaixo do módulo de Q_A , figura 38 (a).
- ☞ A carga elétrica Q_B está posicionada e fixa na posição (1, 0) do sistema de coordenadas cartesianas. Seu módulo é variável, com valor mínimo fixado em 1C e valor máximo em 30C. Para alterar o valor do módulo desta carga, utilize o botão de rotação posicionado logo abaixo do módulo de Q_B , figura 38 (b).

Figura 38: Botões de rotação para o módulo das cargas elétricas Q_A e Q_B .

	A	B	C
4	Carga 1		
5	QA (C)	Posição	
6	10	0	0
7	▲		
8	▼		
9			

(a)

	A	B	C
10	Carga 2		
11	QB (C)	Posição	
12	30	1	0
13	▲		
14	▼		
15			

(b)

(a) botão de rotação para alteração do módulo da carga elétrica puntiforme Q_A ; (b) botão de rotação para alteração do módulo da carga elétrica puntiforme Q_B .

Fonte: O autor.

☞ Os botões de rotação:

- Clicando para cima (▲) o valor da carga elétrica Q_A aumenta em uma unidade, figura 381 (a); e o valor da carga elétrica Q_B aumenta em duas unidades, figura 38(b).
- Clicando para baixo (▼) o valor da carga elétrica Q_A diminui em uma unidade, figura 38 (a); e o valor da carga elétrica Q_B diminui em duas unidades, figura 38 (b).

☞ O que observar?

- A configuração das linhas de campo elétrico das cargas elétricas Q_A e Q_B de acordo com os valores escolhidos para seus respectivos módulos.

☞ O tempo de execução: 30 minutos.

ANOTE AQUI SUAS OBSERVAÇÕES!

3.6 QUESTIONÁRIO FINAL

Este questionário tem por objetivo analisar o desempenho final dos estudantes após o desenvolvimento e aplicação das simulações constantes neste trabalho e respectivas discussões realizadas em grupo.

Embora as simulações tenham sido realizadas em grupo, este questionário deve ser respondido individualmente por cada um dos alunos.

QUESTINÁRIO FINAL

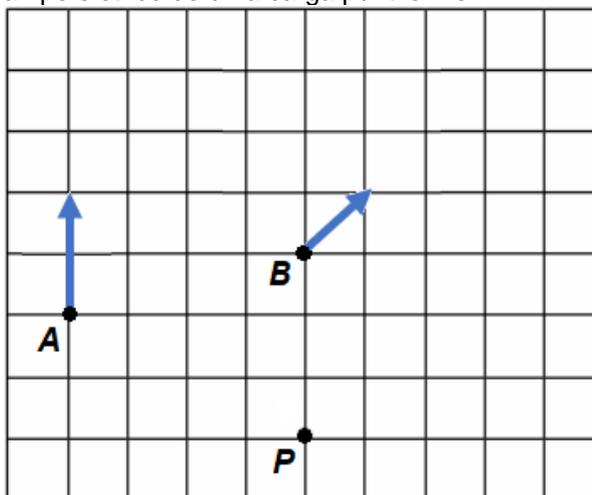
- 1) Assinale a alternativa verdadeira sobre as propriedades das linhas de força do campo elétrico:
 - A) O campo elétrico é uma grandeza escalar e sua unidade de medida é N/C.
 - B) As linhas de força do campo elétrico são fechadas, adentram as cargas positivas e emergem das cargas negativas.
 - C) As linhas de força do campo elétrico são abertas, emergem das cargas positivas e adentram as cargas negativas.
 - D) O campo elétrico depende exclusivamente do módulo da carga que o produz
- 2) Seja Q (positiva) a carga geradora do campo elétrico e q a carga de prova em um ponto P , próximo de Q . Podemos afirmar que:
 - A) o vetor campo elétrico em P dependerá do sinal de q .
 - B) o módulo do vetor campo elétrico em P será tanto maior quanto maior for a carga q .
 - C) o vetor campo elétrico será constante, qualquer que seja o valor de q .
 - D) a força elétrica em P será constante, qualquer que seja o valor de q .
- 3) Duas cargas $Q_1 = +1 \text{ C}$ e $Q_2 = +2 \text{ C}$ estão separadas pela distância de 1,0 m. Em um ponto a meia distância entre as cargas, o campo elétrico gerado por elas é:
 - A) é igual
 - B) O módulo do campo elétrico gerado pela carga Q_2 é o dobro do módulo do campo elétrico gerado pela carga Q_1 .
 - C) O módulo do campo elétrico gerado pela carga Q_1 é o dobro do módulo do campo elétrico gerado pela carga Q_2 .
 - D) O módulo do campo elétrico gerado por uma das cargas é 4 vezes maior que o campo elétrico gerado pela outra.
 - E) O campo elétrico gerado por ambas é nulo.

- 4) Uma carga elétrica puntiforme produz um campo elétrico de módulo E_1 em um ponto do espaço que se encontra a uma distância d em relação à carga. Ao dobrarmos a distância entre a carga e o campo, qual deve ser a razão entre o novo campo elétrico E_2 e o campo elétrico E_1 ?

$$\text{razão} = \frac{E_2}{E_1}$$

- A) $\frac{1}{4}$
 B) $\frac{1}{2}$
 C) 2
 D) 4
 E) 8
- 5) Na figura 39 abaixo, o campo elétrico gerado por uma carga puntiforme em repouso é representado nos pontos A e B e tem suas direções e sentidos representados pelas respectivas setas.

Figura 39: Vetores de campo elétrico de uma carga puntiforme.



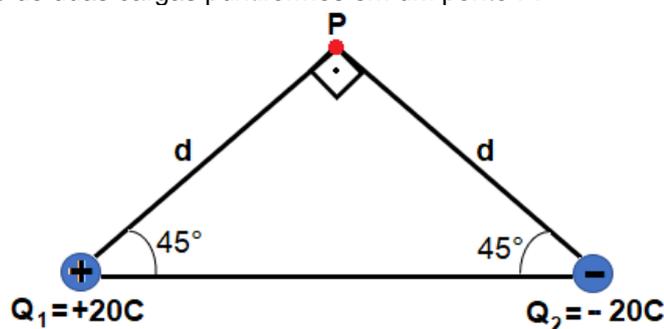
Fonte: O autor.

Sabendo que o módulo do campo elétrico no ponto A vale 16 N/C, qual é o módulo do campo elétrico no ponto P?

- A) 4 N/C
 B) 6 N/C
 C) 8 N/C
 D) 25 N/C
 E) 32 N/C

6) Analisando a figura 40 abaixo,

Figura 40: Campo elétrico de duas cargas puntiformes em um ponto P.



Fonte: O autor.

responda: qual das opções abaixo melhor representa o sentido do vetor campo elétrico resultante?

A) 

B) 

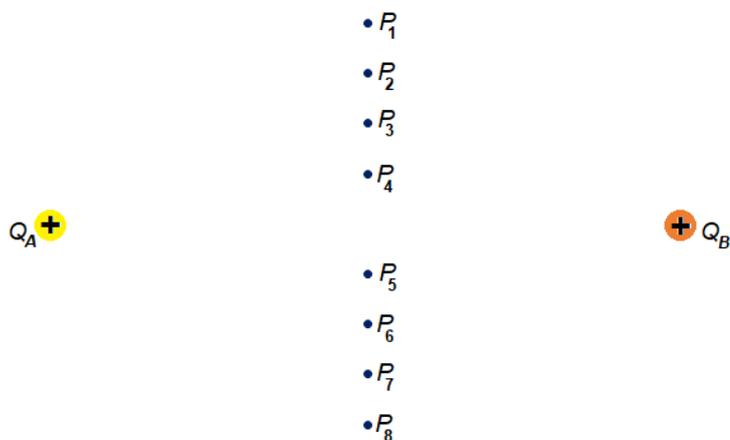
C) 

D) 

E) O vetor campo elétrico resultante é nulo.

7) Considere o campo elétrico gerado por duas cargas elétricas puntiformes, de mesmo módulo e sinal, conforme mostrado na figura 41 abaixo.

Figura 41: Duas cargas puntiformes de mesmo sinal e módulo.

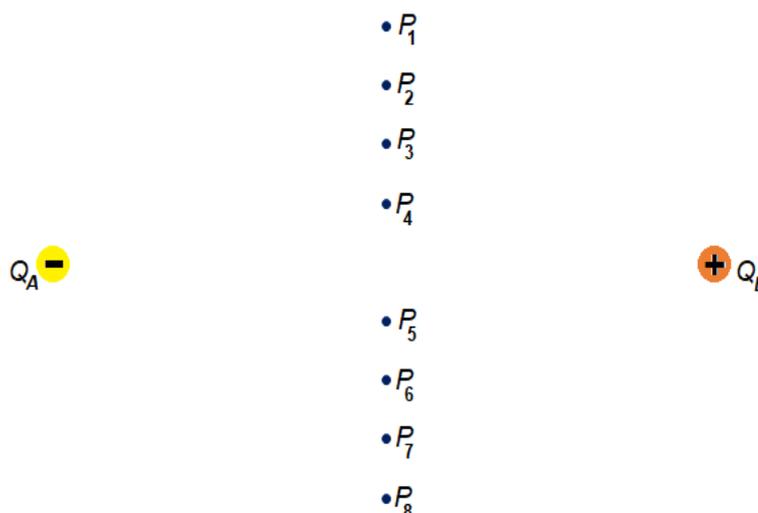


Fonte: O autor.

Sobre o vetor de campo elétrico resultante nos pontos equidistantes das cargas, é correto afirmar que:

- A) tem a direção perpendicular à linha que une as duas cargas e o mesmo sentido em todos esses pontos.
- B) tem a mesma direção da linha que une as duas cargas, mas varia de sentido para cada ponto analisado.
- C) tem a direção perpendicular à linha que une as duas cargas, mas varia de sentido para cada ponto analisado.
- D) tem a mesma direção da linha que une as duas cargas e o mesmo sentido em todos esses pontos.
- 8) Considere o campo elétrico gerado por duas cargas elétricas puntiformes, de mesmo módulo e sinais contrários, separadas por uma distância d , conforme mostrado na figura 42, abaixo.

Figura 42: Duas cargas puntiformes de mesmo módulo e sinais contrários.



Fonte: O autor.

Sobre o vetor de campo elétrico resultante nos pontos equidistantes das cargas, é correto afirmar que:

- A) tem a direção perpendicular à linha que une as duas cargas e o mesmo sentido em todos esses pontos.
- B) tem a mesma direção da linha que une as duas cargas, mas varia de sentido para cada ponto analisado.
- C) tem a direção perpendicular à linha que une as duas cargas, mas varia de sentido para cada ponto analisado.
- D) tem a mesma direção da linha que une as duas cargas e o mesmo sentido em todos esses pontos.

CAPÍTULO 4 – SUGESTÕES AO PROFESSOR

As tecnologias computacionais abrem um leque de possibilidades para o ensino de ciências, sobretudo para o Ensino de Física. As possibilidades de utilização oportunizam ao professor novas formas de transmissão do conhecimento e aos alunos novas formas e meios para aprender ciência e/ou se preparar para a vivência na sociedade atual. Fiolhais e Trindade (2003, p. 271), afirmam que “os modos de utilização que disponibilizam formas de aprendizagem interativas são particularmente promissores para aprender ciências”, sobretudo diante das situações atuais que exigem novas metodologias e novos mecanismos de ensino e aprendizagem.

O uso do computador – e outras ferramentas tecnológicas de simulação – permite aos alunos manipular de forma direta, rápida e simples parâmetros importantes aos estudos fenomenológicos e aprofundar-se em suas observações, enriquecendo suas análises e compreensões, bem como visualizar o conhecimento científico como algo construído a partir de observações, análises de possibilidades e tentativas, muitas vezes correlacionadas à outras áreas do conhecimento humano.

O uso de simuladores apresenta algumas vantagens, como interatividade e participação mais efetiva dos alunos, baixo custo, pouco tempo de duração e os alunos podem trabalhar um experimento com muitas variáveis. Além disso, esses *softwares* também podem ser usados nos cursos de Ensino a distância, que são cada vez mais procurados pelos estudantes.

Contudo, ao fazer uso de ferramentas tecnológicas atuais altera-se o modo com o qual nossos alunos estão habituados a aprender. Ao analisar um resultado e rapidamente possibilitar uma nova análise através de alterações paramétricas os tiramos do comodismo da reprodução automática do conhecimento e da simples procura por um resultado mecanicamente produzido apenas através de cálculos.

Uma das práticas trabalhadas transversalmente nos currículos escolares, a comunicação também se faz presente nas metodologias mediadas pelas ferramentas computacionais. Hoje é difícil não pensar nas possibilidades tecnológicas para o ensino e em como realizar a mediação dos conhecimentos escolares através do uso consciente e dinâmico que as novas ferramentas e tecnologias proporcionam.

Desse modo, ao apresentar novas ferramentas tecnológicas para o processo de ensino e aprendizagem somos desafiados a repensar os caminhos para a mediação tecnológica no ensino.

4.1 POSSÍVEIS ENCAMINHAMENTOS PEDAGÓGICOS

A introdução ao estudo de campo elétrico e/ou qualquer outro tema pode ter como ponto de partida uma problematização inicial, uma demonstração experimental do fenômeno ou ainda uma organização didática com ambas as possibilidades. As possibilidades de trabalho não são excludentes e podem se misturarem. Tudo depende do contexto escolar: turma, professor, estrutura e tempo para desenvolvimento das atividades, tecnologias disponíveis e objetivos do plano de ensino.

Dos vários encaminhamentos possíveis ao seu uso, destacamos algumas possibilidades: demonstração gráfica através de aparelho projetor de imagens pelo professor e; simulações realizadas pelos alunos através de planilhas previamente construídas pelo professor ou com os alunos construindo as planilhas interativas se aprofundando no modelo matemático e computacional para só depois realizarem as simulações.

Na situação em que o professor realiza a demonstração gráfica com projetor de imagens, ele elabora as simulações desejadas e ao realiza a demonstração para os alunos direcionando-os às observações que julgar importante ou mais conveniente para o momento.

Quanto à forma de abordar o fenômeno, essa pode ser tanto qualitativa quanto quantitativa. Essa possibilidade de aplicação realiza-se de forma mais rápida e sem muita abertura para outras possíveis observações fenomenológicas. O aluno será muito mais um receptor do conhecimento pronto.

Ao construírem suas próprias planilhas interativas, o aluno sai da condição de aprendiz passivo e passa a ser protagonista no processo de construção do seu próprio conhecimento. Nessa abordagem, o professor tem o papel de guiar os alunos, auxiliando-os no entendimento dos conceitos físicos, na descrição matemática dos fenômenos trabalhados e na sua transposição para o modelo computacional. Ou seja, a função do professor é de intermediar os alunos para as discussões e descobertas das correlações dos modelos matemáticos e computacionais com os conceitos físicos trabalhados.

Além de poder observar o comportamento vetorial por meio das simulações, o aluno adquire/melhora sua observação espacial e geométrica, vê na modelagem

matemática uma importante ferramenta da disciplina de Física e é inserido ao universo tecnológico através da ferramenta computacional.

Já no uso de planilhas interativas previamente construídas pelo professor visa uma aplicação mais rápida e, conseqüentemente uma economia no tempo destinado ao estudo do tema abordado. Nesse contexto, o foco é apenas nas observações geométricas das operações vetoriais e seus respectivos comportamentos diante do fenômeno físico abordado. O educando realiza as simulações apenas operando os botões de rotação, substituindo a digitação de um número em uma célula específica, o que contribui consideravelmente para uma operação mais dinâmica das simulações gráficas e numéricas.

Dentre os encaminhamentos citados acima, as simulações podem ser aplicadas em atividades abertas estruturadas, semiestruturadas ou abertas.

As atividades estruturadas visam simulações direcionadas onde o professor seleciona as simulações que deseja e disponibiliza aos alunos, individualmente ou em grupos, para que realizem em sala de aula com computadores pessoais ou em laboratório de informática escolar, seguindo um roteiro de comando e questionamentos de modo a direcionar os alunos às observações desejadas para o momento. Essa metodologia possibilita a interação dos alunos com a ferramenta computacional, familiarizando-os com a ferramenta. Os alunos também terão um pouco mais de liberdade para realizarem suas observações, pois serão eles que realizarão a alteração de parâmetros observacionais.

Já na aplicação de atividades semiestruturadas, o roteiro/questionário dá um direcionamento inicial, mas o decorrer das simulações possibilita aos alunos realizarem novas observações e assim acrescentar mais informações, aprofundando-se no estudo do tema escolhido. Ou seja, possibilita tanto ao aluno quanto ao docente acrescentar novas observações, com o aluno tendo uma participação mais ativa.

Por fim, as atividades abertas, por não haver um roteiro/questionário previamente definido, possibilitam um grau de liberdade maior para que os alunos realizem as simulações e respectivas observações para, posteriormente, debaterem com seus colegas e professor.

Embora não seja necessário um roteiro de questionamento previamente definido, o professor continua responsável pela orientação dos alunos, bem como introdução ao tema de trabalho e sequenciamento das simulações. Ou seja, o professor deve planejar e organizar suas aulas a fim de guiar os alunos para o estudo

do fenômeno. Como nas outras, aqui também os alunos devem realizar anotações acerca de suas observações nas simulações.

Segundo Mota (2014), as sequências ou roteiros de atividades investigativas podem apresentar diferentes graus de liberdade de ação dos estudantes e de interferência do professor. De acordo com esse autor, existem três tipos de investigação: (I) Estruturada, (II), Semiestruturada e (III) Aberta.

Em uma investigação estruturada, o professor, oralmente ou por meio de um roteiro, propõe aos estudantes um problema experimental para eles investigarem, fornece os materiais, indica os procedimentos a serem utilizados e propõe questões para orientá-los em direção a uma conclusão. Os estudantes devem descobrir relações entre variáveis, cuja importância foi apresentada pelo professor, ou produzir generalizações a partir dos dados coletados. (SÁ et. Al, 2013, p. 12 *apud* MOTA, 2014, p. 19)

A atividade semiestruturada permite tanto ao aluno quanto ao professor propor novas hipóteses de investigação do fenômeno. Contudo, esse tipo de atividade exige que o professor tenha um maior domínio do tema abordado e de outras possíveis simulações que possam ser usadas a partir de objetos educacionais já existentes ou então que possam ser construídos.

As simulações computacionais que este trabalho apresenta, também permite realizar abordagem direcionadas apenas a interpretação fenomenológica e/ou análise dos parâmetros do modelo matemático. Para isso é necessário a confecção de um roteiro com perguntas semidirecionadas, que possibilitem ao aluno fazerem novos questionamentos, redirecionando a uma nova problematização.

As atividades abertas promovem o pensamento crítico, relacionando as observações e respectivas explicações com diversas estratégias cognitivas

De acordo com Baptista (2010, p. 86), o ensino por investigação possibilita aos alunos:

Compreensão da Ciência atendendo às suas diversas dimensões; o pensamento crítico, relacionando evidências e explicações, com utilização de estratégias cognitivas diversas; aprendizagem colaborativa; Aprendizagem ativa que envolve os alunos em processos investigativos; Utilização de fontes múltiplas de recolha de dados.

Baptista (2010, p. 86) ainda destaca que a metodologia ainda possibilita “avaliação de competências de conhecimento, raciocínio, comunicação e atitudes” e tem o professor como investigador.

As atividades de simulação e investigação podem revestir-se de várias formas. De acordo com Wellington (2000 *apud* BAPTISTA, 2010, p. 93),

existem diferentes tipos de atividades de investigação, variando com o grau de abertura e de orientação. Algumas têm uma resposta correta, outras não. Algumas envolvem situações abstratas, outras envolvem situações reais. Uma são atividades de resolução de problemas, mas claramente nem todas as investigações são resoluções de problemas.

As diferentes dimensões das atividades de investigação estão representadas na figura 43.

Figura 43: Dimensões das atividades de investigação.



Fonte: O autor.

Os eixos representados na figura 43 não são independentes. De acordo com Baptista (2010, p. 86),

O primeiro, de professor ativo para aluno ativo, indica uma situação contínua com dois extremos. Num dos extremos, os alunos colocam as questões que orientam as suas investigações, no outro extremo, é o professor que coloca essas questões. O segundo, abertas para fechadas, representa também uma situação contínua onde existem dois extremos. Num deles, as atividades de investigação têm apenas um caminho a seguir, possibilitando a existência de uma só solução. No outro, existem várias respostas para as questões levantadas e vários caminhos a seguir. Por último, no terceiro eixo, num dos extremos, têm-se atividades diretas e estruturadas, enquanto o outro diz respeito a atividades indiretas e não estruturadas.

Gil Perez e Castro (1996 *apud* ZÔMPERO; LABURÚ, 2011, p.75) ressaltam que as atividades de investigação devem compreender as seguintes características:

apresentar aos alunos situações problemáticas abertas, em um nível de dificuldade adequado à zona de desenvolvimento potencial dos educandos; favorecer a reflexão dos alunos sobre a relevância das situações-problema apresentadas; emitir hipótese como atividade indispensável à investigação científica; elaborar um planejamento da atividade experimental; contemplar

as implicações CTS do estudo realizado; proporcionar momentos para a comunicação do debate das atividades desenvolvidas; potencializar a dimensão coletiva do trabalho científico.

Para Parente (2012 *apud* VIEIRA, 2012, O),

Nesta perspectiva, o professor coloca uma pergunta aberta aos estudantes e, juntos, discutem sobre a questão. O planejamento, realizado pelo professor, utiliza as práticas de laboratório, a resolução de problemas e a aprendizagem de conceitos. A realização da atividade é conduzida pelo professor, com o levantamento de hipóteses e a elaboração do experimento junto aos estudantes, valorizando a dimensão coletiva do trabalho em sala

Ainda há a possibilidade de desenvolver um trabalho interdisciplinar conjuntamente com a disciplina de Matemática, o que seria, talvez mais interessante do ponto de vista pedagógico, pois além do aluno desenvolver as qualidades citadas nos encaminhamentos anteriores, evidencia a relação entre as duas áreas do conhecimento.

Aqui a ideia é de que enquanto na disciplina de Física seja trabalhado o conceito de campo elétrico, a disciplina de Matemática discuta o modelo matemático de vetor e as relações de proporcionalidade das grandezas físicas envolvidas no estudo do campo elétrico – módulo da carga elétrica e distância desta a um ponto do espaço próximo a ela em relação ao módulo do campo elétrico em um determinado ponto. Ou seja, enquanto o professor de Física trabalha o conceito de campo elétrico de modo qualitativo, o professor de Matemática trata da abordagem quantitativa através da discussão dos modelos matemáticos utilizados no estudo de campo elétrico. Também pode-se realizar a discussão gráfica do fenômeno e respectivo modelo matemático.

Nessa perspectiva há de se considerar a necessidade de um planejamento conjunto das disciplinas para uma eficaz correlação e maior dinamismo dos processos de ensino e aprendizagem. O planejamento deve visar o encaixe dos conteúdos selecionados com o planejamento dos currículos escolares das disciplinas e instituição de ensino, bem como o desenvolvimento simultâneo dos conteúdos e discussões de modo a fazer com que os trabalhos de cada uma das disciplinas se complementem.

Importante destacar que a interdisciplinaridade pode ser aplicada de forma concomitante com a construção de planilhas interativas, com o uso de planilhas previamente elaboradas ou em situações em que o professor opte por trabalhar apenas com demonstrações gráficas através do uso de um projetor de imagens.

4.2 PONTOS IMPORTANTES A CONSIDERAR

Sabe-se que não há uma metodologia e/ou ferramenta certa, ou melhor que outras, pois cada ambiente escolar tem suas particularidades que devem ser, sempre, levadas em conta em qualquer planejamento do processo de ensino e aprendizagem. Deve-se considerar o acesso dos alunos às ferramentas tecnológicas, quais estão disponíveis e como realizar/explorar suas funcionalidades de modo prático e dinâmico para que tanto o professor quanto o aluno consigam extrair o máximo proveito. Novas ferramentas de ensino e aprendizagem requerem novas metodologias, novas estratégias e nenhuma é melhor que outra, todas podem ser boas quando cuidadosamente pensadas para cada contexto escolar.

Outro ponto importante a ser considerado é como e o quanto cada professor estar preparado para novas práticas, se possui desenvoltura e disposição para implementação de novas estratégias. Do contrário os ferramentais servirão apenas para mudança na comunicação, não de postura e métodos.

Também deve ser considerado o número de aulas disponível para o desenvolvimento/trabalho dos temas selecionados e os objetivos a serem alcançados em cada etapa do complexo processo de ensino e aprendizagem de acordo com o momento e objetivos e convicções da instituição de ensino.

Contudo, é importante ter claro que uma metodologia não exclui outras e que ainda é possível a mescla de diferentes metodologias e atividades. Como o processo de ensino e aprendizagem não é, pelo menos não deve ser, algo engessado, cabe sempre ao professor observar as necessidades e novos encaminhamentos de acordo com o desenvolvimento de suas aulas e necessidades apresentadas pelos alunos no desenvolvimento das mesmas.

Cabe ao professor aplicador deste produto – ou de suas ideias – analisar as possibilidades de acordo com suas necessidades e convicções pedagógicas sobre os seus referenciais teóricos de ensino e aprendizagem, considerando sempre as características pertinentes à cada turma de alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sobre o uso de estratégias computacionais, Fiolhais e Trindade (2003, p. 271), observam que, as tecnologias podem contribuir com as diferentes vias de aprendizagem. É importante saber que existem diversas tecnologias e diversas formas de aprender.

Lopes (2019), destaca a diferença entre as tecnologias assistivas e as tecnologias de informação e comunicação. Para o autor, as tecnologias assistivas,

alcançam uma necessidade que não é necessariamente individual, mas coletiva. Como exemplo disso, temos o celular. Quando o utilizamos com uma finalidade pedagógica, ele não visa suprir apenas um impedimento específico de um estudante, mas tem ali uma necessidade informacional e ou comunicacional que se dá entre pessoas e grupos, construindo um conhecimento que é coletivo [...] Algumas tecnologias vão além do uso individual e existem para a construção de um sentido que é coletivo.

As tecnologias educacionais nos proporcionam inúmeras possibilidades. Contudo, deve-se refletir sobre as diferentes possibilidades educacionais de modo a tomar o cuidado para que o uso das tecnologias educacionais não caia na monotonia do simplesmente usar por usar. Nesse sentido, o maior desafio dos professores é fazer com que o uso de tecnologias não se transforme na pura e simples instrumentalização do ensino. É função do professor repensar suas práticas e procurar novos caminhos e possibilidades para uma mediação tecnológica eficaz do ponto de vista pedagógico e dentro dos limites do contexto escolar local.

No entanto, não se deve pensar as novas tecnologias de ensino apenas como recurso didático inovador, o que tornaria as novas ferramentas uma metodologia "neotradicional" de ensino, pois utilizar com tais ferramentas a mesma metodologia tradicional de ensino significa retroceder, didaticamente, aos avanços da modernidade.

É inegável a importância do uso de tecnologias no ambiente educacional, visto que muitas das ferramentas já estão presentes no cotidiano de alunos e professores. Contudo, a utilização dos ferramentais tecnológicos deve ser pensando com um recurso didático disponível que, ao proporcionar aos professores e alunos uma nova forma de ensinar e aprender, integrando valores e competências educacionais, pode favorecer o processo de ensino e aprendizagem

Diante disso, cabe aos professores criar formas e estratégias para a utilização das tecnologias computacionais enquanto ferramenta auxiliar do complexo processo

de ensino e aprendizagem. Todavia, aos alunos, como parte integrante e principal desse processo, cabe um esforço efetivo para a aprendizagem, seja qual for a estratégia e/ou metodologia adotada.

REFERÊNCIAS

ALONSO, Marcelo; FINN, Edward, J. **Física - um curso universitário**: Campos e Ondas. São Paulo, v2: Blucher, 2015.

ALVES, D. T.; AMARAL, J. V.; MEDEIROS NETO, J. F. Aprendizagem de Eletromagnetismo via Programação e Computação Simbólica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. São Paulo, v. 24, n. 2, p. 201–213, 2002. Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v24_201.pdf. Acesso em: 25 nov. 2020.

BARUM, Amilcar. Eletricidade e Magnetismo. **Universidade Federal de Pelotas – Centro de Engenharias**. 2019. Disponível em: <https://wp.ufpel.edu.br/engenhariageologica/files/2019/03/LIVRO-DE-ELETRICIDADE-E-MAGNETISMO-LIVRO-1.pdf>. Acesso em: 30 de mai. 2021.

BAPTISTA, M. L. M. **Concepção e implementação de actividades de investigação: um estudo com professores de física e química do ensino básico**. Tese (Doutorado em Educação) - Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1854/7/Cap.%204.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2021.

BOSS, Sergio Luiz Bragatto; ASSIS, André Koch Torres; CALUZI, João José. **Stephen Gray e a descoberta dos condutores e isolantes**: tradução comentada de seus artigos sobre eletricidade e reprodução de seus principais experimentos. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012.

BOSS, Sergio Luiz Bragatto; CALUZI, João José. Uma breve biografia de Stephen Gray (1666 – 1736). **Revista Brasileira de Ensino de Física**. São Paulo, v. 32, n. 1, 1602-1–1602-9. 2010. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/zjbg539D5byJsbp7YKSCBqb/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 25 nov. 2018.

CAMILO, Juliano. **Geradores Eletrostáticos**: Esfera de Enxofre de Otto von Guericke e Chuva Elétrica de Kelvin. 2006. Trabalho acadêmico (Licenciatura em Física) – Instituto de Física, Unicamp, Campinas, 2006. Disponível em: https://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem2_2006/JulianoC-Assis_F809_RFcompleto.pdf. Acesso em: 28 out. 2020.

COLE, Michael; SCRIBNER, Sylvia. **A formação social da mente**. 7 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

FIOLHAIS, Carlos; TRINDADE, Jorge. Física no Computador: O Computador Como uma Ferramenta no Ensino e na Aprendizagem das Ciências Física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. São Paulo, v. 25, n. 3, p. 259–272. 2003. Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v25_259.pdf. Acesso em: 25 nov. 2018.

Laboratório Avançado de Física: Experimento de Millikan. **IFSC-USP**. São Carlos, jun. 2013. Disponível em: https://www.ifsc.usp.br/~lavfis/images/BDApostilas/ApMillikan/Millikan_1.pdf. Acesso em: 10 mar. 2018.

LOPES, Paulo. O uso de tecnologia para a educação de todas e todos. Projeto Diversa. 2019. Disponível em: <https://diversa.org.br/artigos/uso-de-tecnologias-para-educacao/>. Acesso em: 22 jan. 2021.

MOTA, Lidiane Rodrigues. **Contribuições de atividade experimental investigativa adaptada à sala de aula sobre o tema microbiologia com estudantes do 7º ano do ensino fundamental**. Monografia (Especialização em Ensino de Ciências por Investigação) – CECIMIG, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/BUBD-A3CG2T/1/monografia_lidianemota2015.pdf. Acesso em 28 de jun. 2021.

PIRES, Antônio Sérgio Teixeira. **Evolução das ideias da Física**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

RAÍCIK, Anabel Cardoso; PEDUZZI, Luiz Orlando de Quadro. Um resgate histórico e filosófico dos estudos de Stephen Gray. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**. Belo Horizonte, v. 16, n. 1, p. 109 – 128. 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufmg.br/index.php/rbpec/article/view/4339/2905>. Acesso em: 20 jun. 2021.

ROCHA, José Fernando Moura. O conceito de “campo” em sala de aula – uma abordagem histórico conceitual. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. Florianópolis, v. 31, n. 1 1604. 2009. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/rbef/v31n1/v31n1a13.pdf>. Acesso em: 06 jan. 2019.

SANTOS, Carlos Alberto. A participação de Fletcher no experimento da gota de óleo de Millikan. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. Florianópolis, v. 17, n. 1 .1995. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/vol17a10.pdf>. Acesso em: 21 jun. 2021.

SANTOS, Carlos Alberto. Experimento da gota de óleo de Millikan. **IF-UFRGS**. Porto Alegre, 2002. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/historia/millikan.html>. Acesso em: 21 jun. 2021.

SOARES, Sâmia Magaly Lima de Medeiros. O Sociointeracionismo: Um Desafio para o Professor da Educação Básica. In: Encontro de Iniciação à Docência da UEPB, 5., 2015, Campinha Grande. **Anais [...]** Campina Grande: Editora Realize, 2015. Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/enid/2015/TRABALHO_EV043_MD1_SA11_ID1667_01082015000051.pdf. Acesso em: 25 jan. 2021.

SUSSUCHI, Eliana Midori; MACHADO, Samísia Maria Fernandes; MORAES, Valéria Regina de Souza. Fundamentos da Teoria Atômica. **UFS-CESAD**. Aracaju, 2021. Disponível em: https://cesad.ufs.br/ORBI/public/uploadCatalogo/14404630102012Quimica_I_Aula_02.pdf. Acesso em: 18 set. 2021.

VIEIRA, Fabiana Andrade da Costa. **Ensino por Investigação e Aprendizagem Significativa Crítica**: análise fenomenológica do potencial de uma proposta de

ensino. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência) – Faculdade Estadual Paulista, Bauru, 2012. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102039/vieira_fac_dr_bauru.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 12 de jul. de 2021.

ZÔMPERO, Andreia Freitas; LABURÚ, Carlos Eduardo. Atividades investigativas no ensino de Ciências: Aspectos históricos e diferentes abordagens. **Revista Ensaio**. Belo Horizonte, v.13, n. 03, p. 67-80. 2011. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/epec/a/LQnxWqSrmzNsrRzHh3KJYbQ/?lang=pt&format=pdf>. Acesso em: 06 jan. 2020.

APÊNDICE A – SENTIDO DO VETOR CAMPO ELÉTRICO

SENTIDO DO VETOR DE CAMPO ELÉTRICO

Por questão de objetividade, vamos fixar a carga elétrica na origem do plano cartesiano, já o ponto P, em que deseja-se observar o comportamento do vetor campo elétrico pode ser escolhido aleatoriamente. Entretanto, para uma melhor visualização gráfica, o ponto P não poderá ficar muito próximo e nem muito longe da carga. No nosso exemplo, vamos fixar suas coordenadas em (2; 2).

Também não serão usadas as potências de base 10 para nenhum dos valores envolvidos. A construção da planilha interativa iniciar-se-á com a construção da tabela mostrada na figura 44:

Figura 44: Tabela de dados – sentido do vetor campo elétrico no ponto P.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	k	Carga			Campo Elétrico					
2	(Nm ² /C ²)	TIPO	Valor (C)	Posição		Ponto P		r (m)	θ	Módulo (N/C)
3	9			xo	yo	x	y		rad	
4				0	0	2	2			
5										
6				Vetor Campo Elétrico						
7				Origem		Extremidade				
8				xo	yo	xf	yf			
9										

Fonte: O autor.

A inserções de funções do *Microsoft Excel*[®] seguem os procedimentos abaixo:

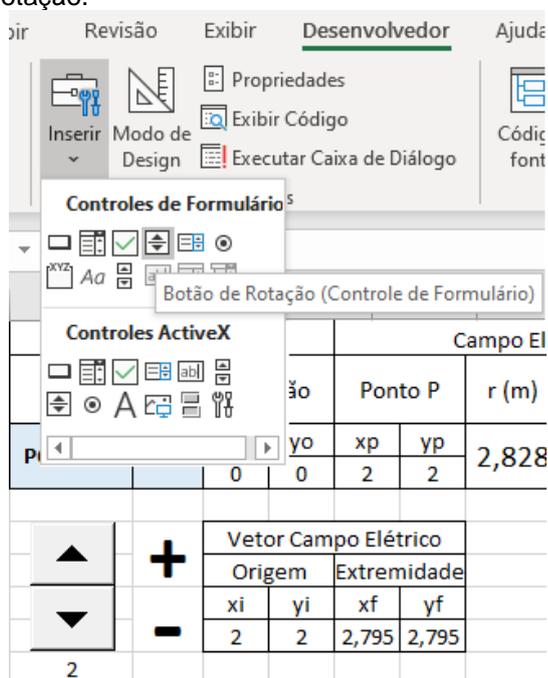
- Tipo da carga, células B3 e B4.
- Valor da carga, células C3 e C4: =B10-1
- Distância r, células H3 e H4: =RAIZ((F4-D4)^2+(G4-E4)^2)
- Orientação θ, em radianos, do campo elétrico, célula I4: =ATAN((G4-E4)/(F4-D4))
- Módulo do campo elétrico, células J3 e J4: =A3*C3/H3^2
- Coordenadas da origem do vetor campo elétrico:
 - ☞ Valor da abscissa (xo), célula D9: =F4
 - ☞ Valor da ordenada (yo), célula E9: =G4
- Coordenadas da extremidade final do campo elétrico:
 - ☞ Valor da abscissa (xf), célula F9: =D9+J3*COS(I4)
 - ☞ Valor da ordenada (yf), célula G9: =E9+J3*SEN(I4)

Vamos adotar uma carga de módulo 1C, variando apenas o seu sinal (positivo/negativo) e, para o seu controle, vamos inserir um botão de rotação.

Na guia **Desenvolvedor**, grupo **Controles**, clicar sobre o botão **Inserir** e escolher a opção **Botão de Rotação (Controle de Formulário)** e o desenhamos na coluna B da planilha, logo abaixo do campo tipo de carga (figura 48).

Para identificar o sinal positivo, mesclar as células C6 e C7 e digitar o símbolo “+”, já para o sinal negativo, mesclar as células C8 e C9 e digitar o símbolo “-”. Verifique o exemplo na figura 45.

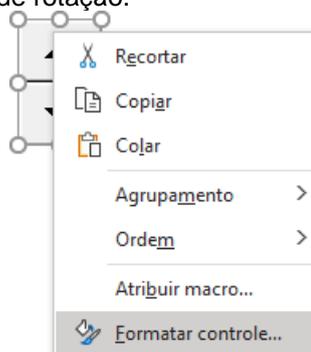
Figura 45: Inserir botão de rotação.



Fonte: O autor.

Conforme indica a figura 46, para configurar o uso do botão de rotação, clicar com o botão direito do mouse sobre o controle e escolher a opção **Formatar controle**.

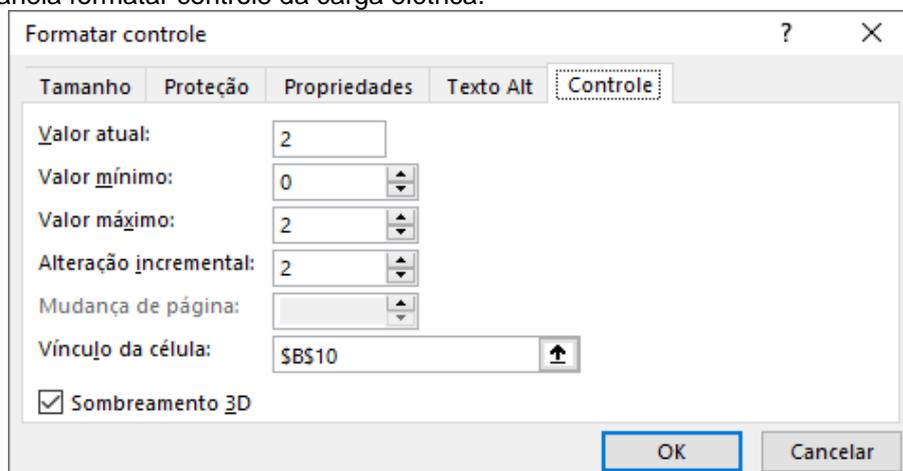
Figura 46: Formatar controle - botão de rotação.



Fonte: O autor.

Na janela **Formatar controle**, preencher os campos conforme mostra a figura 47, abaixo.

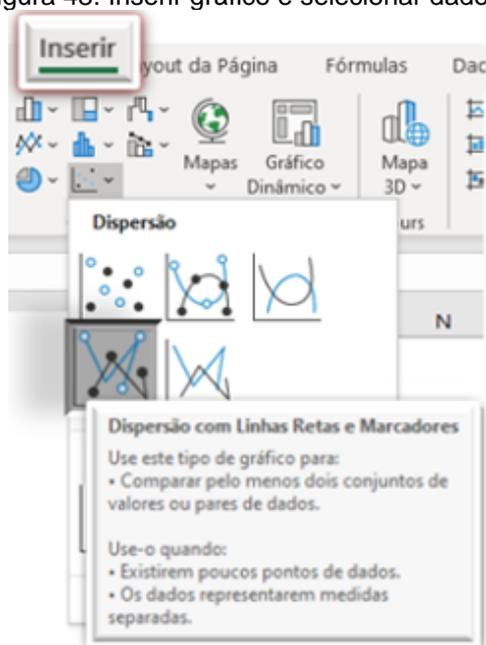
Figura 47: Janela formatar controle da carga elétrica.



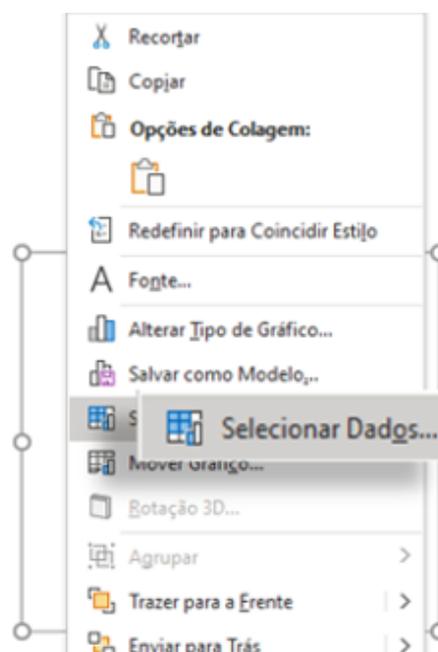
Fonte: O autor

Na guia **Inserir**, grupo **Gráficos**, botão **Inserir Gráfico de Dispersão (X, Y) ou de Bolha**, escolher a opção **Dispersão com Linhas Retas e Marcadores**, conforme a figura 48 (a). Após inserida a área de plotagem do gráfico, clicar com o botão direito do mouse sobre ela, escolher a opção **Selecionar Dados**, figura 49 (b).

Figura 48: Inserir gráfico e selecionar dados.



a) Inserir gráfico de Dispersão com Linhas Retas e Marcadores

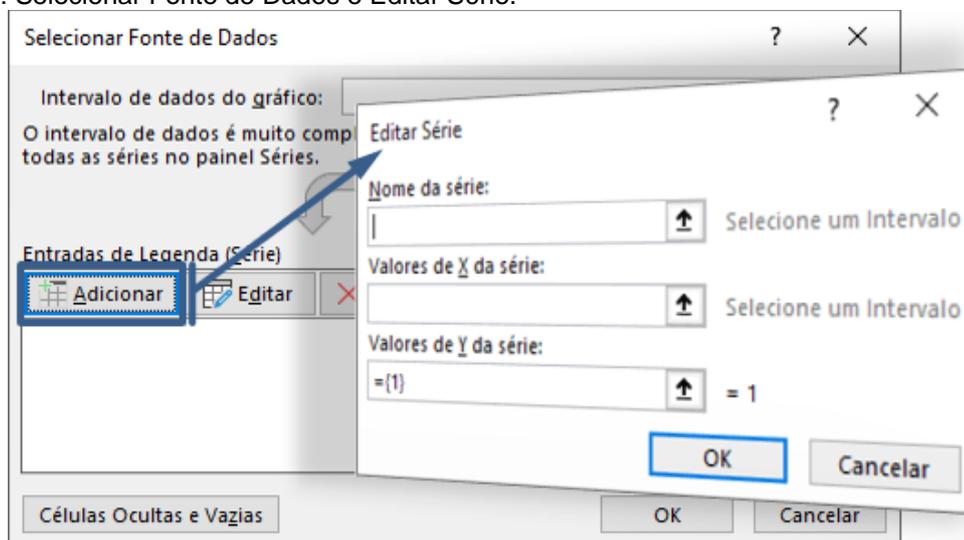


b) Clicar com o botão direito do mouse sobre a área de plotagem do gráfico e selecionar a opção **Selecionar Dados**.

Fonte: O autor.

Na janela **Selecionar Fonte de Dados**, clicar sobre o botão **Adicionar**, conforme mostra a figura 49.

Figura 49: Selecionar Fonte de Dados e Editar Série.



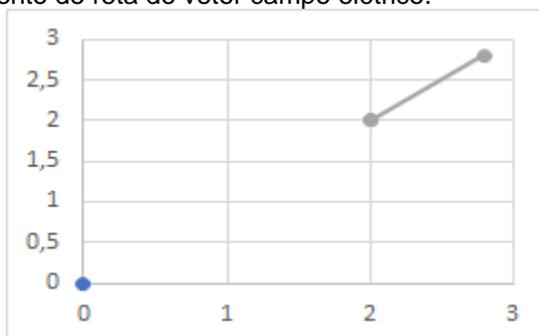
Fonte: O autor.

Na janela Editar Série da figura 49 digitar a informações para a representação da carga elétrica, do ponto P e do vetor campo elétrico, conforme indicado abaixo.

- Carga elétrica:
 - ☞ Nome da série: Carga elétrica
 - ☞ Valores de X da série: Clicar sobre o valor de x_0 , célula: D4
 - ☞ Valores de Y da série: Clicar sobre o valor de y_0 , célula: E4
 - ☞ Clicar no botão OK.
- Ponto P:
 - ☞ Nome da série: Ponto P
 - ☞ Valores de X da série: Clicar sobre o valor de x_p , célula: F4
 - ☞ Valores de Y da série: Clicar sobre o valor de y_p , célula: G4
 - ☞ Clicar no botão OK.
- Vetor campo elétrico:
 - ☞ Nome da série: Vetor Campo Elétrico
 - ☞ Valores de X da série: com a tecla Ctrl pressionada, clicar sobre os valores de x_i e x_f , nessa ordem: células D9 e F9
 - ☞ Valores de Y da série: com a tecla Ctrl pressionada, clicar sobre os valores de y_i e y_f , nessa ordem: células E9 e G9
 - ☞ Clicar no botão OK.

Após a inserção de todos os parâmetros acima, teremos a representação gráfica do segmento de reta do vetor de Campo Elétrico no Ponto P. Veja o gráfico na figura 50, abaixo:

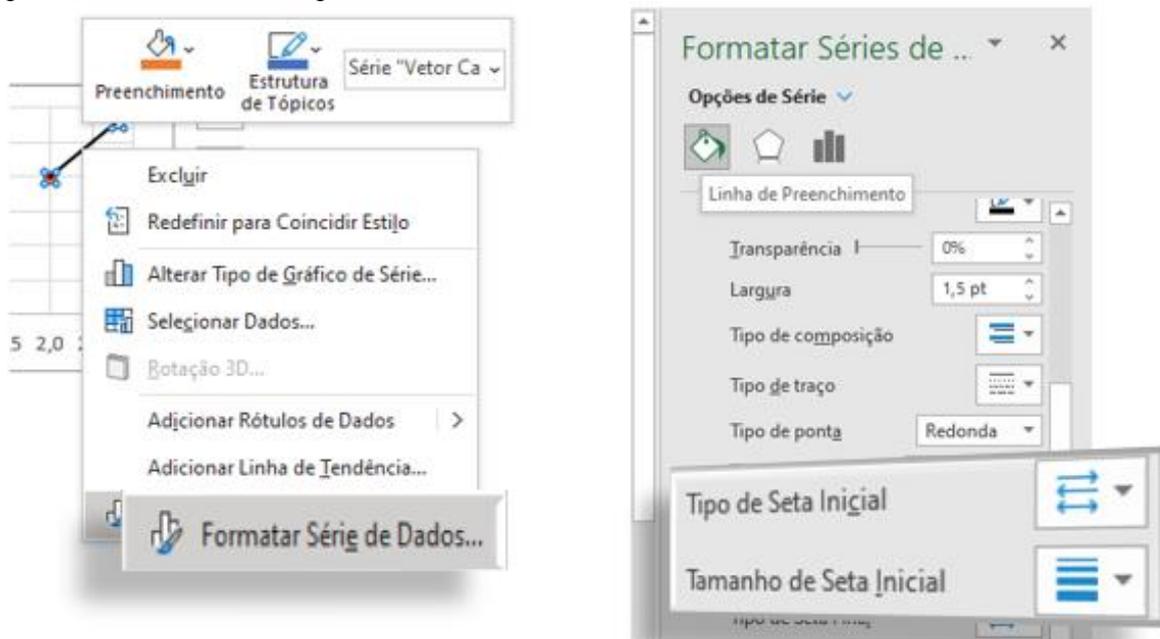
Figura 50: Gráfico do segmento de reta do vetor campo elétrico.



Fonte: O autor.

Para transformar o segmento de reta em um vetor, basta clicar com o botão direito do mouse sobre ele e escolher a opção **Formatar Série de Dados** (figura 51).

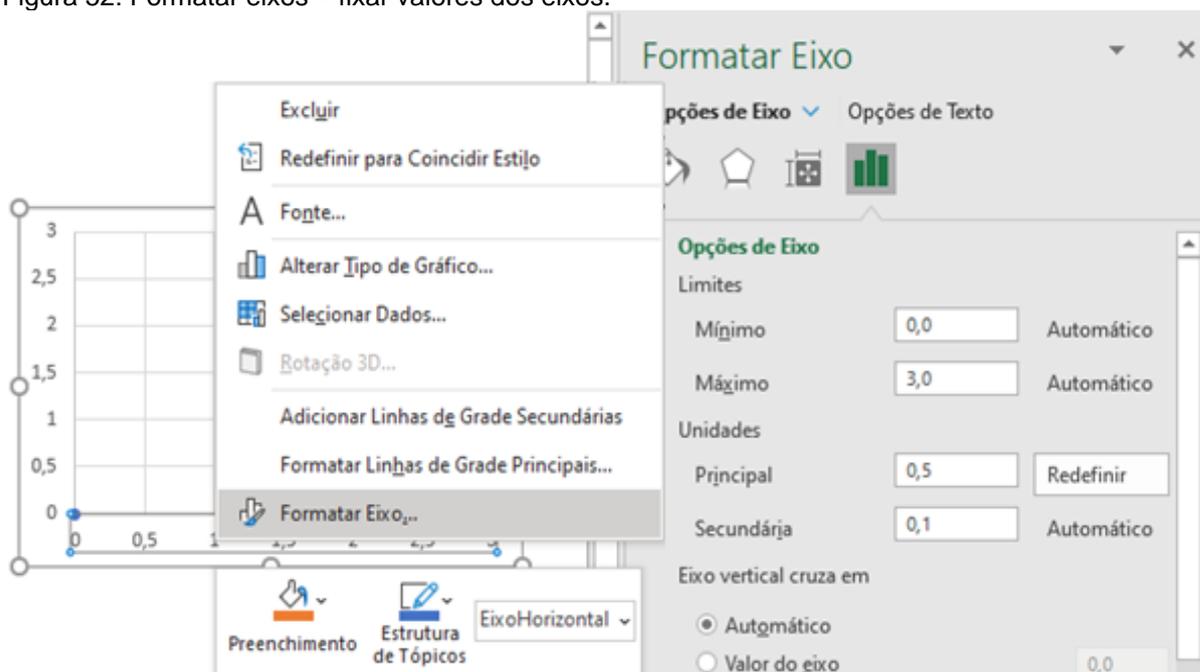
Figura 51: Transformar o segmento de reta em vetor.



Fonte: O autor.

Para deixar as escalas fixas, selecionar o eixo x (eixo horizontal), clicar com o botão direito do mouse, escolher a opção Formatar Eixo. Na janela que abrirá ao lado direito, em Opções de Eixo, escolher os valores 0,0 e 3,0 como limites mínimo e máximo, respectivamente, conforme o exemplo da figura 52 na página seguinte.

Figura 52: Formatar eixos – fixar valores dos eixos.



Fonte: O autor.

Observação 1: Mesmo que esses valores já estejam pré-selecionados nos respectivos campos, redigitar novamente para que tais limites permaneçam fixos.

Observação 2: Realizar o mesmo procedimento para o eixo y (eixo vertical), selecionando os mesmos valores mínimos e máximos utilizados para o eixo horizontal.

Na figura 53, abaixo, temos a planilha interativa em sua totalidade e pronta para a utilização.

Figura 53: Planilha interativa concluída - sentido do vetor campo elétrico.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	k	Carga			Campo Elétrico						
2	(Nm ² /C ²)	TIPO	Valor (C)	Posição		Ponto P		r (m)	θ	Valor (N/C)	
3	9	POSITIVA	1	x ₀	y ₀	x	y	2,828	rad	1,125	
4				0	0	2	2		0,785		
5											
6		▲	+	Vetor Campo Elétrico							
7				Origem		Extremidade					
8				x ₀	y ₀	x _f	y _f				
9		▼	-	2	2	2,795	2,795				
10		2									
11											
12											
13											
14											
15											

Fonte: O autor.

APÊNDICE B – MÓDULO DO VETOR CAMPO ELÉTRICO

MÓDULO DO VETOR DE CAMPO ELÉTRICO

O objetivo dessa simulação é analisar o módulo do campo elétrico em relação a variação da carga elétrica geradora e da distância do ponto desejado até a carga. A comparação poderá ser separada ($E \propto Q$ e $E \propto 1/r^2$) ou simultânea ($E \propto Q/r^2$).

Como na construção anterior, também serão omitidas as potências de base 10. O principal objetivo dessa simulação é analisar a relação do módulo do campo elétrico com os módulos da carga e da distância ao ponto em que se deseja conhecer seu valor.

A carga elétrica geradora do campo elétrico ficará fixa na origem do plano cartesiano e seu módulo terá valor variável (1C, 2C, 3C e 4C). Já a posição do ponto onde desejamos saber o módulo do campo elétrico terá distância variável (1m, 2m, 3m 4m e 5m). A figura 54 mostra a construção da tabela com as respectivas fórmulas.

Figura 54: Construção da tabela para o módulo do vetor campo elétrico.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	MÓDULO DO VETOR CAMPO ELÉTRICO								
2	k	Carga			Campo Elétrico				
3	(Nm ² /C ²)	Módulo (C)	Posição		r (m)	Orientação (Θ)	Módulo (N/C)	Componentes (N/C)	
4	9		xo	yo		radianos		Ex	Ey
5			0	0		0,000			
6					=A4*B4/E4^2		=G4*COS(F5)		=G4*SEN(F5)
7									
8	RELAÇÕES								
9	Dados do vetor				Grandezas	Valores		Razão	
10	Origem	Extremidade final			Físicas	Inicial	Final		
11	xo	yo	xf	yf	Q (C)	1			
12		0,00			r (m)	1			
13					E (N/C)				
14	=E4	=A12+H5	=B12+I5		=A4*G11/G12^2		=G4		=H13/G13

=E4
=A12+H5
=B12+I5
=A4*G11/G12^2
=G4
=H13/G13

=B4
=E4

=H11/G11
=H12/G12

Valores		Razão
il	Final	
	1	1
	1	1

=B4
=E4

=H11/G11
=H12/G12

=E4

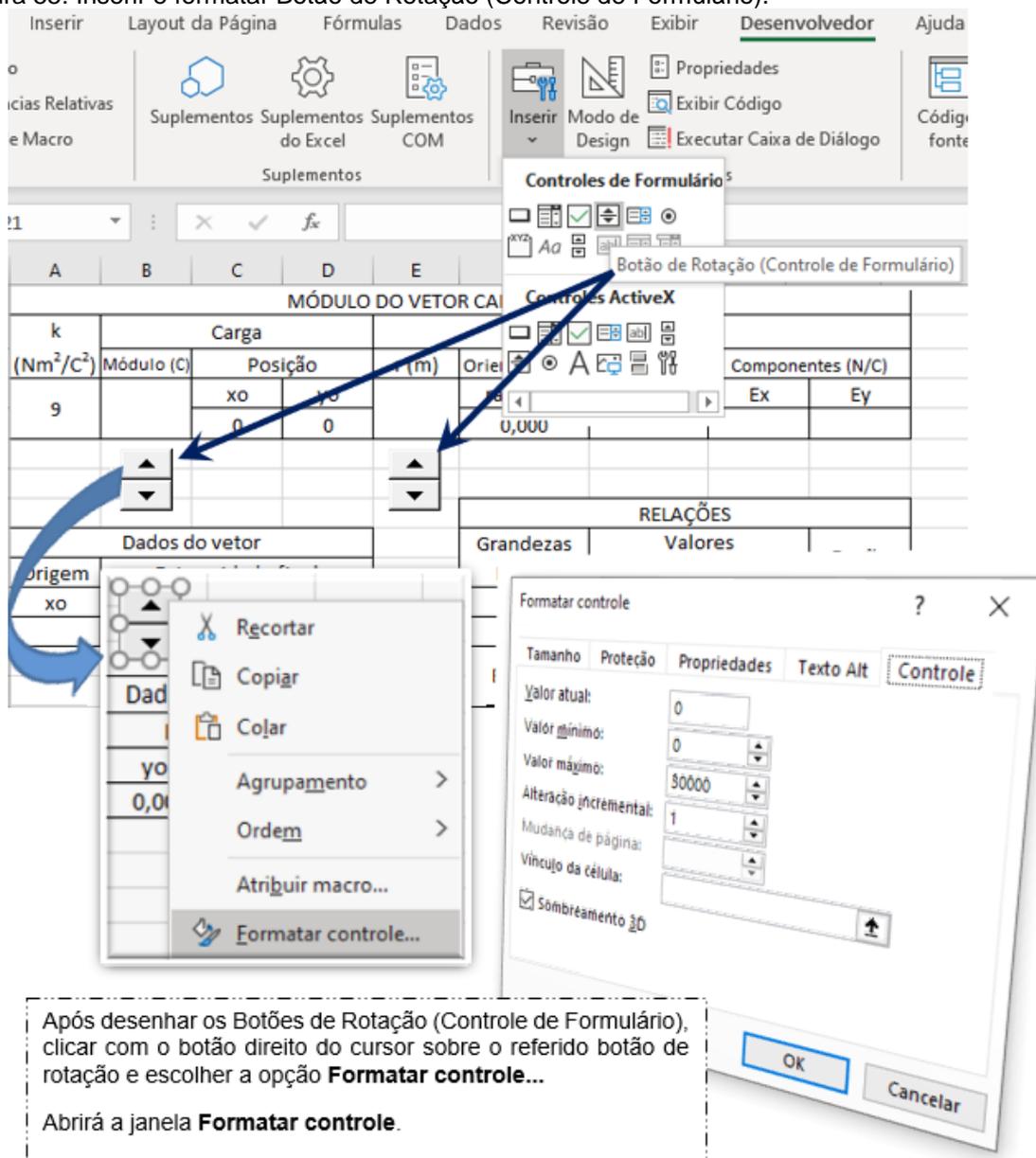
Digitar as fórmulas indicadas pelas setas nas respectivas células. Nas demais, digitar os valores apresentados na planilha de dados.

Fonte: O autor.

Para o controle do módulo da carga elétrica e da distância do ponto em que se deseja saber o módulo do campo elétrico, deve-se inserir botões de rotação. Para

isso, acessar a Guia **Desenvolvedor** e no grupo **Controles**, clicar em **Inserir** e escolher a opção **Botão de Rotação (Controle de Formulário)**, conforme mostra a figura 55.

Figura 55: Inserir e formatar Botão de Rotação (Controle de Formulário).



Fonte: O autor.

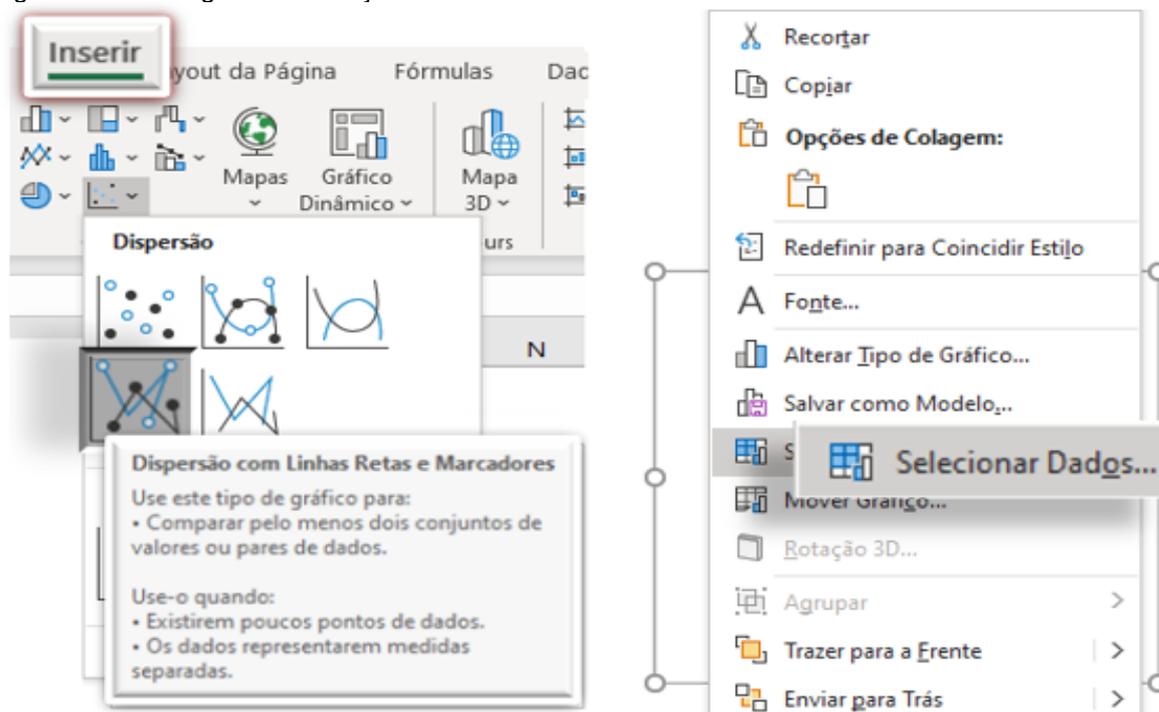
Na janela formatar controle, preencher os campos do seguinte modo:

- Módulo (C) da carga:
 - ☞ Valor atual: 1
 - ☞ Valor mínimo: 1
 - ☞ Valor máximo: 4
 - ☞ Alteração incremental: 1

- ☞ Vínculo da célula: \$B\$4
- Distância r(m):
 - ☞ Valor atual: 1
 - ☞ Valor mínimo: 1
 - ☞ Valor máximo: 5
 - ☞ Alteração incremental: 1
 - ☞ Vínculo da célula: \$E\$4

Para a confecção gráfica do módulo do campo elétrico, conforme já feito anteriormente, seguir os passos indicados: Guia **Inserir**, grupo **Gráficos**, botão **Inserir Gráfico de Dispersão (X, Y) ou de Bolha**, escolher a opção **Dispersão com Linhas Retas e Marcadores**. Após aparecer a área de plotagem do gráfico, clicar com o botão direito do cursor sobre ela, escolher a opção **Selecionar Dados** conforme mostra a figura 56.

Figura 56: Inserir gráfico e seleção de dados.



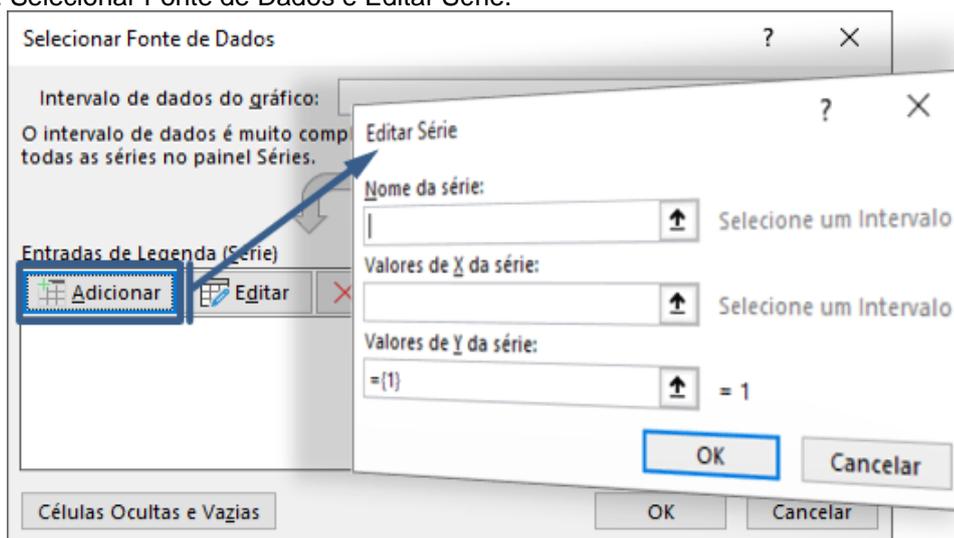
a) Inserir gráfico de Dispersão com Linhas Retas e Marcadores.

b) Clicar com o botão direito do mouse sobre a área de plotagem o gráfico e escolher a opção Selecionar Dados...

Fonte: O autor.

Na janela **Selecionar Fonte de Dados**, clicar sobre o botão **Adicionar**, conforme indicado na figura 57.

Figura 57: Selecionar Fonte de Dados e Editar Série.



Fonte: O autor.

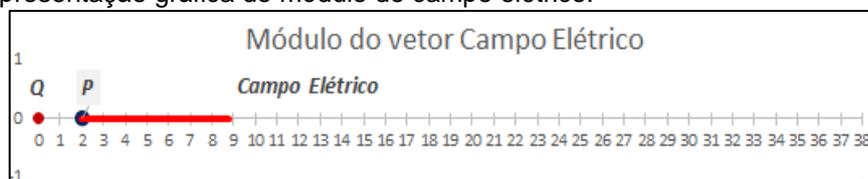
Esse procedimento deverá ser seguido para a edição de série da Carga Elétrica Geradora do campo elétrico, para o ponto *P* e para o Módulo do Campo Elétrico.

Na janela Editar Série, preencher os campos indicados conforme mostrado abaixo:

- Carga Elétrica Geradora
 - ☞ Nome da Série: Q
 - ☞ Valores de X da série: clicar sobre o valor de x_0 , célula C5
 - ☞ Valores de Y da série: Apagar a inscrição $=\{1\}$ e clicar sobre o valor de y_0 , célula D5
- Ponto P
 - ☞ Nome da Série: P
 - ☞ Valores de X da série: clicar sobre o valor de x_0 , célula A12
 - ☞ Valores de Y da série: Apagar a inscrição $=\{1\}$ e clicar sobre o valor de y_0 , célula B12
- Campo Elétrico
 - ☞ Nome da Série: Campo Elétrico
 - ☞ Valores de X da série: com a tecla CTRL pressionada, clicar sobre os valores de x_0 e x_f , células A12 e C12, nessa ordem.
 - ☞ Valores de Y da série: Apagar a inscrição $=\{1\}$ e, com a tecla CTRL pressionada, clicar sobre os valores de y_0 e y_f , células B12 e D12, nessa ordem.

Concluída essa etapa, tem-se a representação gráfica (figura 58) do segmento de reta do vetor de campo elétrico.

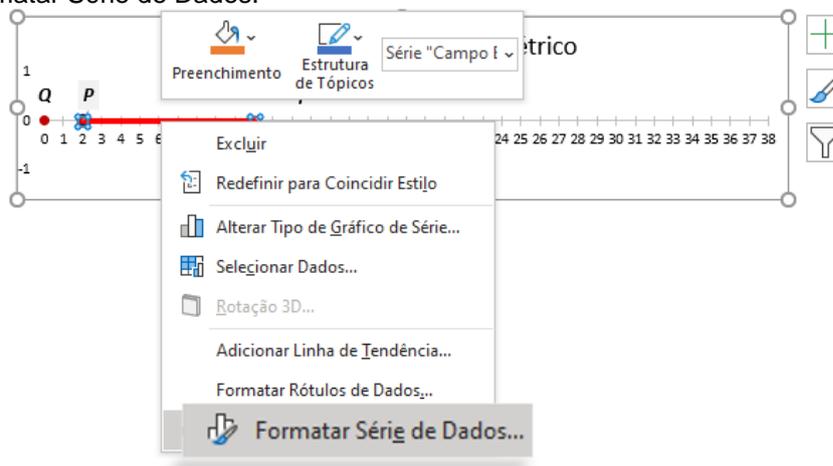
Figura 58: Representação gráfica do módulo do campo elétrico.



Fonte: O autor.

Para transformar o segmento de reta em um vetor, clicar com o botão direito do mouse sobre ele e escolher a opção **Formatar Série de Dados**, figura 59.

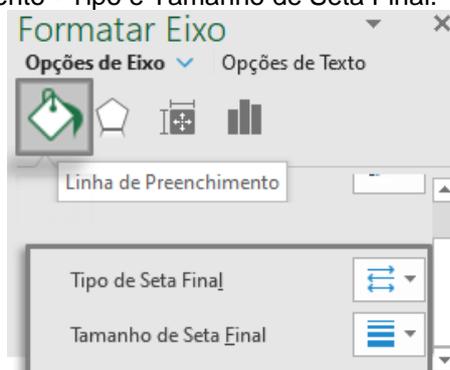
Figura 59: Formatar Série de Dados.



Fonte: O autor.

Na guia **Linha de Preenchimento**, escolher as configurações de Seta Final, conforme mostra a figura 60.

Figura 60: Linha de Preenchimento - Tipo e Tamanho de Seta Final.

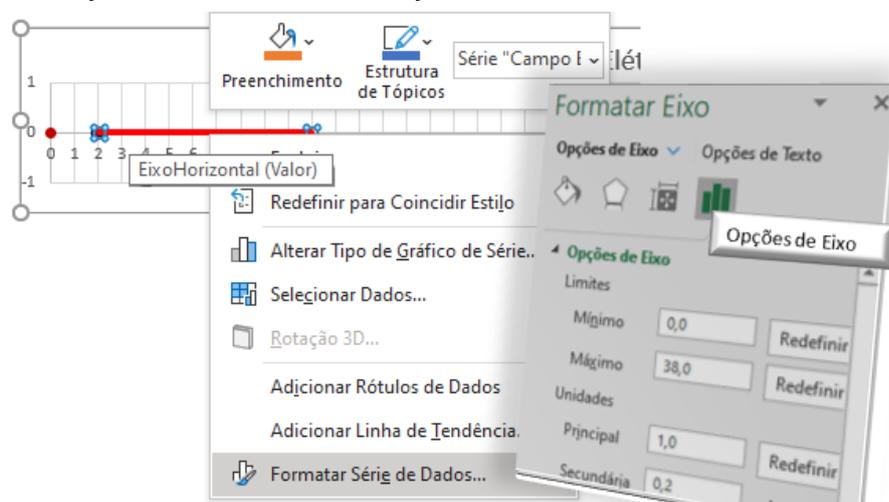


Fonte: O autor.

Por fim, fixar as escalas horizontal clicando sobre ela com o botão direito do cursor e escolher a opção Formatar Eixo. Na janela que abrirá ao lado direito, na guia

Opções de Eixo, escolher os valores 0 e 38 para os limites mínimo e máximo, respectivamente. Veja o exemplo na figura 61, abaixo.

Figura 61: Formatação do eixo horizontal - fixação das escalas.



Fonte: O autor.

As figuras 62 e 63, abaixo, mostram a representação gráfica do módulo do vetor de campo elétrico as tabelas de dados do referido vetor e as relações dos valores iniciais com os valores escolhidos (distância do ponto P em relação à carga elétrica geradora do campo e módulo da carga elétrica).

Figura 62: Representação gráfica do vetor campo elétrico e respectivo módulo.



Fonte: O autor.

Figura 63: Planilha interativa – simulação do módulo do vetor campo elétrico.

MÓDULO DO VETOR CAMPO ELÉTRICO								
1	Carga		Campo Elétrico					
2	k	Módulo (C)	Posição		r (m)	Orientação (θ)	Módulo (N/C)	Componentes (N/C)
3	(Nm ² /C ²)		xo	yo		radianos		Ex
4	9	3	0	0	2,0	0,000	6,750	Ey
5								0,000
6								
7								
8								
9	Dados do vetor				RELAÇÕES			
10	Origem		Extremidade final		Grandezas Físicas	Valores		Razão
11	xo	yo	xf	yf	Q (C)	Inicial	Final	
12	2,00	0,00	8,75	0,00	r (m)	1	2	3
13					E (N/C)	9	6,750	3/4
14								
15								
16								
17	Módulo do vetor Campo Elétrico							
18								
19								
20								
21								

Fonte: O autor.

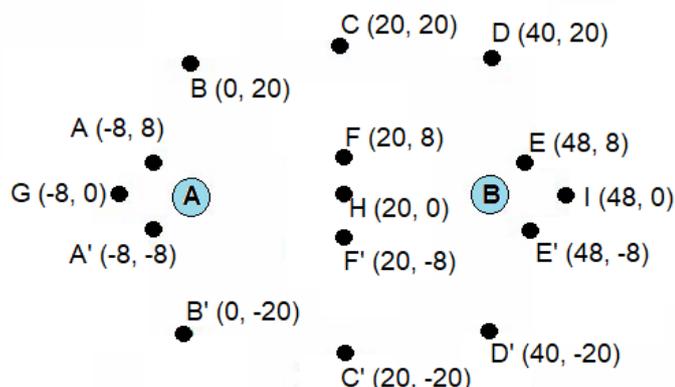
**APÊNDICE C – CAMPO ELÉTRICO DE DUAS CARGAS
ELÉTRICAS PUNTIFORMES**

VETOR DE CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE DE DUAS CARGAS ELÉTRICAS PUNTIFORMES

A fim de comparar melhor os vetores de cada uma das cargas e, por consequência suas contribuições para o vetor resultante, será confeccionado um gráfico para os vetores de campo elétrico de duas cargas puntiformes positivas e o respectivo vetor resultante em quinze pontos espalhadas nas proximidades das duas cargas.

Afigura 64 mostra os pontos e as referidas coordenadas cartesianas em que serão plotados e analisados os vetores de campo elétrico das cargas elétricas A e B e o respectivo vetor resultante.

Figura 64: Pontos onde serão analisados os vetores de campo elétrico.



Fonte: O autor.

Portanto, tem-se 15 pontos, onde 12 deles são simétricos em relação à linha horizontal entre as cargas (eixo x). Nesses pontos de simetria teremos vetores de mesmo módulo, porém o valor da ordenada (y) oposto. Os pontos G e I, apesar de possuírem simetria verticais, não consideraremos simétricos e, portanto, não consideramos nenhum ponto G' e I'. O ponto H está localizado no centro e não possui simetria com nenhum outro ponto. Essa observação é importante a praticidade da construção.

Outro ponto a se destacar, é que alguns dos valores serão usados repetidas vezes e, novamente, por praticidade ao construirmos a primeira tabela, referente ao ponto A, fixaremos o vínculo com os valores das células que contém os valores da constante eletrostática, das cargas e de suas respectivas posições.

Para essa confecção, os valores das cargas elétricas deverão ser positivos. Porém esses podem ser escolhidos aleatoriamente, ou usar os mesmos já expostos na planilha apresentada na figura 65.

Figura 65: Tabela inicial para os vetores de campo elétrico das cargas A e B.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	k	320			Ponto A		Campos	θ	Mod			Extremidade		Ponto A'		Extremidade	
2					xa	ya	elétricos	rad	E	Ex	Ey	xf	yf	xa'	ya'	xf	yf
3	Carga1				-8	8	E1										
4	Q1	Posição			d1		E2							d1			
5		x	y		d2		ER							d2			
6	16	0	0														
7					Ponto B		Campos	θ	Mod			Extremidade		Ponto B'		Extremidade	
8					xb	yb	elétricos	rad	E	Ex	Ey	xf	yf	xb'	yb'	xf	yf
9					0	20	E1										
10					d1		E2							d1			
11	Carga 2				d2		ER							d2			
12	Q2	Posição															
13		x	y		Ponto C		Campos	θ	Mod			Extremidade		Ponto C'		Extremidade	
14	16	40	0		xc	yc	elétricos	rad	E	Ex	Ey	xf	yf	xc'	yc'	xf	yf
15					20	20	E1										
16					d1		E2							d1			
17					d2		ER							d2			

Fonte: O autor.

Após a construção das 12 tabelas, vamos inserir as funções do *Microsoft Excel*® para a tabela do ponto A e posteriormente copiá-las para as demais tabelas, com alguns vínculos já fixados.

Nas células em branco deverão ser digitadas as seguintes fórmulas:

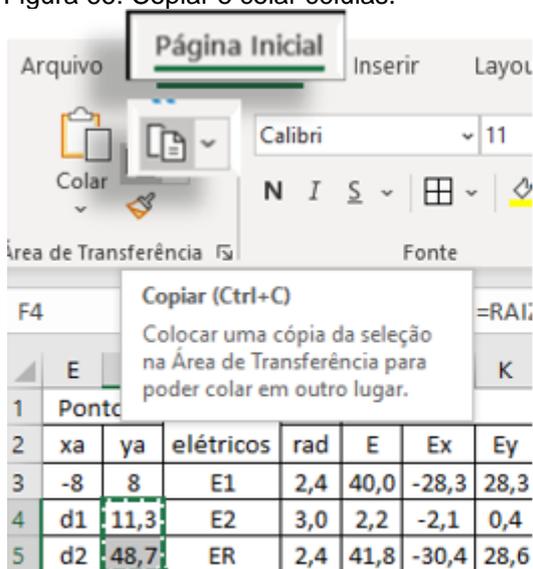
☞ Vetor de campo elétrico do ponto A:

- Célula E3: digitar o valor da abscissa do ponto A, de acordo com a figura 64.
- Célula F3: digitar o valor da ordenada do ponto A, conforme a figura 64.
- Célula F4: =RAIZ((E3-\$B\$6)^2+(F3-\$C\$6)^2)
- Célula F5: =RAIZ((E3-\$B\$14)^2+(F3-\$C\$14)^2)
- Célula H3: =ACOS((E3-\$B\$6)/F4)
- Célula H4: =ACOS((E3-\$B\$14)/F5)
- Célula H5: =ACOS(J5/I5)
- Célula I3: =\$B\$1*\$A\$6/F4^2
- Célula I4: =\$B\$1*\$A\$14/F5^2
- Célula I5: =RAIZ(J5^2+K5^2)
- Célula J3: =I3*COS(H3)
- Célula J4: =I4*COS(H4)
- Célula J5: =J3+J4
- Célula K3: =I3*SEN(H3)
- Célula K4: =I4*SEN(H4)
- Célula K5: =K3+K4
- Célula L3: =E3+J3
- Célula L4: =E3+J4
- Célula L5: =E3+J5

- Célula M3: =F3+K3
 - Célula M4: =F3+K4
 - Célula M5: =F3+K5
- ☞ Vetor de campo elétrico do ponto B:
- Célula N3: digitar o valor da abscissa do ponto A', conforme com a figura 64.
 - Célula O3: digitar o valor da ordenada do ponto A', conforme a figura 64.
 - Célula O4: =RAIZ((N3-\$B\$6)^2+(O3-\$C\$6)^2)
 - Célula O5: =RAIZ((N3-\$B\$14)^2+(O3-\$C\$14)^2)
 - Célula P3: =L3
 - Célula P4: =L4
 - Célula P5: =L5
 - Célula Q3: =-M3
 - Célula Q4: =-M4
 - Célula Q5: =-M5

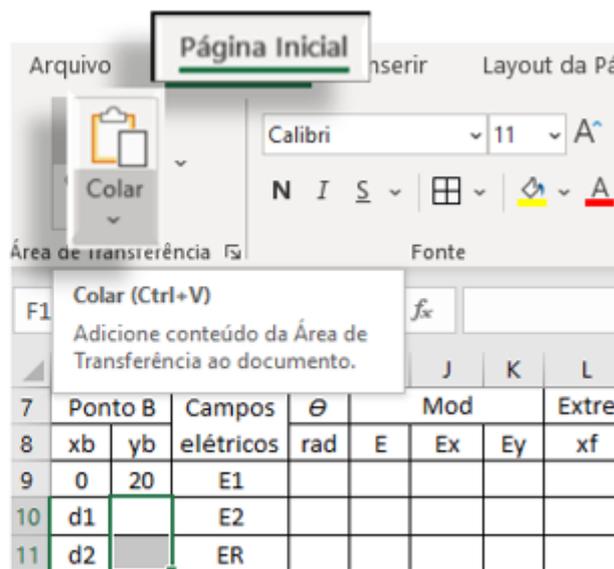
Após concluídas todas as inserções de fórmulas para os pontos A e A', selecionar simultaneamente as células F4 e F5 e, na guia **Página Inicial**, clicar sobre o botão **Copiar**, conforme figura 66 (a). Depois, selecionar, também simultaneamente, as células F10 e F11 e, na guia **Página Inicial**, clicar sobre o botão **Colar**, conforme figura 66 (b).

Figura 66: Copiar e colar células.



(a) Selecionar e copiar as células F4 e F5.

Fonte: O autor.



(b) Colar as células F4 e F5 para as células F10 e F11.

Repetir o procedimento para copiar as demais fórmulas do ponto A e do ponto A', conforme indica a figura 67.

Figura 67: Copiar e colar fórmulas dos pontos A e A' para os pontos B e B'.

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Ponto A		Campos	θ	Mod			Extremidade		Ponto A'		Extremidade	
2	xa	ya	elétricos	rad	E	Ex	Ey	xf	yf	xa'	ya'	xf	yf
3	-8	8	E1	2,4	40,0	-28,3	28,3	-36,3	36,3	-8	-8	-36,3	-36,3
4	d1	11,3	E2	3,0	2,2	-2,1	0,4	-10,1	8,4	d1	11,3	-10,1	-8,4
5	d2	48,7	ER	2,4	41,8	-30,4	28,6	-38,4	36,6	d2	48,7	-38,4	-36,6
6													
7	Ponto B		Campos	θ	Mod			Extremidade		Ponto B'		Extremidade	
8	xb	yb	elétricos	rad	E	Ex	Ey	xf	yf	xb'	yb'	xf	yf
9	0	20	E1							0	20		
10	d1		E2							d1			
11	d2		ER							d2			

Fonte: O autor.

Repetir os procedimentos das figuras 66 e 67 para as demais tabelas de dados.

As coordenadas de cada um dos vetores nos respectivos pontos estão descritas na figura 68, abaixo:

Figura 68: Coordenadas dos vetores campo elétrico nos pontos A e A'.

E	F	G	H	I	J	K	L	M
Ponto A		Campos	θ	Mod			Extremidade	
xa	ya	elétricos	rad	E	Ex	Ey	xf	yf
-8	8	E1	2,4	40,0	-28,3	28,3	-36,3	36,3
d1	11,3	E2	3,0	2,2	-2,1	0,4	-10,1	8,4
d2	48,7	ER	2,4	41,8	-30,4	28,6	-38,4	36,6

O Ponto A (-8, 8): origem dos vetores \vec{E}_1 , \vec{E}_2 e \vec{E}_R .

Coordenada da extremidade do vetor \vec{E}_1 .

Coordenada da extremidade do vetor \vec{E}_2 .

Coordenada da extremidade do vetor \vec{E}_R .

N	O	P	Q
Ponto A'		Extremidade	
xa'	ya'	xf	yf
-8	-8	-36,3	-36,3
d1	11,3	-10,1	-8,4
d2	48,7	-38,4	-36,6

O Ponto A' (-8, -8): origem dos vetores \vec{E}_1 , \vec{E}_2 e \vec{E}_R .

Coordenada da extremidade do vetor \vec{E}_1 .

Coordenada da extremidade do vetor \vec{E}_2 .

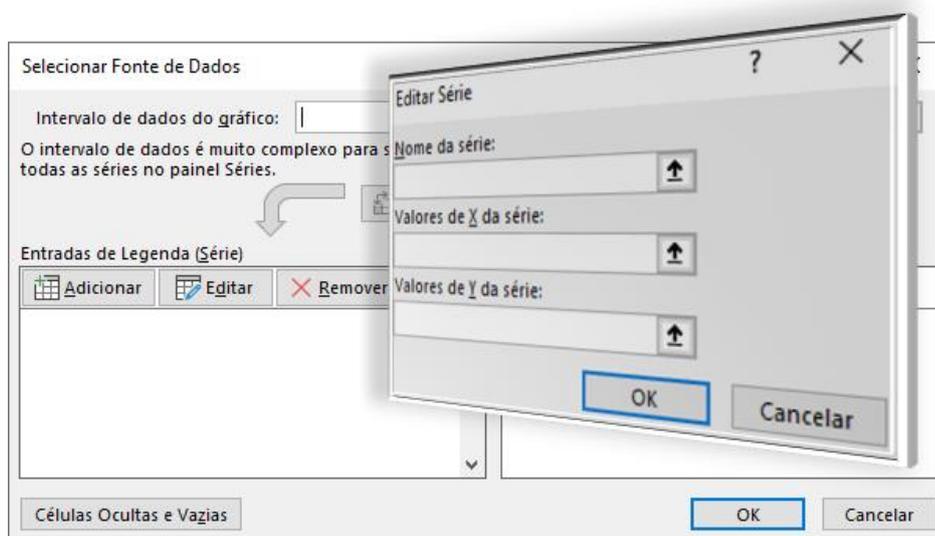
Coordenada da extremidade do vetor \vec{E}_R .

Fonte: O autor.

Para inserir a área de plotagem do gráfico e adicionar as cargas elétricas (pontos), ponto A e A' e as séries vetoriais dos pontos A e A', seguir os passos mencionados no apêndice A (figuras 48 e 49) e Apêndice B (figuras 56 e 57). Após

realizados os procedimentos já mencionados, abrirá a janela **Selecionar Fonte de Dados e Editar Séries**, conforme mostra a figura 69.

Figura 69: Janelas Selecionar Fonte de Dados e Editar Séries.



Fonte: O autor.

Para adicionar as séries referentes aos pontos A e A' e respectivos vetores, na janela Editar Série, seguir os passos indicados abaixo:

- ☞ Série de dados do ponto A:
 - Nome da série: A
 - Valores de X da série: clicar sobre a célula E3.
 - Valores de Y da série: clicar sobre a célula F3.
- ☞ Série de dados do ponto \vec{E}_1 :
 - Nome da série: E1A
 - Valores de X da série: com a tecla CTRL pressionada, clicar sobre as células E3 e L3.
 - Valores de Y da série: com a tecla CTRL pressionada, clicar sobre as células F3 e M3.
- ☞ Série de dados do ponto \vec{E}_2 :
 - Nome da série: E2A
 - Valores de X da série: com a tecla CTRL pressionada, clicar sobre as células E3 e L4.
 - Valores de Y da série: com a tecla CTRL pressionada, clicar sobre as células F3 e M4.
- ☞ Série de dados do ponto \vec{E}_R :
 - Nome da série: ERA
 - Valores de X da série: com a tecla CTRL pressionada, clicar sobre as células E3 e L5.

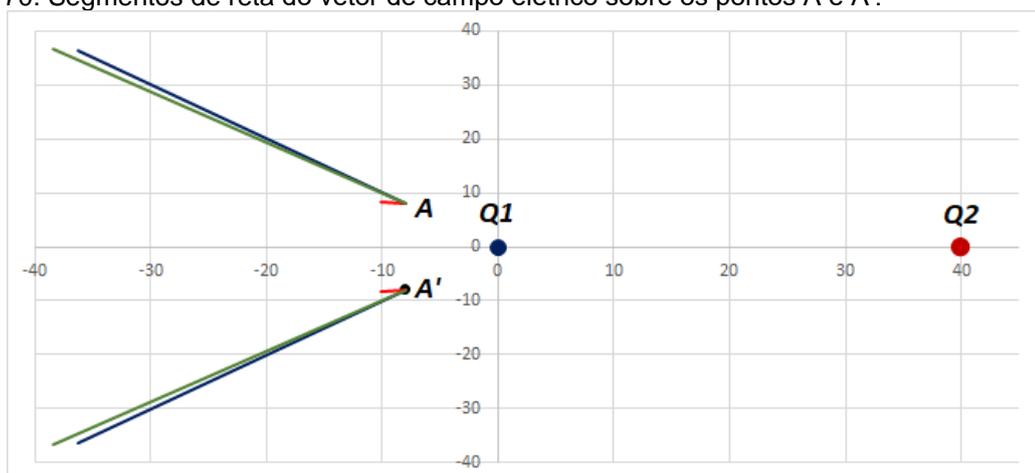
- Valores de Y da série: com a tecla CTRL pressionada, clicar sobre as células F3 e M5.
- ☞ Série de dados do ponto A':
- Nome da série: A
 - Valores de X da série: clicar sobre a célula N3.
 - Valores de Y da série: clicar sobre a célula O3.
- ☞ Série de dados do ponto $\overrightarrow{E'_1}$:
- Nome da série: E1A'
 - Valores de X da série: com a tecla CTRL pressionada, clicar sobre as células N3 e P3.
 - Valores de Y da série: com a tecla CTRL pressionada, clicar sobre as células O3 e Q3.
- ☞ Série de dados do ponto $\overrightarrow{E'_2}$:
- Nome da série: E2A'
 - Valores de X da série: com a tecla CTRL pressionada, clicar sobre as células N3 e P4.
 - Valores de Y da série: com a tecla CTRL pressionada, clicar sobre as células O3 e Q4.
- ☞ Série de dados do ponto $\overrightarrow{E'_R}$:
- Nome da série: ERA'
 - Valores de X da série: com a tecla CTRL pressionada, clicar sobre as células N3 e P5.
 - Valores de Y da série: com a tecla CTRL pressionada, clicar sobre as células F3 e Q5.

Para adicionar as séries referentes às representações das cargas elétricas Q_A e Q_B , seguir os procedimentos mencionados abaixo:

- ☞ Série de dados do ponto Q_A :
- Nome da série: Q1
 - Valores de X da série: clicar sobre a célula B6.
 - Valores de Y da série: clicar sobre a célula C6.
- ☞ Série de dados do ponto Q_B :
- Nome da série: Q2
 - Valores de X da série: clicar sobre a célula B14.
 - Valores de Y da série: clicar sobre a célula C14.

Ao terminar a adição das séries teremos um gráfico com pontos e segmentos de retas, conforme mostrada na figura 70.

Figura 70: Segmentos de reta do vetor de campo elétrico sobre os pontos A e A'.



Fonte: O autor.

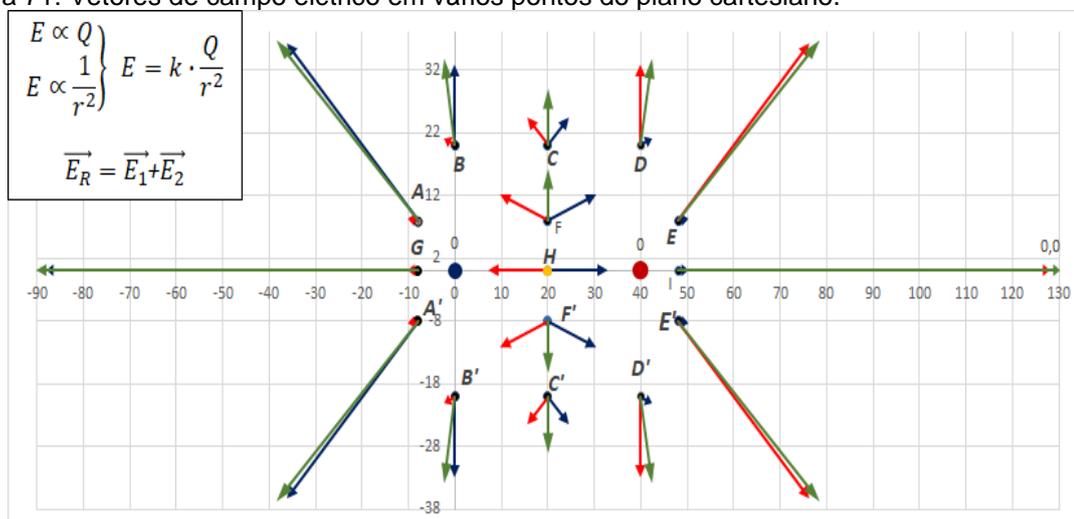
Para transformar os segmentos de retas em vetores, seguir o exemplo da figura 51 do apêndice A.

Para fixar os eixos gráficos (fazer com que não se alterem automaticamente a cada alteração de parâmetros) proceder conforme o exemplo da figura 52, do apêndice A.

Para adicionar mais séries de dados e, conseqüentemente obter representações de campo elétrico para mais pontos nas proximidades das cargas elétricas Q_1 e Q_2 , seguir o mesmo processo para inserção das respectivas séries de dados. Contudo, deve-se considerar as coordenadas de cada ponto em suas respectivas tabelas.

Após a inserção e configuração de todas as séries de pontos e vetores, obtém-se o gráfico de vetores apresentado na figura 71.

Figura 71: Vetores de campo elétrico em vários pontos do plano cartesiano.



Fonte: O autor.

Também é possível adicionar botões de rotação para controlar os valores dos módulos das cargas elétricas e suas respectivas posições. Desse modo, o gráfico automaticamente atualiza para novas representações vetoriais quando qualquer um dos parâmetros citados for alterado.

A inserção dos botões de rotação e formatação dos respectivos controles estão exemplificadas nas figuras 45, 46 e 47 do apêndice A.

A configuração dos valores máximos, mínimos e incrementais fica a critério.

**APÊNDICE D – LINHAS DE CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE DE
DUAS CARGAS ELÉTRICAS PUNTIFORMES**

COORDENADAS DO VETOR DE CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE

Com o objetivo de entender a representação geométrica das linhas de campo elétrico, será produzida uma planilha interativa para simulação do comportamento das linhas de campo elétrico de duas cargas elétricas positivas e puntiformes.

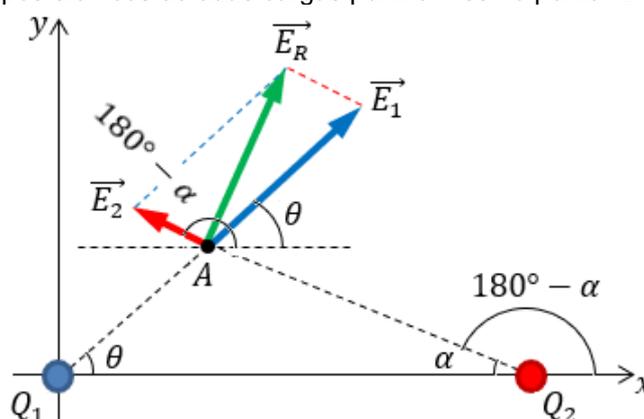
Aqui, i apenas apresentar-se-ão os procedimentos necessários para a confecção gráfica de 4 linhas de campo elétrico. Como as cargas elétricas ficaram dispostas no eixo horizontal (eixo x), as quatro linhas passam a ser dois pares simétricos.

Para uma planilha simplificada e limpa, as fórmulas a serem digitadas ficaram extensas, logo será explicado com mais detalhes a confecção dos formulários que serão utilizados.

Cada carga terá, inicialmente, simetria para o ponto inicial do primeiro vetor do campo elétrico.

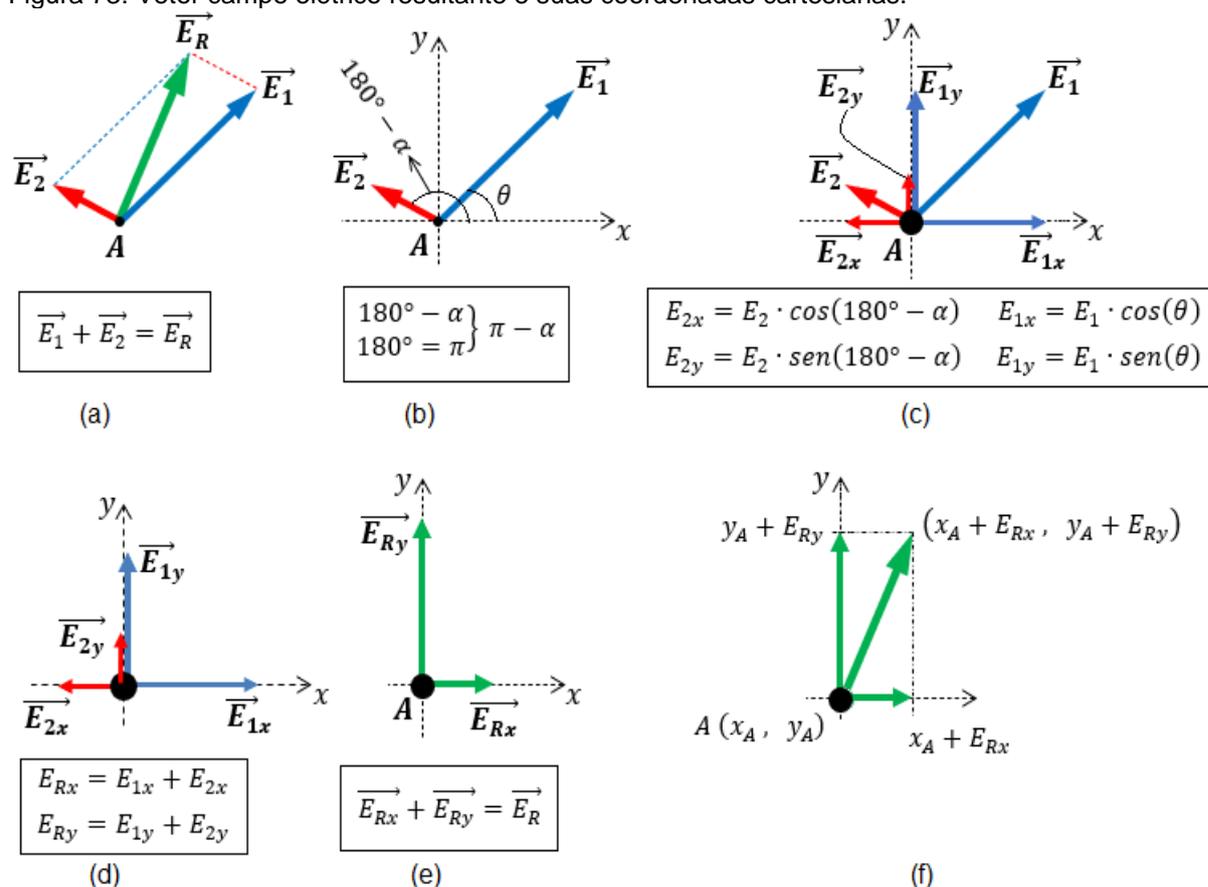
Vamos iniciar o entendimento matemático do modelo matemático para um ponto A , próximo a carga Q_1 . Note, na figura 72, que ambas as cargas influenciam o campo elétrico resultante \vec{E}_R . A figura 73 mostra as relações geométricas para obtenção do vetor resultante e suas coordenadas no plano cartesiano.

Figura 72: Vetores campos elétricos de duas cargas puntiformes no ponto A .



Fonte: O autor.

Figura 73: Vetor campo elétrico resultante e suas coordenadas cartesianas.



Fonte: O autor.

Se manipular corretamente as equações da figura 73, pode-se simplificar a construção gráfica utilizando apenas duas equações para as coordenadas da extremidade do vetor campo elétrico resultante. Veja a dedução do modelo matemático abaixo para o cálculo da coordenada (x_R, y_R) da extremidade do vetor campo elétrico resultante:

$$x_R = x_A + E_{Rx} \quad (13)$$

Sendo $E_{Rx} = E_{1x} + E_{2x}$, então,

$$x_R = x_A + E_{1x} + E_{2x} \quad (14)$$

O módulo das componentes horizontais dos vetores \vec{E}_1 e E_2 , são, respectivamente, $E_{1x} = E_1 \cdot \cos(\theta)$ e $E_{2x} = E_2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$. Portanto, temos

$$x_R = x_A + E_1 \cdot \cos(\theta) + E_2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \quad (15)$$

O campo elétrico da carga Q_1 é

$$E_1 = k \cdot \frac{|Q_1|}{r_1^2} \quad (16)$$

Onde

$$r_1 = \sqrt{(x_A - 0)^2 + (y_A - 0)^2} \Rightarrow r_1 = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \quad (17)$$

Logo, elevando ambos os membros a segunda potência, teremos

$$(r_1)^2 = \left(\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \right)^2 \Rightarrow r_1^2 = x_A^2 + y_A^2 \quad (18)$$

Portanto, podemos expressar a equação do campo elétrico E_1 , por

$$E_1 = k \cdot \frac{|Q_1|}{x_A^2 + y_A^2} \quad (19)$$

O campo elétrico da carga Q_2 é

$$E_2 = k \cdot \frac{|Q_2|}{r_2^2} \quad (20)$$

Onde

$$r_2 = \sqrt{(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2} \quad (21)$$

Logo, elevando ambos os membros a segunda potência, teremos

$$r_2^2 = (x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2 \quad (22)$$

Portanto, podemos expressar a equação do campo elétrico E_2 , por

$$E_2 = k \cdot \frac{|Q_2|}{(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2} \quad (23)$$

Substituindo as equações (19) e (23) na equação (15), temos

$$x_R = x_A + k \cdot \frac{|Q_1|}{x_A^2 + y_A^2} \cdot \cos(\theta) + k \cdot \frac{|Q_2|}{(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2} \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \quad (24)$$

Partindo agora para as funções trigonométricas, temos que:

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{\text{cat. adj}}{\text{hip}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\text{cat. adj}_1}{\text{hip}_1}\right) \\ \text{cat. adj}_1 &= x_A - 0 \Rightarrow \text{cat. adj}_1 = x_A & \theta &= \cos^{-1}\left(\frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}\right) \\ \text{hip}_1 &= r_1 \Rightarrow r_1 = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \end{aligned} \quad] \quad (25)$$

De modo análogo, temos que

$$180^\circ - \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\text{cat. adj}_2}{\text{hip}_2}\right) \quad (26)$$

Onde $\text{cat. adj}_2 = x_A - x_2$ e $\text{hip}_2 = r_2 \Rightarrow r_2 = \sqrt{(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2}$, realizando as devidas substituições, teremos,

$$180^\circ - \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{x_A - x_2}{\sqrt{(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2}}\right) \quad (27)$$

Portanto, substituindo as equações (25) e (27) na equação (24), tem-se modelizado a equação que nos fornecerá a abscissa da extremidade do vetor campo elétrico resultante.

$$\begin{aligned} x_R &= x_A + k \cdot \frac{|Q_1|}{x_A^2 + y_A^2} \cdot \cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}\right)\right) + \\ &k \cdot \frac{|Q_2|}{(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2} \cdot \cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{x_A - x_2}{\sqrt{(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2}}\right)\right) \end{aligned} \quad (28)$$

Para o valor da ordenada y_R da extremidade do campo elétrico resultante, temos

$$y_R = y_A + E_{Ry} \quad (29)$$

Onde $E_{Ry} = E_{1y} + E_{2y}$, então,

$$y_R = y_A + E_{1y} + E_{2y} \quad (30)$$

O módulo das componentes verticais dos vetores \vec{E}_1 e \vec{E}_2 , são, respectivamente, $E_{1y} = E_1 \cdot \text{sen}(\theta)$ e $E_{2y} = E_2 \cdot \text{sen}(180^\circ - \alpha)$. Portanto, temos

$$y_R = y_A + E_1 \cdot \text{sen}(\theta) + E_2 \cdot \text{sen}(180^\circ - \alpha) \quad (31)$$

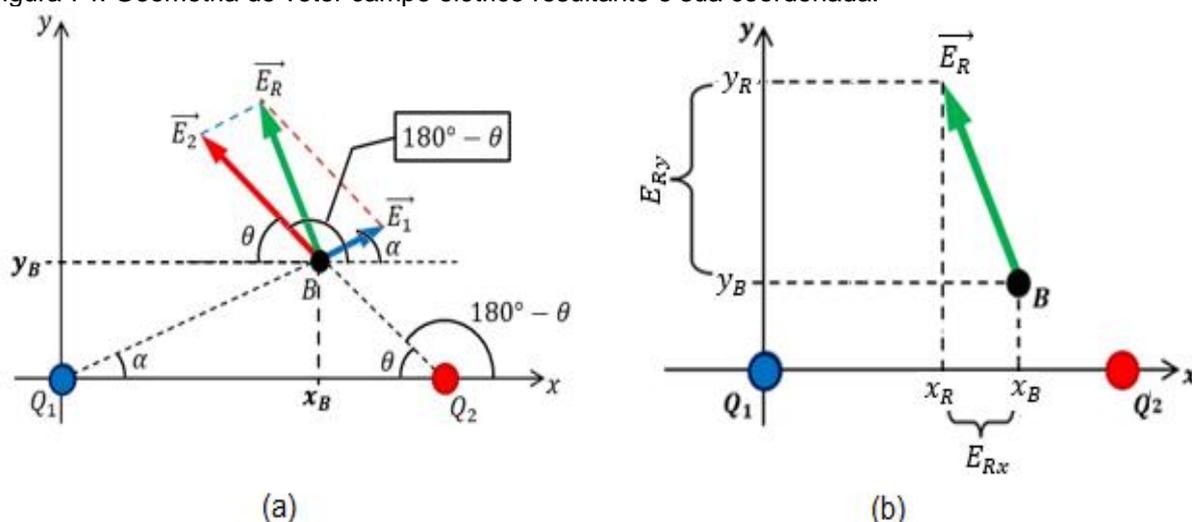
Fazendo as equações (19), (23), (25) e (27) na equação (31), segue que:

$$y_R = y_A + k \cdot \frac{|Q_1|}{x_A^2 + y_A^2} \cdot \text{sen} \left(\cos^{-1} \left(\frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} \right) \right) + \quad (32)$$

$$k \cdot \frac{|Q_2|}{(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2} \cdot \text{sen} \left(\cos^{-1} \left(\frac{x_A - x_2}{\sqrt{(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2}} \right) \right)$$

A modelagem matemática para a coordenada do vetor campo elétrico resultante no ponto B , próximo a carga elétrica Q_B e localizado de forma simétrica ao ponto A , segue os mesmos passos da demonstração feita para o ponto A . A geometria necessária para tal está esboçada na figura 74.

Figura 74: Geometria do vetor campo elétrico resultante e sua coordenada.



Fonte: O autor.

A modelização da coordenada da extremidade do vetor campo elétrico resultante segue os passos demonstrados para o vetor campo elétrico resultante do ponto A , com a respectiva mudança de posição/coordenada.

$$x_R = x_B + k \cdot \frac{|Q_1|}{x_B^2 + y_B^2} \cdot \cos \left(\cos^{-1} \left(\frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2}} \right) \right) + \quad (33)$$

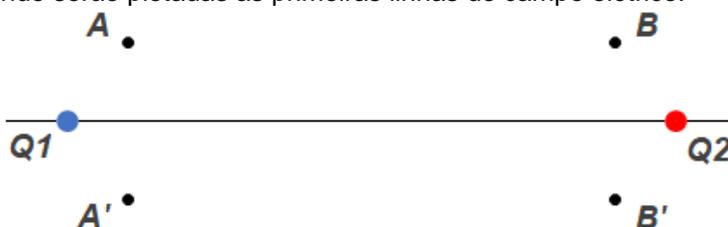
$$k \cdot \frac{|Q_2|}{(x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2} \cdot \cos \left(\cos^{-1} \left(\frac{x_B - x_2}{\sqrt{(x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2}} \right) \right)$$

$$y_R = y_B + k \cdot \frac{|Q_1|}{x_B^2 + y_B^2} \cdot \text{sen} \left(\cos^{-1} \left(\frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2}} \right) \right) + k \cdot \frac{|Q_2|}{(x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2} \cdot \text{sen} \left(\cos^{-1} \left(\frac{x_B - x_2}{\sqrt{(x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2}} \right) \right) \quad (34)$$

CONSTRUÇÃO GRÁFICA DAS LINHAS DE CAMPO ELÉTRICO

Aqui será mostrado a construção da planilha interativa e plotagem das 4 primeiras linhas de campo elétrico, com origem nos pontos A, A', B e B', figura 75.

Figura 75: Pontos onde serão plotadas as primeiras linhas de campo elétrico.



Fonte: O autor.

Observe, na figura 75, que há uma simetria horizontal, entre os pontos A e A' e entre os pontos B e B'.

A partir do ponto A construiremos a linha de campo elétrico que chamaremos de Linha 1 (Q1) superior. Com o ponto A' simétrico ao ponto A, construiremos a partir dele a linha de campo elétrico denominada Linha1 (Q1) inferior.

Já no ponto B será o início da linha de campo elétrico que chamaremos de Linha 1 (Q2) superior e, respectivamente no ponto B teremos a linha simétrica a ela, chamada de Linha 1 (Q2) inferior.

Também temos uma simétrica vertical entre os pontos A e B e entre os pontos A' e B'. Porém não poderemos usar dessa simetria, pois a alteração do módulo das cargas elétricas não deve produzir linhas com simetrias entre esses pontos.

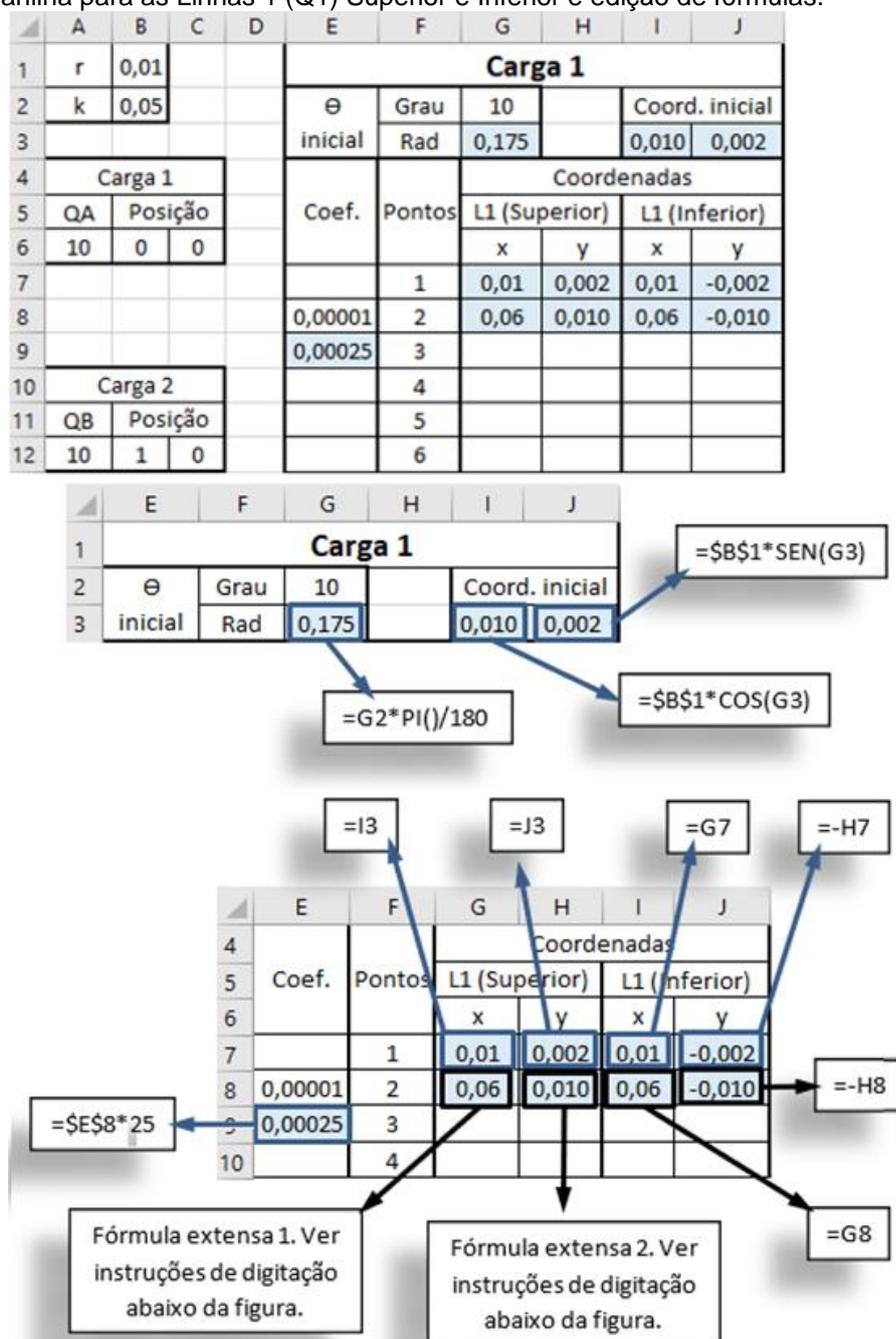
O módulo das cargas elétricas poderá ser variável com a inserção de controles de formulários (botões de rotação) disponíveis no *software Microsoft Excel*[®]. A inserção desta ferramenta de controle é que dará dinamismo às representações gráficas das linhas de campo elétrico.

A ideia é a plotagem de pontos próximos à origem dos vetores de campo elétrico resultante. Para isso usaremos a ideia de incremento.

Para uma representação mais fidedigna, usaremos 3000 pontos para cada linhas de campo. Mas calma, não será necessário digitar milhares de fórmulas! Para uma maior agilidade na construção dessa planilha, vamos lhe mostrar alguns “truques” disponíveis no *software*.

Tanto a construção da tabela e inserção de dados devem seguir os expostos nas figuras 76 e 77. As células destacadas em azul contém fórmulas e vínculos específicos e devem ser respeitados.

Figura 76: Planilha para as Linhas 1 (Q1) Superior e Inferior e edição de fórmulas.



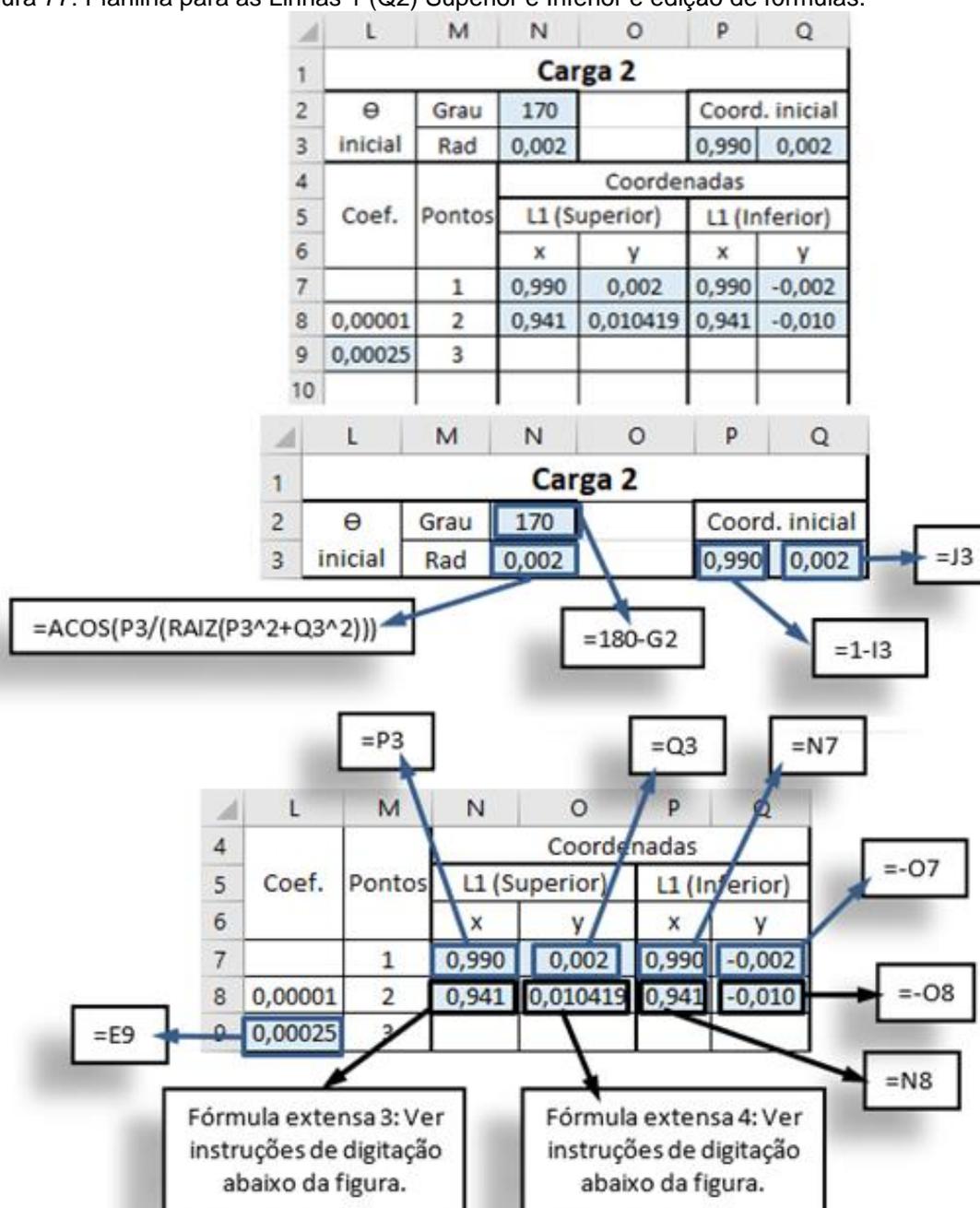
- Fórmula extensa 1:

$$=E8*(((B\$2*A\$6/(G7^2+H7^2))*COS(ACOS(G7/(RAIZ(G7^2+H7^2)))))+((B\$2*A\$12/((G7-B\$12)^2+(H7-\$C\$12)^2))*COS(ACOS((G7-B\$12)/(RAIZ((G7-B\$12)^2+(H7-\$C\$12)^2)))))+G7$$

- Fórmula extensa 2:

$$=E8*(((B\$2*A\$6/(G7^2+H7^2))*SEN(ACOS(G7/(RAIZ(G7^2+H7^2)))))+((B\$2*A\$12/((G7-B\$12)^2+(H7-\$C\$12)^2))*SEN(ACOS((G7-B\$12)/(RAIZ((G7-B\$12)^2+(H7-\$C\$12)^2)))))+H7$$

Figura 77: Planilha para as Linhas 1 (Q2) Superior e Inferior e edição de fórmulas.



- Fórmula extensa 3:

$$=L8*(((\$B\$2*\$A\$6/(N7^2+O7^2))*\text{COS}(\text{ACOS}(N7/(\text{RAIZ}(N7^2+O7^2)))))+(\$B\$2*\$A\$12/((N7-\$B\$12)^2+(O7-\$C\$12)^2))*\text{COS}(\text{ACOS}((N7-\$B\$12)/(\text{RAIZ}((N7-\$B\$12)^2+(O7-\$C\$12)^2)))))+N7$$

- Fórmula extensa 4:

$$=L8*(((\$B\$2*\$A\$6/(N7^2+O7^2))*\text{SEN}(\text{ACOS}(N7/(\text{RAIZ}(N7^2+O7^2)))))+((\$B\$2*\$A\$12/((N7-\$B\$12)^2+(O7-\$C\$12)^2))*\text{SEN}(\text{ACOS}((N7-\$B\$12)/(\text{RAIZ}((N7-\$B\$12)^2+(O7-\$C\$12)^2)))))+O7$$

Observação: O símbolo “\$” serve para manter fixo alguns vínculos específicos: módulo e posição das cargas elétricas Q_1 e Q_2 , os valores da constante elétrica k e de r .

Para expandir as fórmulas digitadas (figura 78), selecionamos as células F7, F8 e F9, posicionamos o cursor no canto inferior direito até ele formar o símbolo “+” e arrastamos para baixo até a célula F3006, até obter a numeração 3000.

Figura 78: Expansão da numeração dos pontos a serem plotados.

	E	F	G	H	I	J
1	Carga 1					
2	Θ	Grau	10		Coord. inicial	
3	inicial	Rad	0,175		0,010	0,002
4			Coordenadas			
5	Coef.	Pontos	L1 (Superior)		L1 (Inferior)	
6			x	y	x	y
7		1	0,01	0,002	0,01	-0,002
8	0,00001	2	0,06	0,010	0,06	-0,010
9	0,00025	3				
10						

a) Seleção das células F7, F8 e F9.

	E	F	G	H	I	J
1	Carga 1					
2	Θ	Grau	10		Coord. inicial	
3	inicial	Rad	0,175		0,010	0,002
4			Coordenadas			
5	Coef.	Pontos	L1 (Superior)		L1 (Inferior)	
6			x	y	x	y
7		1	0,01	0,002	0,01	-0,002
8	0,00001	2	0,06	0,010	0,06	-0,010
9	0,00025	3				
10						

b) Posicionamento do cursor para expansão da numeração - cursor assume a forma de “+”. Manter pressionado o botão esquerdo do mouse e arrastar até a célula F3006.

	E	F	G	H	I	J
4			Coordenadas			
5	Coef.	Pontos	L1 (Superior)		L1 (Inferior)	
6			x	y	x	y
7		1	0,01	0,002	0,01	-0,002
8	0,00001	2	0,06	0,010	0,06	-0,010
9	0,00025	3				
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						

Arrastando a numeração inicial para preenchimento automático.

	E	F	G	H	I	J
3004						
3005						
3006						
3007						

c) Arrastar a seleção das células F7, F8 e F9 até a célula F3006. A numeração será preenchida automaticamente até o valor de 3000.

Agora, com a coluna de numeração dos pontos preenchida, para expandir as fórmulas dessa tabela, basta selecionar as últimas células de cada coluna e dar um duplo clique com o botão direito do mouse no canto inferior direito. Veja o exemplo exposto na figura 79.

Figura 79: Expansão das fórmulas para todos os pontos da tabela.

Dar um duplo clique.

Repetir o mesmo procedimento para expandir as fórmulas das células G8, H8, I8 e J8.

Carga 1						
Θ	Grau	10	Coord. inicial			
inicial	Rad	0,175	L1 (Superior)		L1 (Inferior)	
Coef.	Pontos	x		y		
		1	0,01	0,002	0,01	-0,002
0,00001	2	0,06	0,010	0,06	-0,010	
0,00025	3					
	4					
0,00025	2996					
0,00025	2997					
0,00025	2998					
0,00025	2999					
0,00025	3000					
0,00025	2998	0,49	0,915	0,49	-0,915	
0,00025	2999	0,49	0,916	0,49	-0,916	
0,00025	3000	0,49	0,916	0,49	-0,916	

Fonte: O autor.

Repetir os procedimentos de expansão das fórmulas para a tabela da carga

2.

Para a plotagem gráfica das linhas de campo elétrico, seguir os passos mencionados no apêndice A, figuras 48 e 49.

Para a edição de dados das cargas 1 e 2, na janela editar série de dados seguir os procedimentos descritos abaixo:

- Carga Q1
 - ☞ Nome da série: Q1
 - ☞ Valores de X da série: clicar sobre a célula B6.
 - ☞ Valores de Y da série: apagar a texto = {1}, previamente inscrito nesse campo e em seguida clicar sobre a célula C6.
 - ☞ Clicar no botão OK.
- Carga Q2
 - ☞ Nome da série: Q2
 - ☞ Valores de X da série: clicar sobre a célula B12.
 - ☞ Valores de Y da série: apagar a texto = {1}, previamente inscrito nesse campo e em seguida clicar sobre a célula C12.
 - ☞ Clicar no botão OK.

Para adicionar linhas de campo elétrico, Linha 1 (Q1), a partir da carga 1, na janela editar série, seguir os procedimentos descritos abaixo.

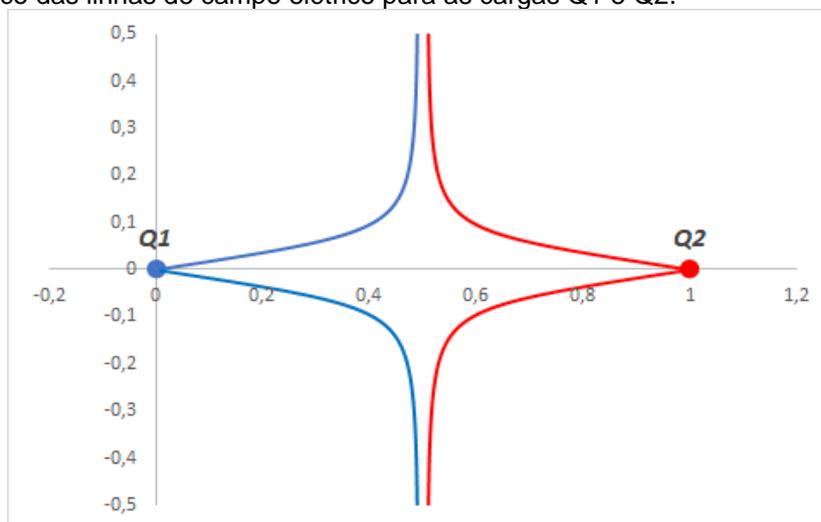
- Linha 1 (Q1) Superior:
 - ☞ Nome da série: Linha 1 (Q1) Superior
 - ☞ Valores de X da série: selecionar a célula G7, com as teclas as teclas CTRL e SHIFT pressionadas, clicar na “seta de direcionamento” para baixo do teclado.
 - ☞ Valores de Y da série: apagar a texto = {1}, previamente inscrito nesse campo e em seguida selecionar a célula H7, com as teclas as teclas CTRL e SHIFT pressionadas, clicar na “seta de direcionamento” para baixo do teclado.
- Linha 1 (Q1) Inferior:
 - ☞ Nome da série: Linha 1 (Q1) Superior
 - ☞ Valores de X da série: repetir o procedimento anterior a partir da célula I7.
 - ☞ Valores de Y da série: repetir o procedimento anterior a partir da célula J7.

Os procedimentos mencionados para os valores de X e Y das séries farão com que todos os valores das respectivas colunas sejam selecionados de uma única vez. Esse procedimento se repetirá para a seleção de dados das demais linhas de campo elétrico.

Seguindo os procedimentos mencionados acima, adicionar as linhas de campo elétrico Linha 1 (Q2) Superior e Inferior.

Após a inserção de todos os dados, teremos um gráfico com a plotagem das cargas elétricas 1 e 2 e das quatro primeiras linhas de campo elétrico, conforme a figura 80:

Figura 80: Gráfico das linhas de campo elétrico para as cargas Q1 e Q2.



Fonte: O autor.

Para inserir mais linhas de campo, basta selecionar as tabelas das cargas 1 e 2 e copiá-las para colunas ao lado, alterar o valor de Θ inicial da carga 1 e realizar as plotagens das novas linhas de campo elétrico.

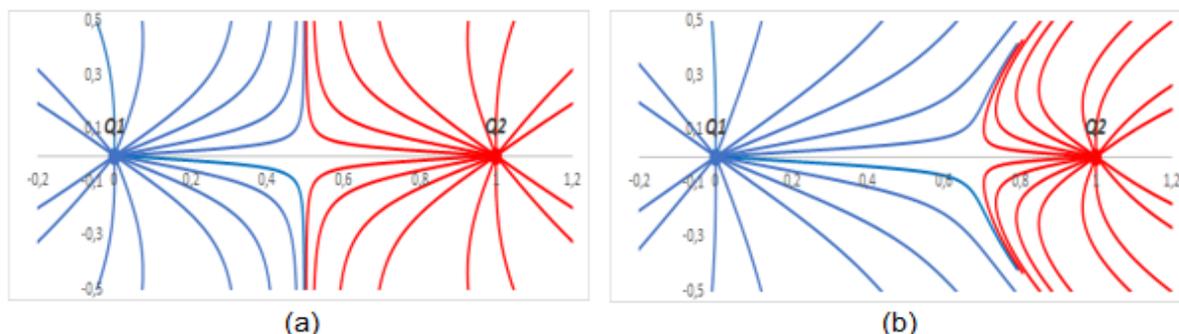
Para inserir os botões de controle de formulários para o módulo das cargas elétricas 1 e 2, seguir os procedimentos descritos no apêndice A, figuras 45, 46 e 47.

Para a formatação dos controles (botões de rotação), usar os seguintes valores:

- Módulo da carga 1:
 - ☞ Valor atual: 10
 - ☞ Valor mínimo: 1
 - ☞ Valor máximo: 20
 - ☞ Alteração incremental: 1
 - ☞ Vínculo da célula: $\$A\6
- Módulo da carga 2:
 - ☞ Valor atual: 10
 - ☞ Valor mínimo: 1
 - ☞ Valor máximo: 20
 - ☞ Alteração incremental: 1
 - ☞ Vínculo da célula: $\$A\12

Abaixo temos a representação gráfica da disposição de várias linhas de campo elétrico para cargas de mesmo sinal e mesmo módulo, figura 81 (a) e, cargas de mesmo sinal e módulo diferente, figura 81 (b).

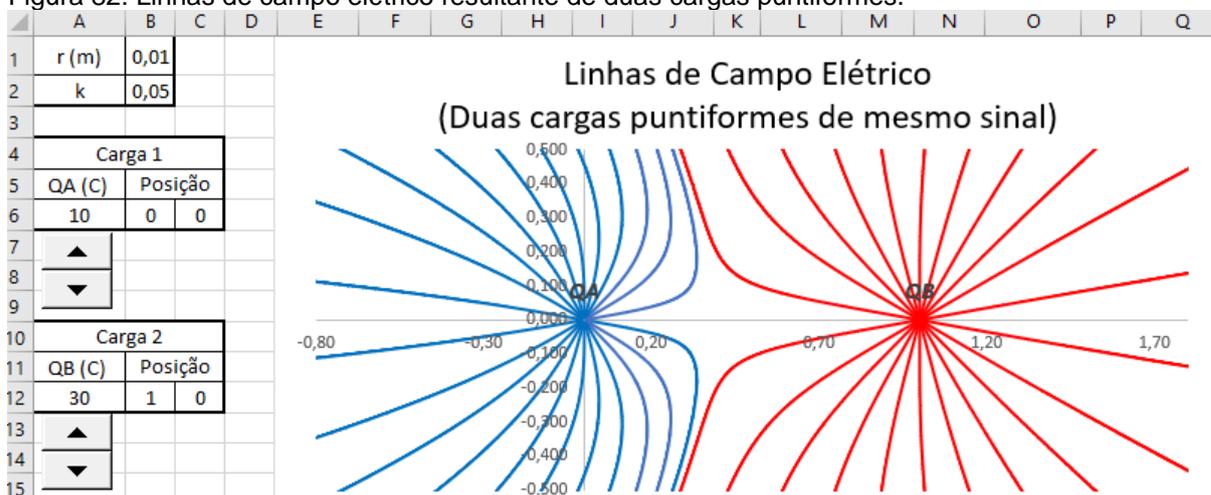
Figura 81: Configuração das linhas de campo elétrico para duas cargas puntiformes.



Fonte: O autor.

Na figura 82 temos a ilustração da planilha completa e pronta para o uso dos alunos, com a representação gráfica das linhas de campo elétrico resultante de duas cargas puntiformes, com a inserção dos botões de rotação para a alteração dos módulos das respectivas cargas elétricas.

Figura 82: Linhas de campo elétrico resultante de duas cargas puntiformes.



Fonte: O autor.

ANEXO A: APOSTILA – PLANILHAS ELETRÔNICAS NO ENSINO DE FÍSICA

Apostila

Planilhas eletrônicas no ensino de física

Versão digital disponível em: facin.pro.br

Prof. Paulo Cesar Facin

pcfacin@gmail.com

DEFIS/UEPG

Ponta Grossa-PR
2022

Apresentação

Este trabalho é indicado a quem quer se divertir com o estudo e o ensino da Física, uma vez que experimentar a visão de conceitos abstratos é muito prazerosa! Numa época em que a dimensão romântica da Física parece ser de acesso somente aqueles que possuem um elevado poder de abstração, que conseguem imaginar claramente as entidades matemáticas, surgem os computadores e suas potencialidades. Mas, parece que estamos presos a condição de alguém criar um vídeo explicativo de algum conceito mais abstrato para que possamos dar um sentimento de realidade aquela física mais elaborada. Então a ferramenta que será apresentada nesse trabalho é libertadora dessa condição, na medida que é simples de lidar e bastante comum. As planilhas eletrônicas como o Excel (Microsoft-Office) e o Calc (Linux – LibreOffice) propiciam a criação de ambientes gráficos com muitas possibilidades de formatação, duas dessas possibilidades são muito importantes para o estudo e ensino da Física: a primeira é a atualização do valor de uma variável por um simples clicar do mouse, a segunda é a criação simples de um vetor e que também pode ser alterado por um simples clicar do mouse. Então começa a “dança” de curvas, pontos e vetores num gráfico que pode ser muito colorido e destacado, estamos falando de dar movimento as abstrações colocadas num gráfico ou até mesmo tabela de números. A tarefa de criar uma planilha para o estudo de um caso particular da Física exige um razoável entendimento dos conceitos abstratos envolvidos, assim, um professor ou aluno que tinha receio de pensar em algum conceito será desafiado a superar essa barreira, e ele terá a motivação para o desenvolvimento da própria abstração. A utilização de planilhas prontas também oferece esse potencial de desenvolvimento ao se testar as atualizações das variáveis, os limites das constantes, ao ver no gráfico o resultado disso e na velocidade que deseja que as coisas mudem.

O primeiro capítulo desse livro é um tutorial sobre como usar as planilhas, com os assuntos que serão necessários para o desenvolvimento destas. O segundo e o terceiro capítulo são exemplos de aplicação das planilhas no estudo da Mecânica e da Ótica respectivamente, as seções de cada capítulo geralmente iniciam com a descrição do problema e da matemática envolvida, a princípio sem a necessidade de se consultar outra obra, entretanto se esta existir recomenda-se a coleção dos “Haliday”, “Tipler” e “Moysés Nussenzveig” que são extensamente utilizados nos cursos de graduação em Física.

CAPÍTULO 1 – TÓPICOS

1.1. USANDO O EXCEL (OFFICE 2010)

Nesta seção pretendemos introduzir os tópicos que serão necessários para o desenvolvimento da proposta das planilhas, nos diversos assuntos e para um leitor que nunca teve contato com esse tipo de planilha eletrônica. Para o leitor que deseja se aprofundar nas potencialidades das planilhas eletrônicas existem vários tutoriais em formato “pdf” e vídeos disponíveis na internet. Por uma questão de experiência acumulada será utilizado o programa Excel que vem junto com o Microsoft Office, entretanto todas as planilhas podem ser construídas de maneira muito semelhante usando o Calc que vem junto com o LibreOffice e que é um software livre.

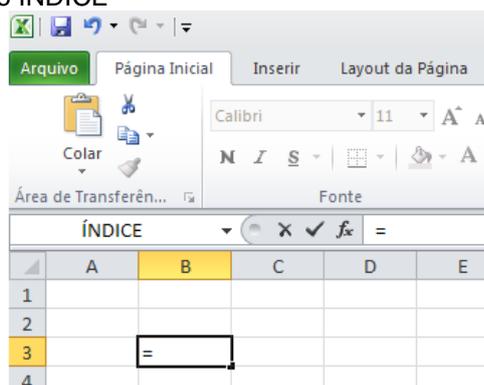
1.2. A PLANILHA

Uma planilha é uma matriz com linhas e colunas, as colunas são designadas pelas letras maiúsculas em ordem alfabética, A, B, C, etc. As linhas são designadas por números inteiros em ordem crescente a partir do número 1. Então é preciso de uma letra e um número para designar uma célula específica na planilha, por exemplo, a célula A1. Uma célula pode conter um número, um símbolo, uma palavra ou um texto, e pode também conter uma operação, por exemplo, na célula C1 desejamos somar o valor contido na célula A1 com o valor contido na célula B1. Detalhes de como realizar operações serão descritos a seguir.

1.3 A AJUDA DO EXCEL/OFFICE 2010

Quando se clica numa célula e é digitado o sinal de igual, aparece logo acima do cabeçalho da planilha no canto esquerdo a palavra ÍNDICE e uma ponta de seta preta, como na figura 1.1.

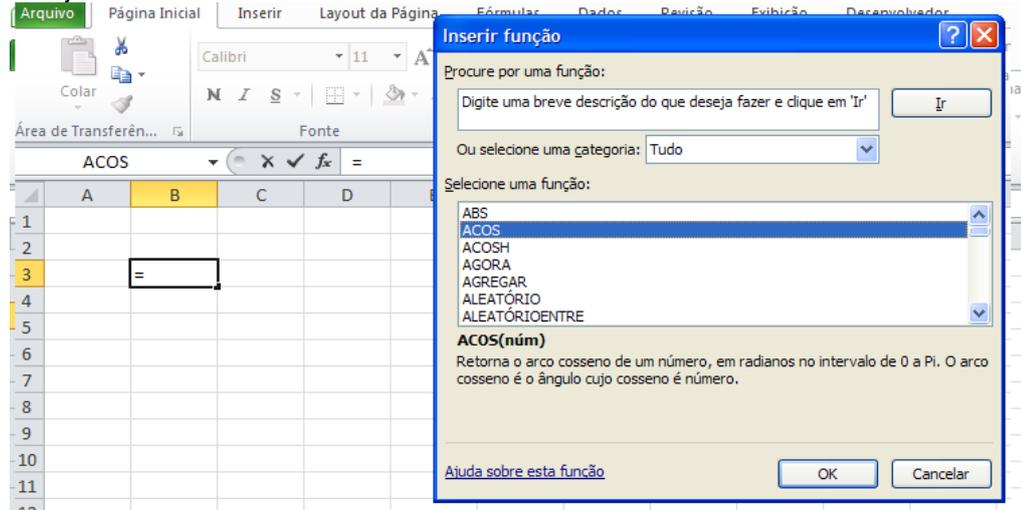
Figura 1.1: Local de ajuda pelo ÍNDICE



Fonte: O autor.

Ao clicar na seta preta um “menu” de opções aparece, como na figura 1.2, e ao se escolher “mais funções” aparece uma lista de funções e uma área para digitar o nome de alguma função que não apareça na tela, essa é a ajuda que será necessária, também aparece uma breve descrição da função. Em versões mais novas do Office a palavra ÍNDICE não aparece, mas o local na tela para esse tipo de ajuda e o procedimento é o mesmo.

Figura 1.2: Ajuda do Excel.



Fonte: O autor.

1.4 OPERAÇÕES BÁSICAS

Para realizar uma operação com as células da planilha, como somar o valor da célula A1 com o valor da célula B1, temos que obrigatoriamente escolher uma célula para isto, digamos C1, e digitar nela o sinal de igual “=”. Então podemos digitar A1 + B1, ou logo após digitar “=” clicar na célula A1, digitar “+” e clicar na célula B1, daí acionamos a tecla “enter” e o resultado da operação será mostrado na célula C1. Assim, podemos alterar os valores das células A1 e B1 que o valor da soma na célula C1 será automaticamente calculado.

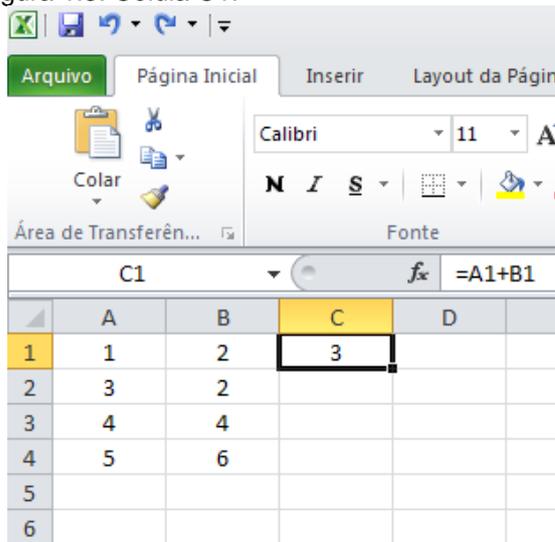
Além disso, podemos usar o recurso de “arraste” da célula C1 para generalizar a operação realizada na célula C1 para toda a coluna A e coluna B, ou seja, na célula C2 será realizada a soma A2 + B2 e assim por diante C3 = A3 + B3. Entretanto, existem dois tipos de arraste de uma célula, clicando na célula ela fica selecionada e clicando no canto inferior direito da célula (já selecionada na figura 1.3a) com o botão esquerdo do mouse e mantendo apertado obtemos o efeito descrito acima, figura 1.3b.

A subtração é obtida usando o símbolo “-”, no caso das células anteriores teríamos $C1 = A1 - B1$.

A multiplicação é obtida usando o símbolo “*”, no caso das células anteriores teríamos $C1 = A1 * B1$.

A divisão é obtida usando o símbolo “/”, no caso das células anteriores teríamos $C1 = A1 / B1$.

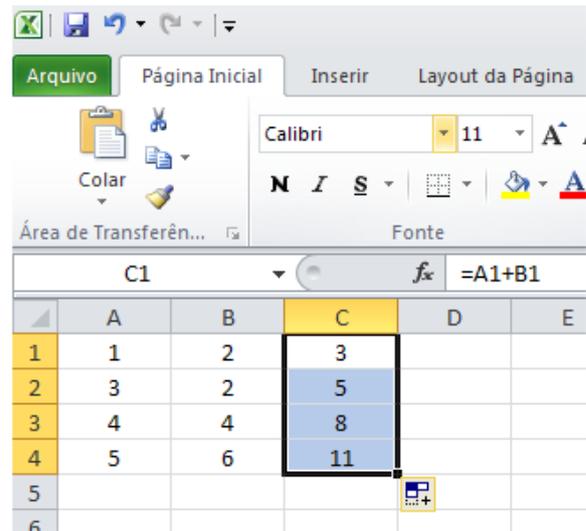
Figura 1.3: Célula C1.



	A	B	C	D
1	1	2	3	
2	3	2		
3	4	4		
4	5	6		
5				
6				

Figura 1.3a – Célula C1 selecionada, a operação contida nela é mostrada logo acima na figura como $=A1+B1$.

Fonte: O autor.



	A	B	C	D	E
1	1	2	3		
2	3	2	5		
3	4	4	8		
4	5	6	11		
5					
6					

Figura 1.3b – Célula C1 sendo arrastada até a linha 4.

1.5 POTENCIAÇÃO

Para elevar o valor de uma célula a uma potência, por exemplo, 2 usamos o símbolo “^”, por exemplo, $C1 = A1^2$, significa que o valor de A1 será elevado ao quadrado. Podemos usar ainda uma potência fracionária $C1 = A1^{(1/2)}$ ou $C1 = A1^{0,5}$ e também potências negativas.

1.6 USO DE PARÊNTESES

O uso de parênteses serve para priorizar operações quando são usadas mais de uma operação na mesma célula, por exemplo, $C1 = (A1+B1)/(A1*B1)$. Os parênteses neste caso indicam que o resultado da operação $A1+B1$ será dividido pelo resultado de $A1*B1$, se não tivessem os parênteses teríamos o resultado de $B1/A1$ multiplicado por B1 e depois somado com A1. Temos que lembrar que a multiplicação

e a divisão estão no mesmo “nível” de prioridade e tem prioridade maior sobre a soma e a subtração (que estão no mesmo nível), isto quer dizer que uma multiplicação será realizada antes de uma soma, como por exemplo em $C1 = A1 + B1 * A1$ primeiro será feito o produto de $B1 * A1$ e o resultado será somado a $A1$.

1.7 A FUNÇÃO SENO

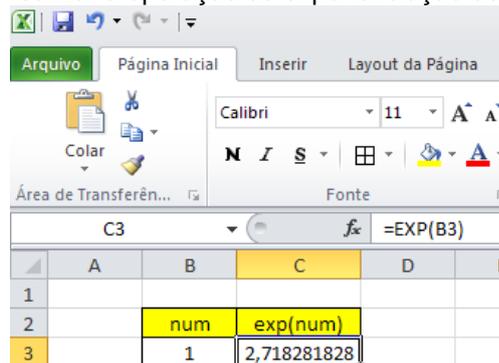
SEN(A1) calcula o seno do valor contido na célula A1, considerando que o valor da célula A1 está expresso em radianos, que é um ângulo expresso em frações de Pi radianos. Existe a função GRAUS(A1) que converte o valor de A1 em radianos para graus e a função RADIANOS(A1) que converte o valor de A1 em graus para radianos. O mesmo vale para a função COS(A1).

Muitas vezes o corretor de texto do Excel altera SEN para SEM e com isso aparece a mensagem #NOME?, para contornar essa situação devemos corrigir SEM para SEN usando CTRL + Z.

1.8 A FUNÇÃO EXPONENCIAL

A função EXP(A1) retorna a exponencial de A1 com a base sendo o número de Euler 2,71828182845904. Na Figura 1.4 mostramos essa operação na célula C3.

Figura 1.4: Exemplo de como realizar a operação de exponenciação de um número.



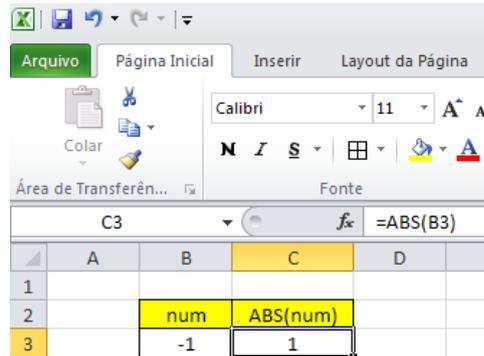
	A	B	C	D	E
1					
2		num	exp(num)		
3		1	2,718281828		

Fonte: O autor.

1.9 VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO

Muitas vezes necessitamos do valor absoluto de um número, isto pode ser feito com a função ABS(A1), exemplo na figura 1.5.

Figura 1.5: Exemplo de como obter o valor absoluto de um número.



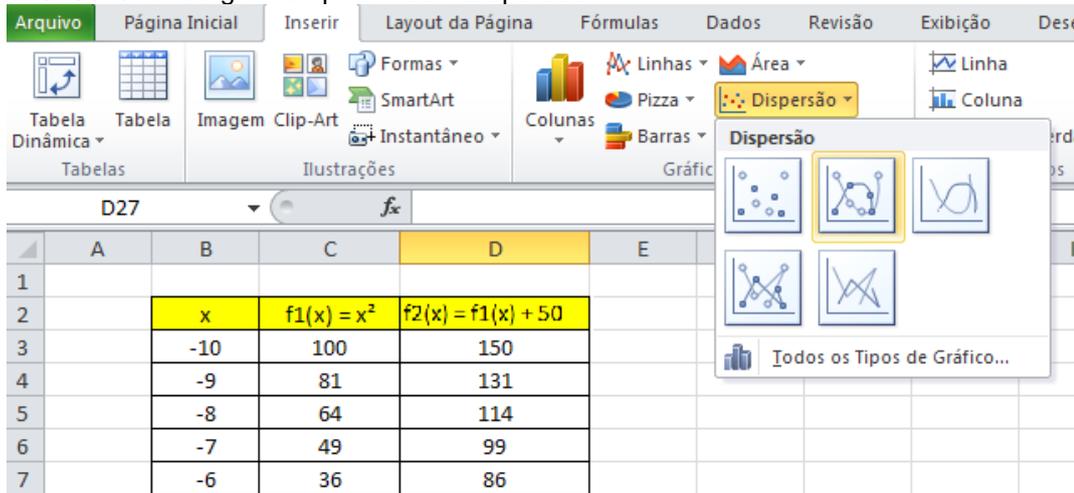
Fonte: O autor.

1.10 CONSTRUINDO GRÁFICOS BIDIMENSIONAIS

O tipo de gráfico que usaremos é o tipo “dispersão” e suas três variantes, somente pontos, somente linhas suaves e com pontos conectados por linhas suaves. Para construirmos um gráfico é preciso uma sequência de pontos, ou seja, uma coluna de valores a serem representados no eixo vertical e outra coluna de valores a serem representados no eixo horizontal. Podemos representar várias sequências de pontos, ou seja, várias curvas no mesmo gráfico. A sequência para essa construção é a seguinte:

- Criadas, por exemplo, três colunas de pontos, o primeiro passo é clicar na aba “inserir” e depois no ícone de gráfico “dispersão” e então escolher uma das três formas de gráfico por dispersão. Como na figura 1.6.

Figura 1.6: Construindo gráficos pelo modo “Dispersão”.

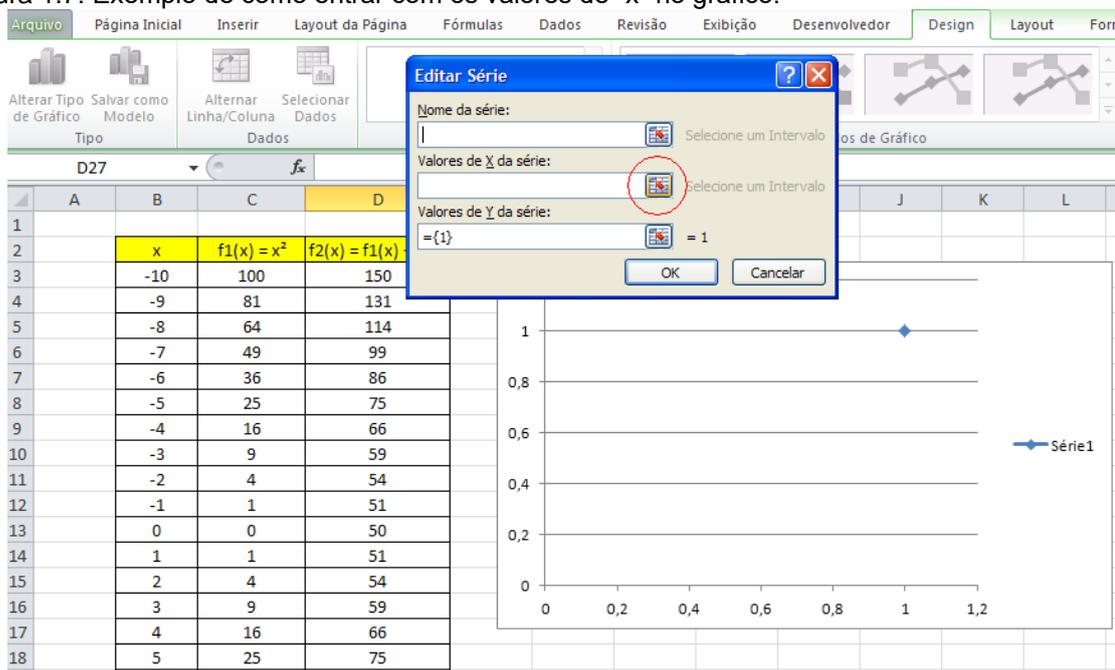


Fonte: O autor.

- O segundo passo é na verdade uma sequência de passos. Depois de escolhido a forma de apresentação dos pontos no gráfico (passo anterior)

uma janela branca será mostrada na tela. Com o botão direito do mouse clicar sobre a área branca e escolher a opção “Selecionar Dados”. Uma janela chamada “Selecionar fonte de Dados” aparecerá, clicamos na opção “Adicionar” e uma outra janela se abre perguntando o “Nome da série” que não precisa ser preenchida necessariamente. Clicamos então no canto inferior direito da opção “Valores de x da série”, mostrado na figura 1.7 com um círculo vermelho.

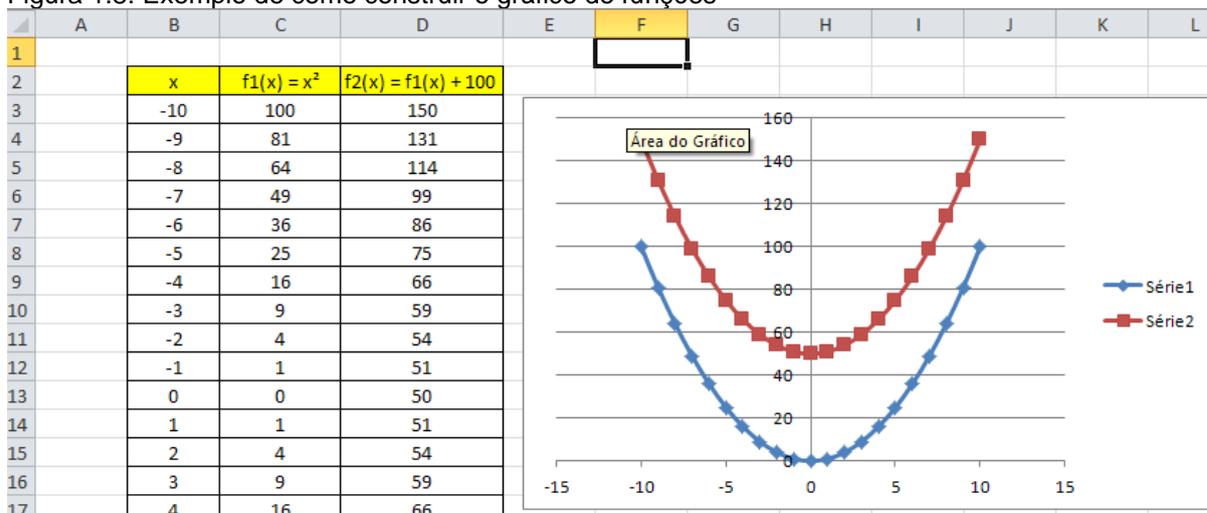
Figura 1.7: Exemplo de como entrar com os valores de “x” no gráfico.



Fonte: O autor.

Então surgirá uma janela “Editar Série” e podemos clicar na célula inicial dos valores de “x” e arrastar o mouse com o botão esquerdo pressionado até o último valor de “x”. Daí podemos pressionar a tecla “enter” ou clicar no canto inferior direito da janela. Aparecerá então novamente a janela “Editar Série” e podemos fazer o mesmo procedimento para entrar com os valores de “y” (valores do eixo vertical). Pressionamos a tecla “enter” o gráfico $y(x)$ é construído e o Excel volta a mostrar a janela “Selecionar fonte de Dados”, podemos então fazer o mesmo procedimento a partir do segundo passo para construir juntamente o gráfico de outra função $f(x)$. O resultado é mostrado na figura 1.8.

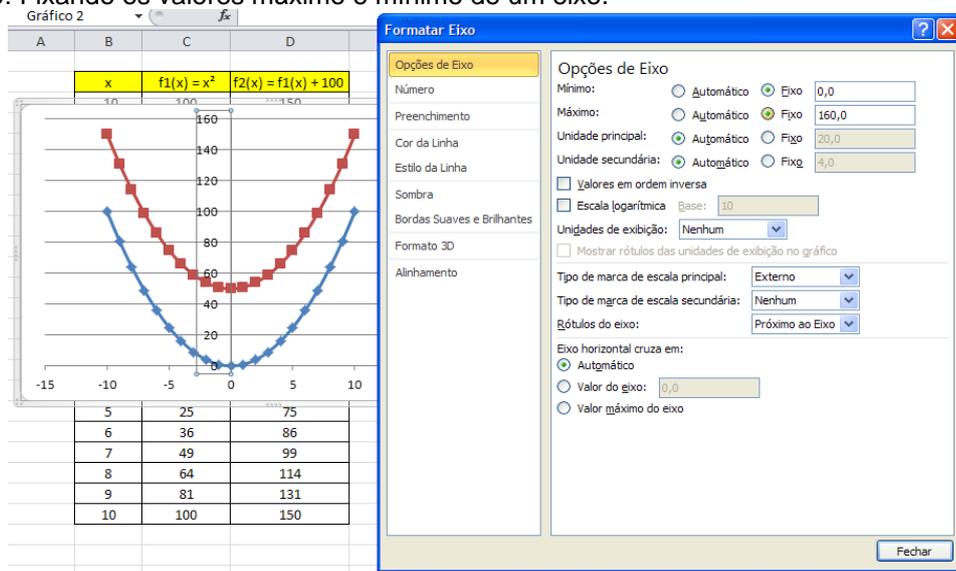
Figura 1.8: Exemplo de como construir o gráfico de funções



Fonte: O autor.

- O terceiro passo seria controlar as formatações do gráfico, legenda dos eixos “x” e “y”, tipo de ponto (marcador, cor, transparência, etc), tipo de linha (se vai ter linha ou não, espessura, pontilhada, etc). As linhas horizontais de referência podem ser retiradas.
- O quarto passo pode ocorrer quando há a necessidade fixar os eixos. Muitas vezes desejamos mudar os valores dos pontos, e neste caso o gráfico se atualiza automaticamente. Para fixar os valores máximos e mínimos dos eixos, clicamos no eixo para seleccioná-lo e dando um duplo clic para abrir a janela “Formatar Eixos”, mostrada figura 1.9, então se escolhe fixar máximo e/ou mínimo nas “Opções de eixo”.

Figura 1.9: Fixando os valores máximo e mínimo de um eixo.

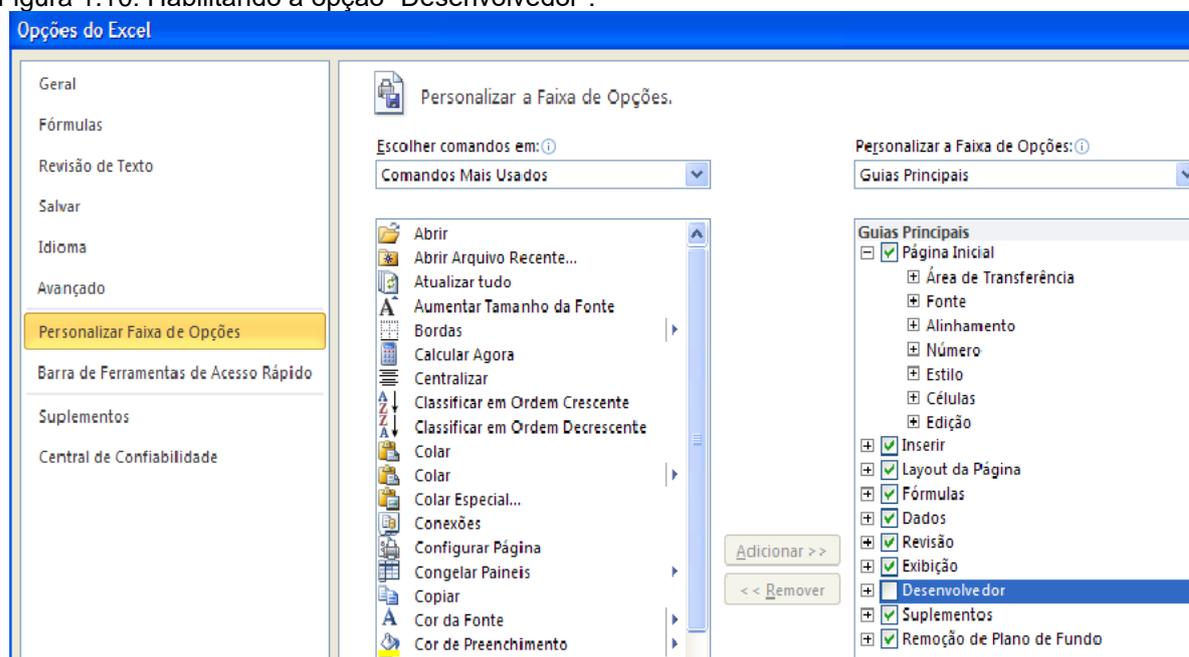


Fonte: O autor.

1.11 USANDO BOTÕES:

- O primeiro passo é habilitar a aba “desenvolvedor”, no Excel do Office 2010 devemos clicar na aba “Arquivo” e selecionar “opções”, a janela “Opções do Excel” se abrirá e então clicamos em “Personalizar faixa de opções” e uma nova janela se abre, como na figura 1.10, no lado direito habilitamos a opção “desenvolvedor”.

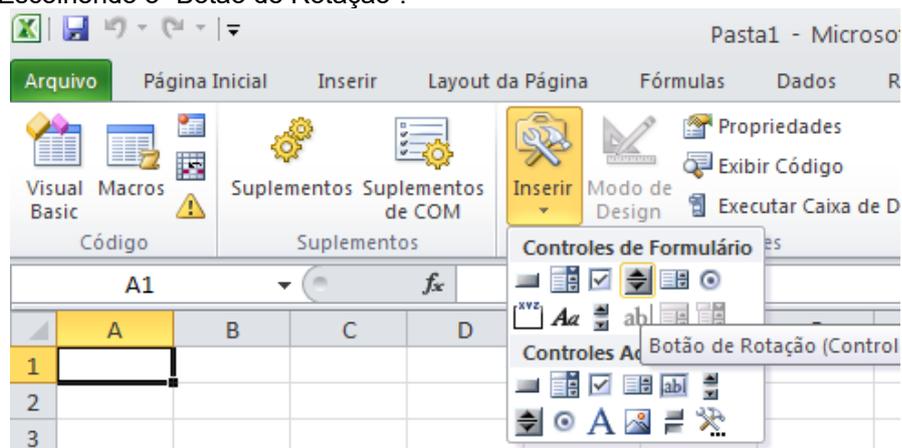
Figura 1.10: Habilitando a opção “Desenvolvedor”.



Fonte: O autor.

- O segundo passo então é dado ao se clicar na aba, agora disponível, “Desenvolvedor” e logo em seguida no ícone “Inserir”, uma janela pequena “Controles de formulário” se abre com várias opções de botões, escolhemos o “botão de rotação” como mostrado na figura 1.11.

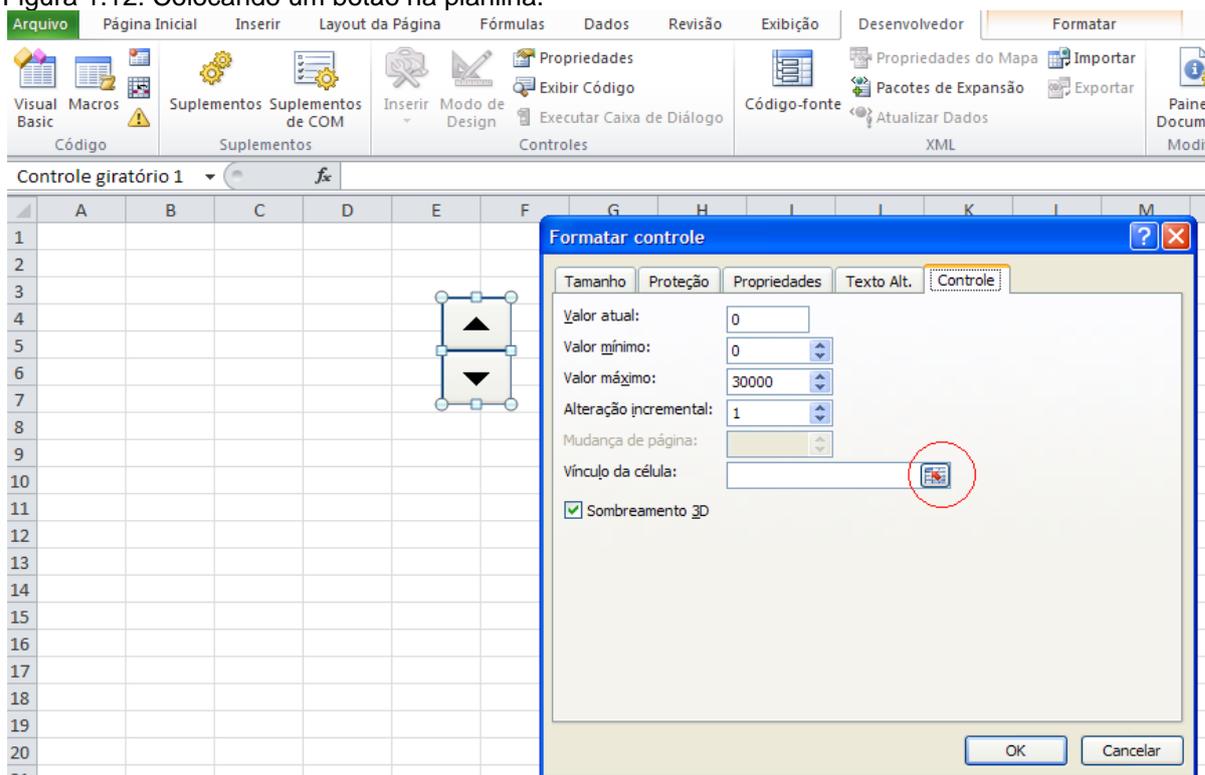
Figura 1.11: Escolhendo o “Botão de Rotação”.



Fonte: O autor.

- No terceiro passo clicamos na opção “Botão de rotação” e com o botão esquerdo do mouse pressionado arrastamos o cursor sobre a planilha, um botão será desenhado e já ficará selecionado. Clicamos então com o botão direito do mouse sobre o botão desenhado e escolhemos a opção “Formatar controle” na nova janela. A opção a ser escolhida agora é “vínculo da célula”, podemos digitar o endereço da célula que se quer vincular a ação do botão, ou clicar no canto inferior direito mostrado com um círculo vermelho na figura 1.12, então ao clicamos diretamente na célula escolhida e novamente no símbolo de entrada (círculo vermelho). Agora é só clicar fora do botão e ele estará habilitado, ou seja, ao clicar no botão o valor da célula escolhida deverá aumentar uma unidade.

Figura 1.12: Colocando um botão na planilha.



Fonte: O autor.

- O quarto passo é dado se for necessário obter valores negativos ou decimais para a ação de um botão, podemos fazer isso usando outra célula com a operação de multiplicação do valor da célula que o botão controla por um decimal. Por exemplo, se a célula que o botão controla é A1, podemos utilizar a célula A2 = 0,1*A1 e a célula A2 passará a ser controlada pelo botão com valores incrementados de 0,1 em 0,1. Para valores negativos fazemos, por exemplo, A2 = A1 – 200 e os valores de A2 começam em -200 quando o valor do botão é zero e continuam negativos até o valor zero, a partir daí os valores são positivos novamente.

1.12 CONSTRUINDO VETORES

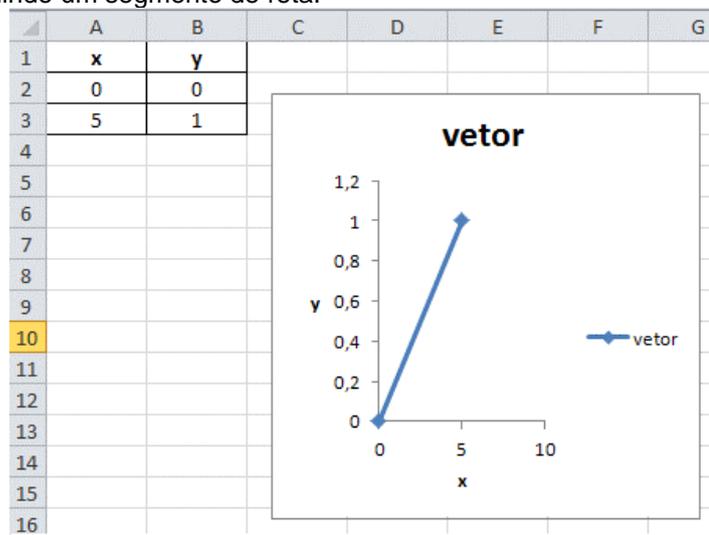
A ideia para representar um vetor bidimensional é usar um segmento de reta entre dois pontos e a opção de formatação desse segmento com uma seta na extremidade.

- O primeiro passo então é criar o segmento de reta e para isso precisamos de dois pontos, um que representará o início do segmento e outro o fim. O primeiro

ponto será um par (x_1, y_1) e o outro (x_2, y_2) , podemos usar então quatro células, por exemplo, (A1,B1) e (A2, B2).

- O segundo passo é construir um gráfico com uma série representando esses dois pontos, como na figura 1.13, onde foi usado (A2,B2) e (A3,B3).

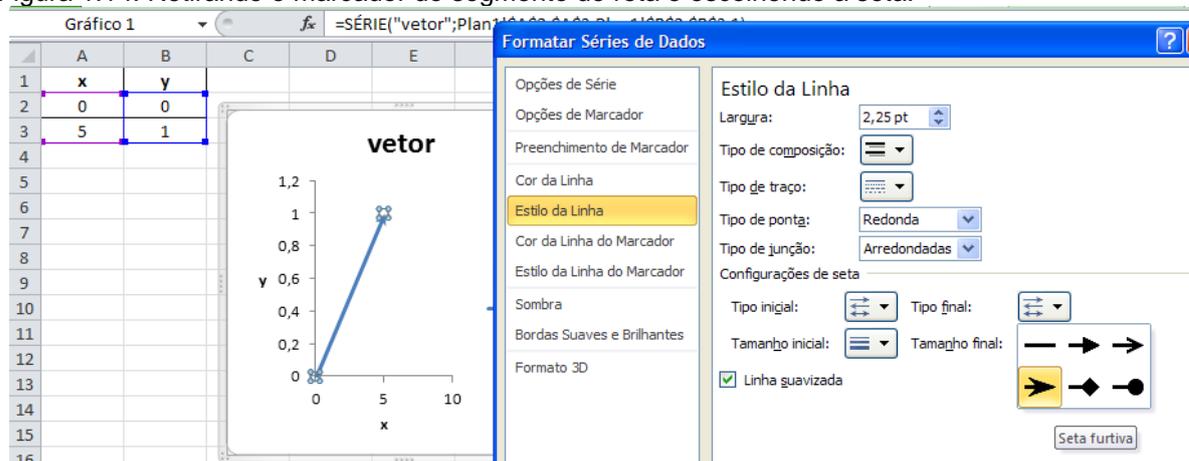
Figura 1.13: Construindo um segmento de reta.



Fonte: O autor.

- O terceiro passo é a formatação do segmento de reta, clicamos com o botão esquerdo no segmento de reta selecionando-o e depois clicamos com o botão direito e escolhemos “Formatar série de dados”, ou é só dar um duplo clic no segmento de reta. Irá abrir uma janela com várias opções, na “opção de marcador” escolhemos “nenhum”, depois em “Estilo da linha” (não confundir com a “Estilo da linha do marcador”) abrindo uma janela que mostra algumas opções de setas, mostrado na figura 1.14.

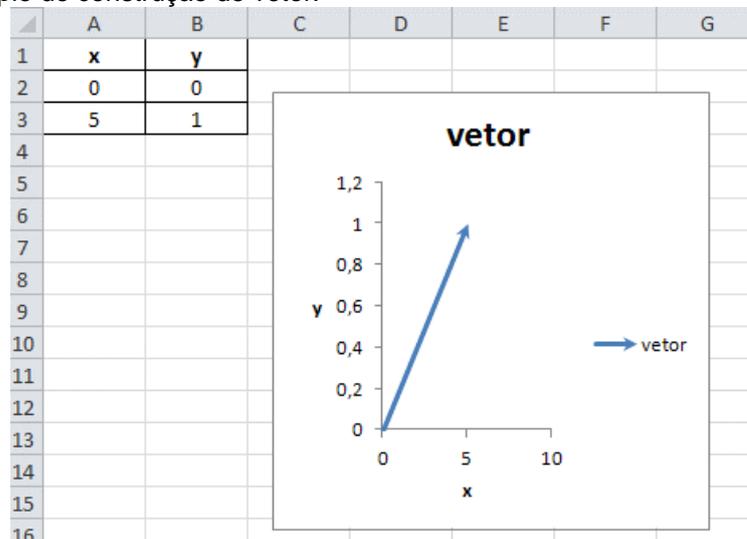
Figura 1.14: Retirando o marcador do segmento de reta e escolhendo a seta.



Fonte: O autor.

Agora escolhemos a ponta de seta desejada na opção “configurações de seta” e pronto, o vetor construído está mostrado na Figura 1.15!

Figura 1.15: Exemplo de construção de vetor.



Fonte: O autor.

Na figura 1.15 podemos perceber que se usarmos botões para variar os valores das células A2, A3, B2 e B3, o vetor mostrado será atualizado em todas as suas propriedades, módulo, sentido e direção.

Agora estamos aptos a desenvolver muitas planilhas para o estudo da física e da matemática!

CAPÍTULO 2- MECÂNICA

O objetivo desse trabalho é exemplificar o potencial de uso das planilhas eletrônicas no estudo da física e da matemática, assim, os temas abordados não seguem necessariamente a sequência geralmente apresentada nos livros didáticos dos cursos de graduação em física.

2.1 INTRODUÇÃO

Olhar para as equações de movimento de um corpo e abstrair aspectos de seu movimento que sejam interessantes, que motivem uma maior investigação por parte do aluno de um curso de mecânica é algo bastante difícil. Em meio a uma matemática carregada de vetores que são entes abstratos com módulo, direção e sentido e que ainda podem mudar de ponto para ponto no espaço e, além disso, mudar tudo isso no tempo, qualquer um pode ficar confuso! Então visualizar exemplos, manipular estes exemplos, o aluno mesmo construir esses exemplos, contribui para o desenvolvimento da abstração tornando as planilhas eletrônicas muito atraentes, apesar destas já apresentarem um caráter sedutor quando se explora seus formatos de linhas, marcadores, fontes, etc.

A facilidade de se explorar os assuntos da física com situações problema é mais um dos pontos que tornam atraente o uso das planilhas eletrônicas, e em alguns casos ajudam a explicitar deficiências de formação que estavam ocultas, como por exemplo, o entendimento de vetores e seu módulo, sua direção e sentido. Ao desafiar os estudantes a construir, ou consertar, uma planilha, seus esforços para isso os impulsionam a refletir a parte abstrata do conteúdo em questão, e que era negligenciada por não haver um bom motivo para isso.

Esse material pode ser utilizado para trabalhar a física ou a matemática com acadêmicos de graduação e alunos do ensino médio. Em muitos casos a matemática utilizada extrapola o contexto do ensino médio, mas nesses casos o professor de física ou matemática pode deixar de lado a parte de dedução matemática e usar apenas as funções finais, que são as soluções das equações mais complicadas.

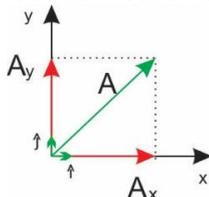
Nesse capítulo veremos alguns exemplos de como aplicar os “botões” para evoluir em alguns casos a variável tempo e em outros casos a variável posição, ângulo, etc. Mas antes disso, usaremos uma planilha para fazer uma revisão da

matemática usada nas operações com “vetores”, ou seja, o módulo de um vetor, suas componentes ao longo dos eixos, soma de vetores, etc. Uma estratégia interessante é usar um roteiro de tarefas/desafios.

2.2 VETORES

Vamos estudar o caso bidimensional que possui grande generalidade. Para desenvolver o roteiro de tarefas podemos pensar na decomposição dos vetores nos eixos x e y usando suas projeções em tais eixos e os vetores unitários (que possuem módulo 1) “ \hat{i} ” e “ \hat{j} ” que estão respectivamente nas direções x e y . Com isso, qualquer vetor \vec{A} pode ser colocado como $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$, onde A_x é o número de vezes que o vetor unitário “ \hat{i} ” entra na componente “ x ” de \vec{A} e o mesmo para A_y . Na figura 2.1 veja que decompor um vetor é o “inverso” de somar vetores, ou seja, podemos ver que somando dois vetores $A_x\hat{i}$ e $A_y\hat{j}$ obtemos o vetor \vec{A} .

Figura 2.1: Os vetores e os eixos coordenados com seus vetores unitários.



Fonte: O autor.

Roteiro para vetores:

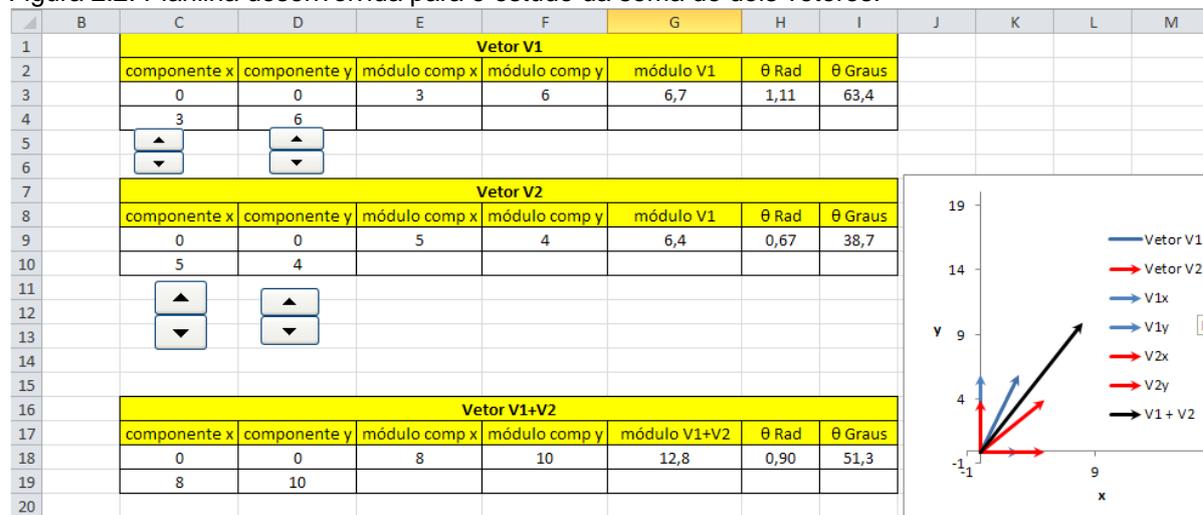
- Como visto no capítulo Tópicos, construa um vetor V_1 e coloque ele em um gráfico;
- Decomponha V_1 nos eixos coordenados e mostre os vetores correspondentes no gráfico;
- Crie botões para controlar as componentes do vetor V_1 ;
- Numa célula calcule o módulo e em outra a direção do vetor.
- Construa outro vetor V_2 e coloque ele no mesmo gráfico;
- Decomponha V_2 nos eixos coordenados e mostre os vetores correspondentes no gráfico;
- Crie botões para controlar as componentes do vetor V_2 ;
- Construa o vetor soma $V_1 + V_2$, e numa célula calcule seu módulo e em outra a sua direção.

- Podemos agora numa outra planilha, calcular o produto escalar de dois vetores.
- Observe o que acontece com o vetor resultante do produto escalar à medida que variamos as componentes dos dois vetores.
- Calcule nessa planilha ainda o produto vetorial entre V_1 e V_2 .
- Faça um gráfico com os dois vetores e adicione um segmento de reta cruzando os quadrantes 1 e 3 passando pela origem, “formate” o segmento com uma linha pontilhada e com uma seta na origem do segmento para representar o eixo z.
- Coloque no gráfico o vetor resultante do produto $V_1 \times V_2$ sobre o eixo z do gráfico.

Estas planilhas então possibilitarão variar as componentes dos vetores e visualizar o que ocorre com todos os vetores envolvidos nas operações com vetores.

Nesse exemplo será necessário fixar os valores máximos dos eixos do gráfico para poder visualizar o efeito de alterarmos as componentes do vetor. O resultado final da soma é ilustrado na figura 2.2 e do produto vetorial na figura 2.3.

Figura 2.2: Planilha desenvolvida para o estudo da soma de dois vetores.

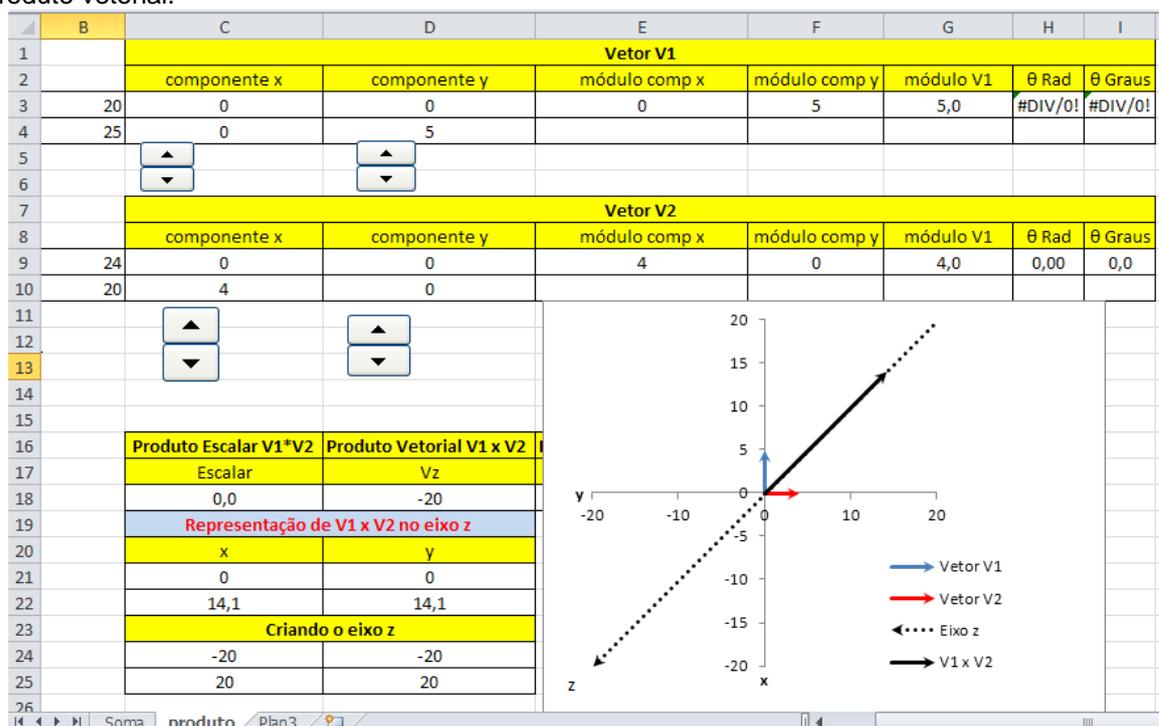


Fonte: O autor.

Note que para conseguirmos gerar números negativos com um botão, temos que usar outra célula vinculada a célula que o botão atua, ou seja, no exemplo da figura 2.3 usamos a célula B3 para atuação do botão que controla a variável “x” e a célula C4 para a operação $C4 = B3 - 20$. Assim, ao acionar o botão de controle de “x” teremos os valores -20,-19,-18...,0,1,2,3... na célula C4.

Uma estratégia para a utilização da planilha é zerar a componente x do vetor azul e a componente y do vetor vermelho, então variar as componentes que sobraram uma por vez, veremos que as componentes são a projeção, como a sombra, do vetor que é a soma delas.

Figura 2.3: Planilha desenvolvida para o estudo dos produtos entre dois vetores, produto escalar e produto vetorial.



Fonte: O autor.

Dicas para a utilização da planilha da figura 2.3:

Com os vetores apresentados na figura 2.3 podemos variar a componente x do vetor 1 (azul no gráfico) e perceberemos que o produto vetorial não é alterado (célula D18), assim como a componente y do vetor 2 também não altera o produto vetorial! Mas, essas mudanças alteram o produto escalar (célula C18) dos dois vetores. No entanto mudanças nas outras componentes alteram o produto vetorial e não alteram o produto escalar! Uma boa oportunidade para pensar nas projeções dos vetores no eixo x e no eixo y.

2.3 PARA O ESTUDO DA MECÂNICA É IMPORTANTE PENSAR EM: O QUE SIGNIFICA RESOLVER A SEGUNDA LEI DE NEWTON?

Muitas vezes encontramos a solução para a equação diferencial que rege o movimento de uma partícula clássica, ou seja, a Segunda Lei de Newton da mecânica,

mas o que estamos fazendo ao encontrar essa solução? Podemos escrever essa lei como na equação (2.1), onde a força \vec{F} é igual a variação do vetor “quantidade de movimento” \vec{p} no tempo.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.1)$$

Para o caso unidimensional de uma partícula com massa constante se deslocado na direção “x” a equação (2.1) é escrita como:

$$\vec{F} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \hat{i}. \quad (2.2)$$

Usemos agora o exemplo da Lei de Hooke onde uma massa “m” oscila presa a uma mola de constante de mola “k”, ou seja, uma força restauradora, contrária ao sentido de deformação da mola, que quer devolver a massa a sua posição de equilíbrio e é dada pela equação (3):

$$\vec{F} = -k\vec{x}, \quad (2.3)$$

onde \vec{x} é o vetor deslocamento da extremidade livre da mola a partir da posição de repouso (elongação da mola).

Aplicando a Segunda Lei de Newton temos,

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t). \quad (2.4)$$

Geralmente, nos primeiros cursos de mecânica, somos orientados a pensar na solução desta equação com a ajuda de uma pergunta: Qual é a função $x(t)$ que derivada duas vezes no tempo resulta nela mesma multiplicada por uma constante negativa? E a resposta é $\sin(\omega t)$! No entanto, podemos explicitar a derivada segunda em termos de um limite quando $\Delta t \rightarrow 0$, ou seja,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x(t + 2\Delta t) - 2x(t + \Delta t) + x(t)]}{\Delta t^2}. \quad (2.5)$$

A Segunda Lei de Newton fica então,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x(t + 2\Delta t) - 2x(t + \Delta t) + x(t)]}{\Delta t^2} = -\frac{k}{m}x(t). \quad (2.6)$$

E agora podemos ver claramente que a solução da equação (2.6) $x(t)$ é uma função do tempo tal que ela no instante de tempo $t + 2\Delta t$ subtraída de duas vezes ela mesma no instante de tempo $t + \Delta t$ e somada com ela mesma no instante de tempo t , quando $\Delta t \rightarrow 0$ resulta na própria função $x(t)$ multiplicada pela constante $-\frac{k}{m}$.

Podemos testar esse raciocínio usando uma planilha para realizar a operação descrita no lado esquerdo da equação (2.6) e comparar com a solução da equação (2.4) (lado direito) dada pela equação (2.7),

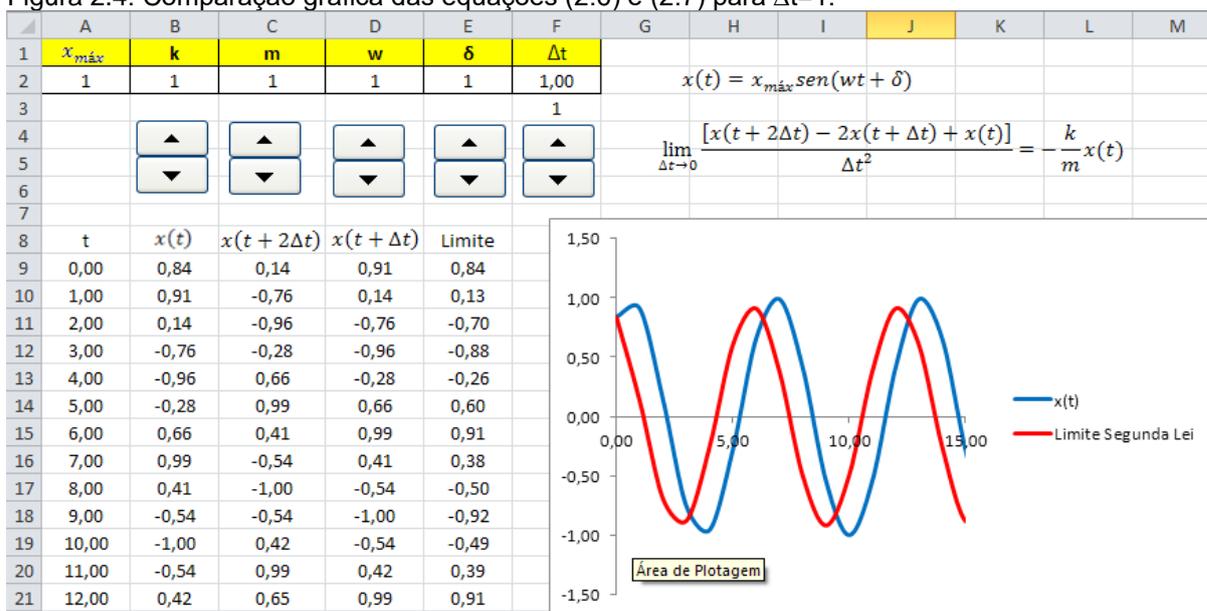
$$x(t) = x_{m\acute{a}x} \text{sen}(wt + \delta), \quad (2.7)$$

onde $x_{m\acute{a}x}$ é a elongação máxima da mola, $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ controla a frequência do movimento e δ a constante de fase (em que posição a massa está no tempo $t = 0$).

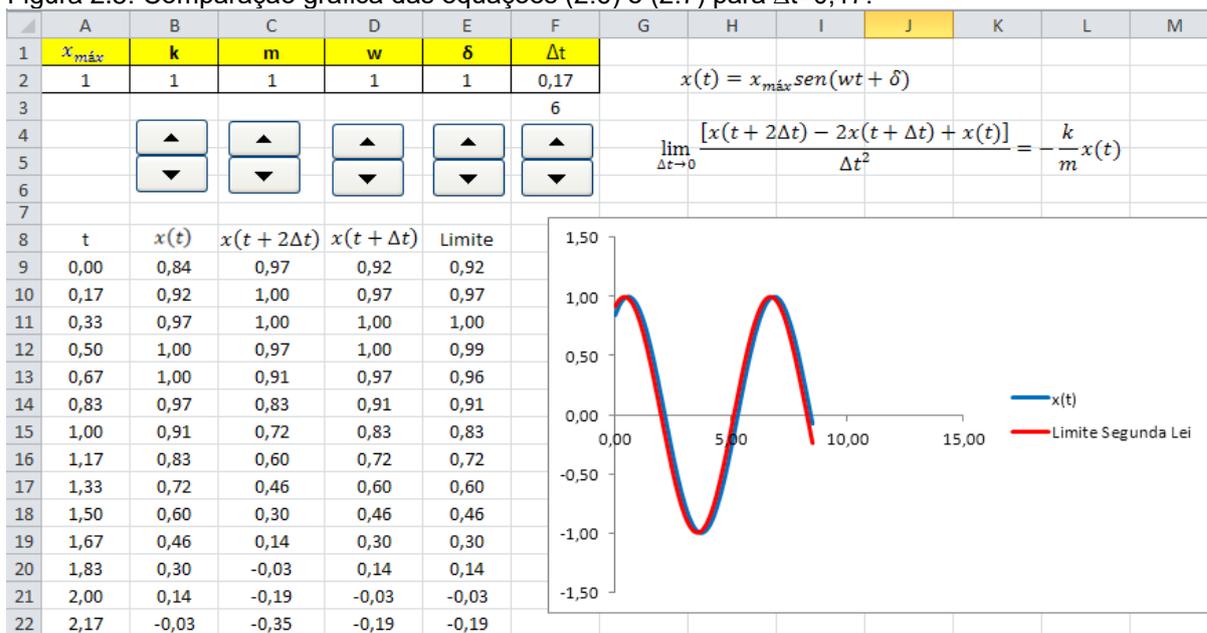
Roteiro para a planilha

- Temos cinco constantes nessa tarefa, $x_{m\acute{a}x}$, k , m , w e δ , então devemos usar cinco células para “guarda-las” e botões para variá-las (exceto w que varia com k e m).
- Temos que fazer um gráfico para representar a equação (2.7), então temos que criar uma coluna para os vários instantes de tempo, o intervalo de tempo Δt entre um instante e outro estará numa célula controlada por um botão com variação decimal, pois queremos controlar o tamanho de Δt e fazer o limite dele indo para zero. Na construção da coluna de tempo temos que travar a célula que controla Δt usando o símbolo “\$”, ou seja, se o valor de Δt fica na célula F2 então, como na figura 4, A10 = A9 + F\$2, A11 = A10 + F\$2, etc .
- Restam 4 colunas a serem criadas para $x(t)$, $x(t + \Delta t)$, $x(t + 2\Delta t)$ e outra para o cálculo do limite da equação (2.6) (veja que o valor do limite deve ser multiplicado por $-\frac{m}{k}$). Usaremos a equação (2.7) para calcular os valores de $x(t)$, $x(t + \Delta t)$, $x(t + 2\Delta t)$.
- Agora temos que construir o gráfico das colunas $x(t)$ e do cálculo do limite dado por pela equação (2.6) e variar Δt para comparar uma curva com a outra.

O resultado final é mostrado nas figuras 2.4 e 2.5.

Figura 2.4: Comparação gráfica das equações (2.6) e (2.7) para $\Delta t=1$.

Fonte: O autor.

Figura 2.5: Comparação gráfica das equações (2.6) e (2.7) para $\Delta t=0,17$.

Fonte: O autor.

2.4 MOVIMENTO BIDIMENSIONAL, LANÇAMENTO OBLÍQUO E TRAJETÓRIA

Nesse exemplo optamos por observar o comportamento dinâmico do corpo de massa m , ou seja, a posição da massa será mostrada no gráfico para cada instante de tempo escolhido pelo botão do “tempo”, mas são mantidos os pontos já passados, ou seja, mantida a trajetória passada ou o rastro.

Uma outra aplicação da Segunda Lei de Newton é o caso de um lançamento oblíquo considerando, por exemplo, o atrito com o ar, caso com amortecimento. Veremos que neste caso as equações do movimento da massa m dependem do valor da massa. Podemos escolher a força resistiva como proporcional a velocidade, equação (2.8), uma força que faz com que o corpo atinja uma velocidade terminal constante, ou seja, a medida que a velocidade do corpo aumenta, aumenta a força resistiva até que esta se iguale a força peso e a partir daí a força resultante sobre o corpo e, portanto, sua aceleração, são nulas.

$$\vec{F} = -b\vec{v}. \quad (2.8)$$

onde b é uma constante e \vec{v} é o vetor velocidade da massa m .

Então aplicando a segunda lei no caso de uma massa m sob a ação da aceleração da gravidade g , obtemos para as direções x e y :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt}, \quad (2.9)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg - b \frac{dy}{dt}. \quad (2.10)$$

Cujas soluções para as velocidades e posições são:

$$v_x(t) = v_{x0} e^{-\frac{bt}{m}}, \quad (2.11)$$

$$x(t) = x_0 + \frac{mv_{x0}}{b} (1 - e^{-\frac{bt}{m}}), \quad (2.12)$$

$$v_y(t) = \left[v_{y0} + \frac{mg}{b} \right] e^{-\frac{bt}{m}} - \frac{mg}{b}, \quad (2.13)$$

$$y(t) = y_0 + \left[\frac{m^2 g}{b^2} + \frac{mv_{y0}}{b} \right] \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}} \right) - \frac{mg}{b} t, \quad (2.14)$$

onde v_{x0} e v_{y0} são as velocidades na direção x e y respectivamente no instante inicial $t = 0$, x_0 e y_0 são as posições no eixo x e y respectivamente no instante inicial $t = 0$.

Agora podemos implementar uma planilha para simular estas equações, mostrando as duas trajetórias da massa m , uma com atrito e outra sem atrito.

É possível eliminar a variável tempo nas equações para $x(t)$ e $y(t)$ e obter $y(x)$.

Roteiro

- Temos sete constantes a considerar e que podemos querer variar, as inserimos como na figura 2.6:

Figura 2.6: Inserindo as constantes do problema e seus respectivos botões na planilha.

m	b	x_0	y_0	v_{x0}	v_{y0}	g
0,1	0,02	0	0	1	5	3
▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲
▼	▼	▼	▼	▼	▼	▼

Fonte: O autor.

- Podemos fazer um comparativo das equações do movimento com e sem amortecimento, além de $x(t)$ e $y(t)$ calculamos as componentes da velocidade da massa m , como indicado na figura 2.7. O botão nessa figura 2.7 faz variar o “tempo”, lembrando que temos que usar células auxiliares para o incremento ser decimal ao acionar o botão, por exemplo, se o botão incrementa a célula A4 usamos para a célula onde está o valor do tempo $A3 = 0,1 * A4$. Estes valores de posição serão usados no gráfico das trajetórias com rastro para marcar a posição das massas no instante de tempo dado pelo botão que varia o tempo.

Figura 2.7: Planilha com o cálculo das posições e velocidades em função do tempo.

t	b # 0				b = 0			
	$x(t)$	$y(t)$	$v_x(t)$	$v_y(t)$	$x(t)$	$y(t)$	$v_x(t)$	$v_y(t)$
1,3	1,1	3,4	0,8	0,4	1,3	4,0	1	1,1
13								
▲								
▼								

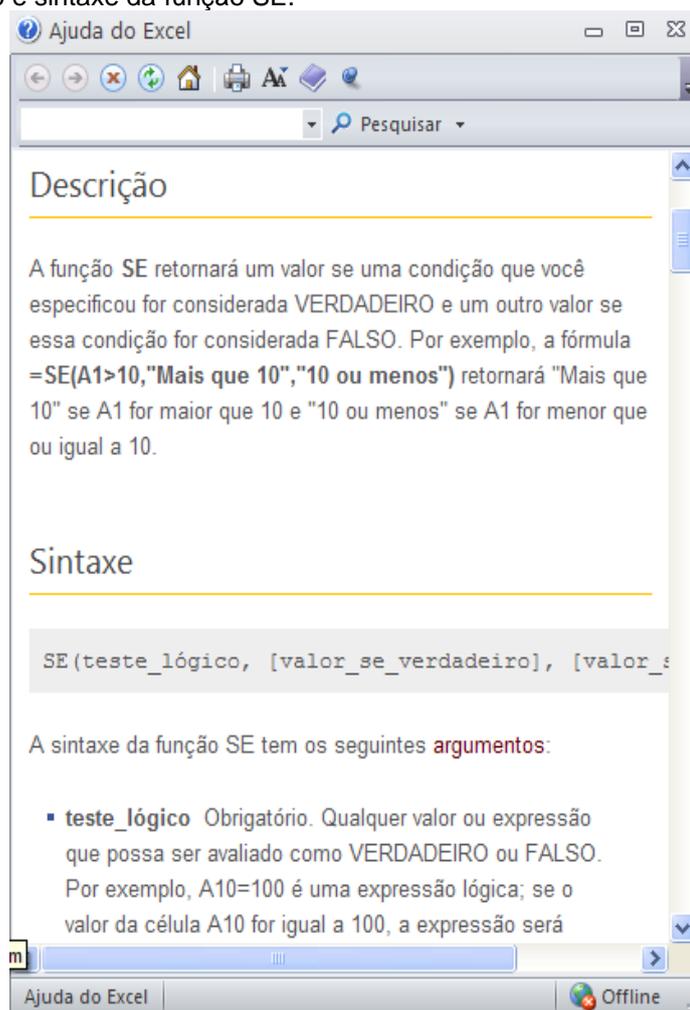
Fonte: O autor.

- Agora podemos construir o gráfico com as coordenadas da massa m com amortecimento ($b \neq 0$) e sem amortecimento ($b=0$), mas podemos tornar o gráfico mais atraente ao incorporar nele mais informação sobre as duas trajetórias, ou seja, mostrar as trajetórias ao passo que a massa se desloca deixando um rastro. Para isso usaremos um truque, calcularemos as posições $x(t)$ e $y(t)$ para uns 100 instantes de tempo para ambos os casos de amortecimento e usaremos a função SE, descrita mais adiante, para mostrar no gráfico todas as posições $x(t)$ e $y(t)$ que antecedem o valor do instante de tempo que o botão que varia o tempo escolhe. Por exemplo, se o instante escolhido pelo botão é $t = 5$ então todos os valores de $x(t)$ e $y(t)$ para $t < 6$

serão os calculados pelas equações (2.12) e (2.14) aparecendo no gráfico, os valores de posição para valores maiores de tempo serão zerados pela função SE. Ao clicar no botão mais uma vez os valores de posição para $t = 6$ serão acrescentados no gráfico.

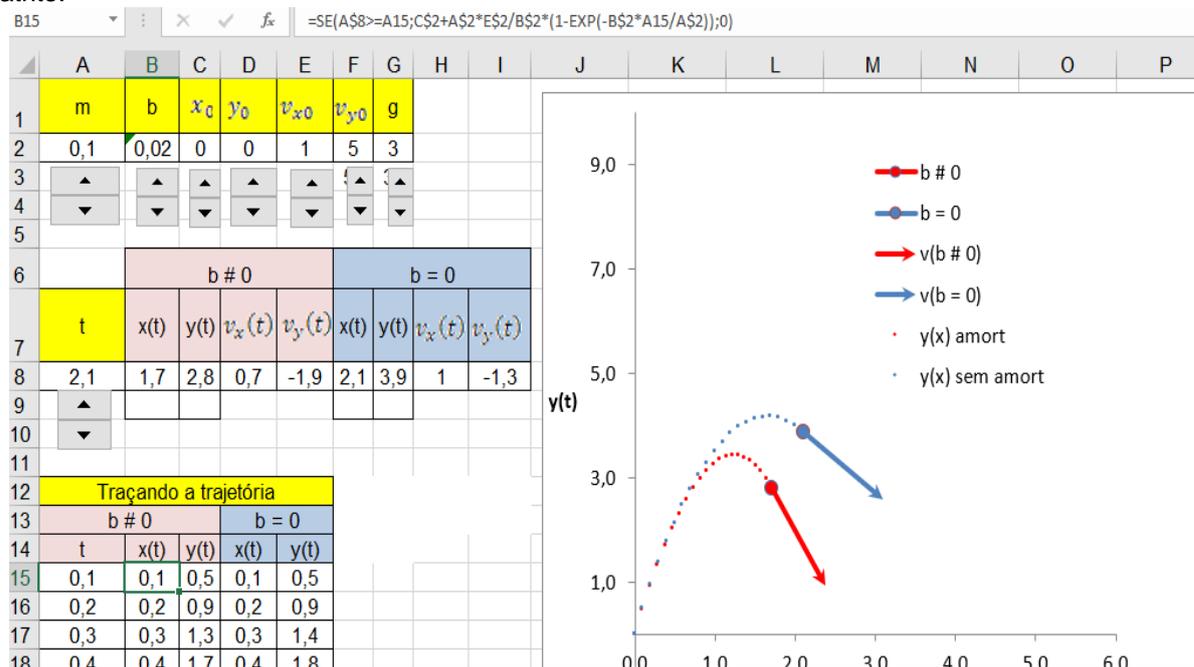
Temos então os pontos das duas trajetórias em cinco (5) colunas, uma para todos os tempos t , outras duas para $x(t)$ e $y(t)$ com $b \neq 0$ e outras duas para $x(t)$ e $y(t)$ com $b = 0$. Nestas colunas então usaremos a função “SE” (descrição e sintaxe na figura 2.8), o teste na coluna de $x(t)$, por exemplo, como na célula B15 é mostrado na área de função a operação como: `=SE(A$8>=A15;C$2+A$2*E$2/B$2*(1-EXP(-B$2*A15/A$2));0)`, ou seja, SE o valor em A\$8 é maior ou igual ao valor em A15 a função SE retorna para a célula B15 o valor de `C$2+A$2*E$2/B$2*(1-EXP(-B$2*A15/A$2))` que é o cálculo da equação (3.12) para a posição $x(t)$, senão retorna o valor zero 0. O resultado da planilha está mostrado na figura 2.9

Figura 2.8: Descrição e sintaxe da função SE.



Fonte: O autor.

Figura 2.9: Planilha do movimento bidimensional com lançamento oblíquo e considerando força de atrito.



Fonte: O autor.

Dicas para utilização da planilha:

A descrição que usamos para esse problema traz uma dificuldade para o Excel ou qualquer outro programa, que é a divisão por zero, e ao fazer $b = 0$ o Excel acusa uma divisão por zero colocando #DIV/0! na célula em que isso ocorre. Para contornar isso recorreremos a função SE, por exemplo, para a posição $x(t)$ na célula B8 colocamos $SE(B2=0;C2+E2*A8;C2+A2*E2/B2*(1-EXP(-B2*A8/A2)))$, ou seja, se $b = 0$ então o cálculo na célula B8 será $C2+E2*A8$ que é $x(t) = x_0 + v_{x0}t$, onde expandimos a exponencial na equação 2.12. Então “corrigindo” $y(t)$, $v_x(t)$ e $v_y(t)$, para $b = 0$ a trajetória vermelha coincide com a azul. Além disso, para $b \neq 0$ podemos examinar o tempo para a atingir o ponto mais alto da trajetória, o maior alcance horizontal e vertical.

2.5 MHS AMORTECIDO

Podemos aproveitar a seção anterior para explorar o caso da massa m estar presa a uma mola e oscilar na direção x , ou seja, sem levarmos em conta a força peso explicitamente, ela estará embutida na própria força de atrito. A segunda Lei de Newton nesse caso é semelhante à equação (2.10) onde trocamos a força peso pela força da mola sobre a massa, ou seja, a Lei de Hooke onde a força restauradora é proporcional à elongação da mola.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}. \quad (2.15)$$

A solução da equação (4.1) é dada por,

$$x(t) = x_{max} e^{-\frac{bt}{m}} \cos(w't + \delta), \quad (2.16)$$

Onde x_{max} é a amplitude do movimento e a frequência w' é dada pela equação (2.17)

onde observamos que $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência do movimento sem amortecimento:

$$w' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (2.17)$$

A velocidade da massa é dada por:

$$v(t) = -x_{max} \left[\frac{b}{m} \cos(w't + \delta) + w' \sin(w't + \delta) \right] e^{-\frac{bt}{m}}. \quad (2.18)$$

Roteiro da planilha do MHS amortecido

- Temos quatro constantes, k , m , b , δ , que podemos querer variar e precisamos de quatro botões para elas. Podemos incluir nessa parte w_0 e w' , já que também são constantes apesar de serem calculadas e não dados de entrada, como representado na figura 2.10.

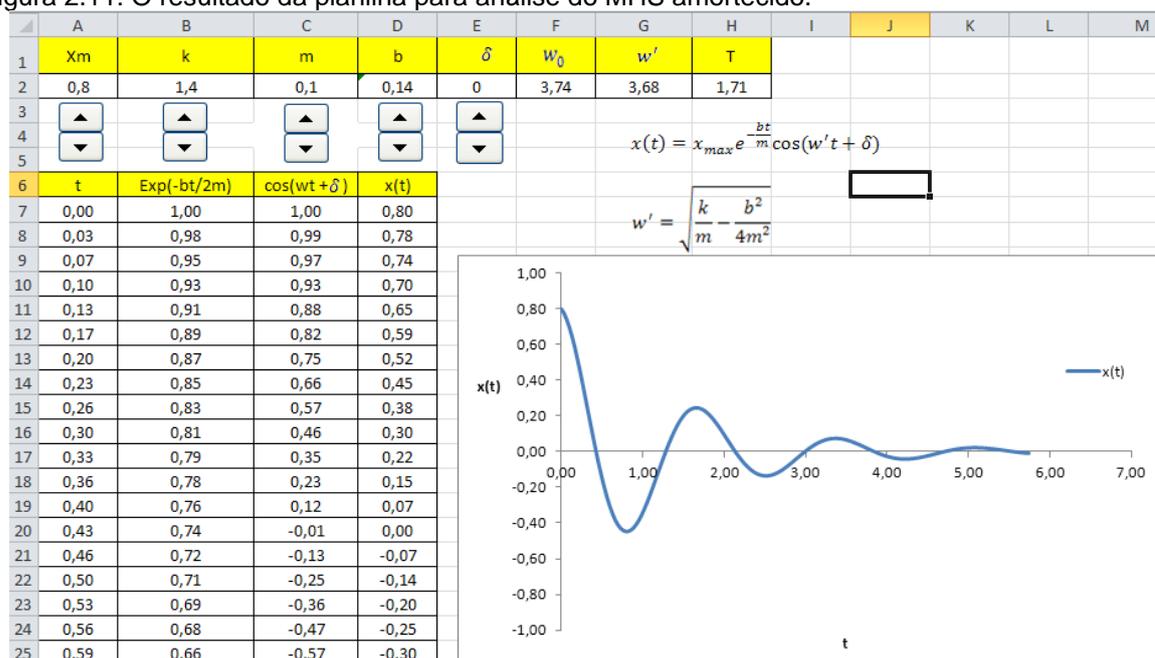
Figura 2.10: Constantes a serem usadas no MHS no caso amortecido e seus respectivos botões

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Xm	k	m	b	δ	w_0	w'	T
2	0,8	1,4	0,1	0,14	0	3,74	3,68	1,71
3	▲	▲	▲	▲	▲			
4	▼	▼	▼	▼	▼			
5								

Fonte: O autor.

- Resta agora o cálculo de $x(t)$, para isso podemos usar quatro colunas dos termos envolvidos na equação (4.2), o resultado final da planilha é mostrado na figura 2.11:

Figura 2.11: O resultado da planilha para análise do MHS amortecido.



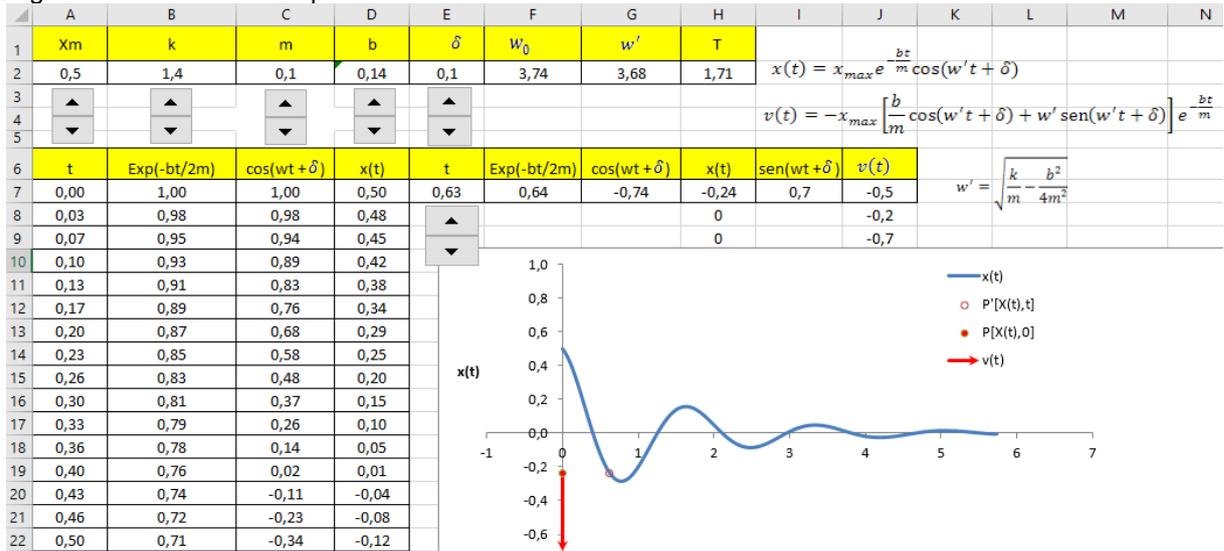
Fonte: O autor.

Dicas para a utilização da planilha:

Com os botões fica evidente a influência das constantes k , m , b , ou seja, ao aumentar a constante da mola aumentamos a força de restauração da mola e o movimento tem uma frequência maior, ao aumentar a massa presa a mola acontece o contrário, pois aumentamos a resistência ao movimento, mas ao aumentar b a força de atrito aumenta e a amplitude do movimento diminui e sua frequência se altera muito pouco.

- Podemos acrescentar o comportamento dinâmico da massa m a esse gráfico, para isso, temos que inserir o tempo variável por um botão e calcular $x(t)$ para esse instante de tempo, a velocidade dada pela equação (2.18) também pode ser colocada como um vetor. Geralmente há uma grande confusão na análise de gráficos de posição em função do tempo, onde imaginamos que o corpo segue a trajetória da curva mostrada. Podemos aproveitar esse exemplo para esclarecer o problema e mostrar a relação do movimento da massa no eixo x e sua imagem ao longo da curva $x(t)$. Para representar a trajetória do corpo usamos um ponto $P(x(t), 0)$, ou seja, se deslocando no próprio eixo vertical, e outro ponto $P'(x(t), t)$ que será a imagem de $P(x(t), 0)$ e se deslocará sobre a curva $x(t)$. Assim, podemos visualizar a relação entre a posição da massa m sobre sua trajetória e a posição de sua imagem em relação ao tempo. O resultado final desta planilha é mostrado na figura 2.12.

Figura 2.12: Planilha completa do MHS amortecido.

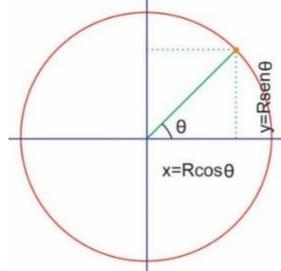


Fonte: O autor.

2.6 MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

Podemos usar a figura 2.13 para analisar o MCU onde a circunferência vermelha representa a trajetória da massa m (círculo azul), R é o raio da circunferência.

Figura 2.13: Esquema para analisar o Movimento Circular Uniforme.



Fonte: O autor.

O movimento é uniforme então a velocidade angular w é constante no tempo e é definida como:

$$w \equiv \frac{d\theta}{dt}. \tag{2.19}$$

Podemos escrever também,

$$\theta = wt + \delta, \tag{2.20}$$

onde θ é o ângulo entre o raio $R(t)$ da circunferência no tempo t e o eixo x , e δ é uma constante de fase.

Da figura 2.13 percebemos que as coordenadas da massa m são dadas pelas equações (2.21) e (2.22).

$$x(t) = R \cos(\omega t + \delta), \quad (2.21)$$

$$y(t) = R \sin(\omega t + \delta). \quad (2.22)$$

As componentes da velocidade são obtidas pelas derivadas,

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -R\omega \cdot \sin(\omega t + \delta), \quad (2.23)$$

e

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = R\omega \cdot \cos(\omega t + \delta), \quad (2.24)$$

A velocidade tem módulo então $v = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} = R\omega$.

Do mesmo modo as componentes da aceleração:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -R\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \delta), \quad (2.25)$$

e

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -R\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \delta). \quad (2.26)$$

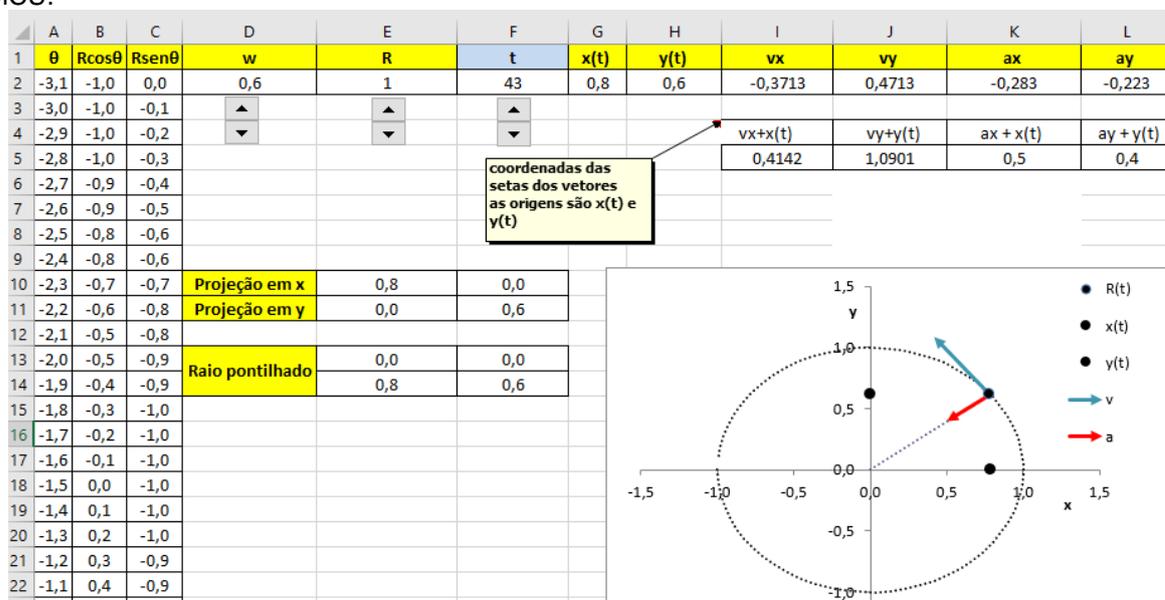
Com módulo $a = R\omega^2$ ou $a = \frac{v^2}{R}$.

Roteiro para a planilha

- Inicialmente para referência construiremos a circunferência que será a trajetória da massa m , isso pode ser feito usando três colunas, uma para varrer o ângulo θ de $-\pi$ a π e outras duas para calcular a projeção do raio R nas direções x e y , ou seja, $x = R \cos \theta$ e $y = R \sin \theta$. Assim temos as coordenadas x e y dos pontos sobre a circunferência.
- Temos ainda duas constantes para controlar via botões, ω e R , além do tempo t que se pretende variar via botão.
- Agora falta calcular $x(t), y(t), v_x(t), v_y(t), a_x(t)$ e $a_y(t)$ com as equações anteriores.

- Vale observar que para inserirmos os vetores no gráfico vamos precisar deslocá-los para a posição da massa, então a origem dos vetores será a posição da massa e a extremidade (seta) será dada pelas somas $v_x(t) + x(t)$, $v_y(t) + y(t)$, $a_x(t) + x(t)$ e $a_y(t) + y(t)$.
- Podemos querer analisar o movimento da massa nas direções x e y , ou seja, as projeções do movimento. Então criamos dois pontos que se deslocam pelos eixos x e y com coordenadas $(x(t), 0)$ e outro com $(0, y(t))$.
- É interessante mostrar no gráfico o deslocamento do raio $R(t)$ e escolhemos uma linha pontilhada entre a massa e a origem do gráfico. O resultado final é mostrado na figura 2.14.

Figura 2.14: Planilha mostrando a velocidade, aceleração, e projeções da posição da massa para o MCU.



Fonte: O autor.

2.7 CAMPO GRAVITACIONAL

Outro exemplo de aplicação da Segunda Lei de Newton é o da força gravitacional, a expressão que vamos usar para esta força é a seguinte:

$$v\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}, \quad (2.27)$$

onde \vec{F}_{12} é o vetor força gravitacional que a massa m_1 faz sobre a massa m_2 , r_{12} é a distância entre a massa m_1 e a massa m_2 e \hat{r}_{12} é o vetor unitário que aponta da massa

m_1 para a massa m_2 . O sinal negativo na equação (2.27) diz que o sentido do vetor força é o inverso de \hat{r}_{12} ou seja, aponta de m_2 para m_1 mostrando que a força é atrativa. A Força que a massa m_2 faz na massa m_1 é igual a $-\vec{F}_{12}$. Podemos pensar na força gravitacional \vec{F}_{12} como sendo devida a um campo gravitacional \vec{G}_1 , gerado pela massa m_1 e agindo na massa m_2 , a expressão para a força nesses termos fica,

$$\vec{F}_{12} = \vec{G}_1 m_2, \quad (2.28)$$

onde,

$$\vec{G}_1 = -G \frac{m_1}{r^2} \hat{r}, \quad (2.29)$$

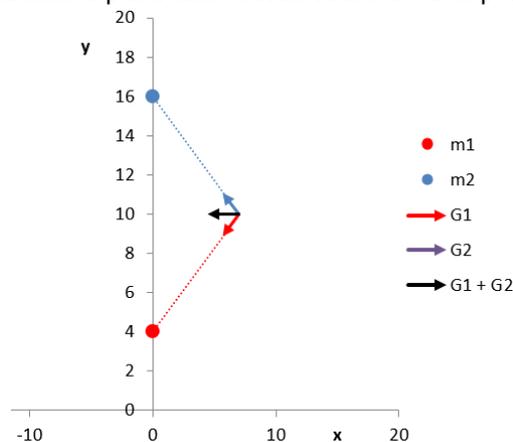
e o significado de \hat{r} agora é o de um vetor unitário que aponta da massa m_1 para um ponto localizado a uma distância r da massa. Se nesse ponto for colocada uma massa m_2 , a força que agirá sobre m_2 devido a presença da massa m_1 será dada pela equação (2.28).

Vamos ver agora alguns exemplos de planilhas para esta força.

Massas fixas e seus campos gravitacionais num ponto móvel:

- Temos que ter botões para as constantes m_1 , m_2 , e para variar a posição do ponto P onde vamos analisar os vetores do campo gravitacional. Nesse exemplo vamos usar a constante gravitacional como igual a 1.
- A distância da massa m_1 até o ponto P no plano xy pode ser obtida a partir das posições da massa e do ponto, ou seja, $r = \sqrt{(x_P - x_{m1})^2 + (y_P - y_{m1})^2}$ como mostrado na figura 2.15.

Figura 2.15: Cálculo das distâncias a partir das coordenadas de dois pontos.



Fonte: O autor.

- A componente x do campo \vec{G}_1 também fica em função das posições, lembrando que o cosseno do ângulo nesse caso será,

$$\frac{(x_P - x_{m1})}{r} = \frac{(x_P - x_{m1})}{\sqrt{(x_P - x_{m1})^2 + (y_P - y_{m1})^2}} \quad (2.30)$$

Com isso o campo na direção x fica:

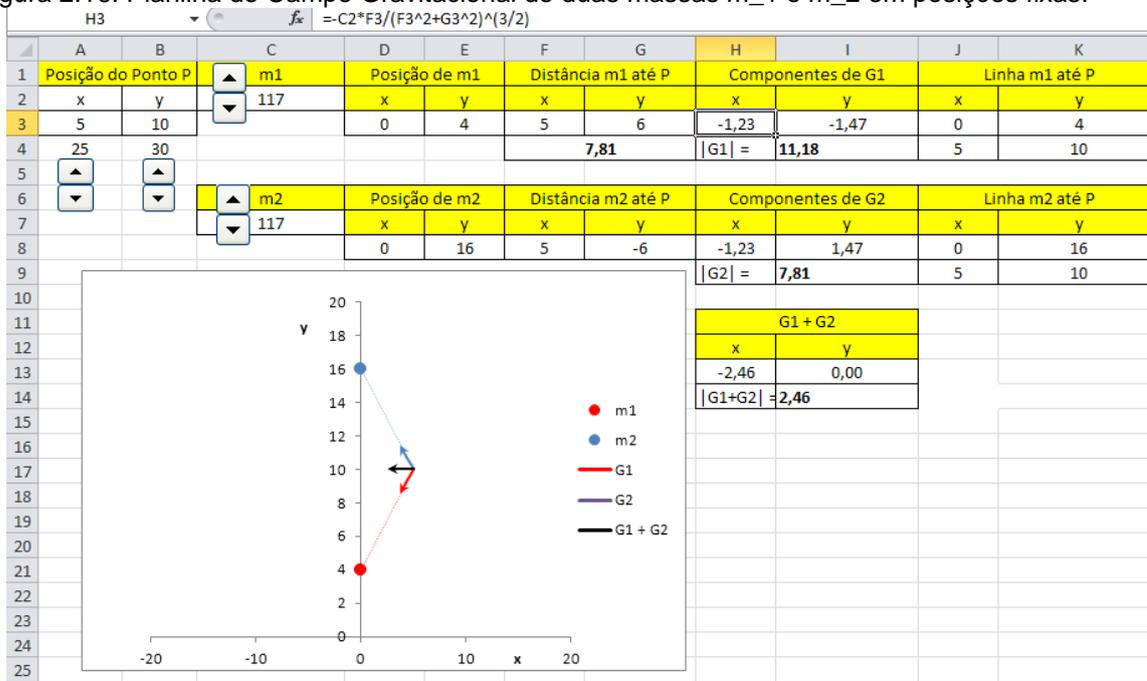
$$G_{1x} = -\frac{(x_P - x_{m1})}{[(x_P - x_{m1})^2 + (y_P - y_{m1})^2]^{3/2}} \quad (2.31)$$

E o mesmo raciocínio se aplica à componente y e também para a massa m_2 .

- Temos agora então que calcular o campo gravitacional resultante, ou seja, a soma $\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2$ tendo as componentes $G_x = G_{1x} + G_{2x}$ e $G_y = G_{1y} + G_{2y}$.
- É interessante calcular também o módulo desses vetores.
- Para que se perceba que a direção dos campos \vec{G}_1 e \vec{G}_2 está sobre a linha que une o ponto P e as massas, é interessante traçar essas linhas.

O resultado da planilha é mostrado na figura 2.16.

Figura 2.16: Planilha do Campo Gravital de duas massas m_1 e m_2 em posições fixas.



Fonte: O autor.

Dicas para a utilização da planilha:

Com os valores apresentados na figura 2.16 podemos variar a posição x do ponto onde o campo gravitacional é analisado, curioso é notar que o campo cresce

com o aumento de x até um certo ponto e a partir daí começa a diminuir! Até esse “certo ponto” temos então um campo que cresce com a distância até as massas, enquanto que estamos acostumados com o contrário. Esse é um bom momento para explorar a competição entre termos numa expressão matemática, ou seja, entre o cosseno do ângulo (2.30) e o quadrado da distância, ao nos afastarmos das massas o cosseno aumenta e a distância também, inicialmente o cosseno aumenta mais rápido que o quadrado da distância, mas o cosseno só pode aumentar até o valor 1, enquanto que a distância não tem limite.

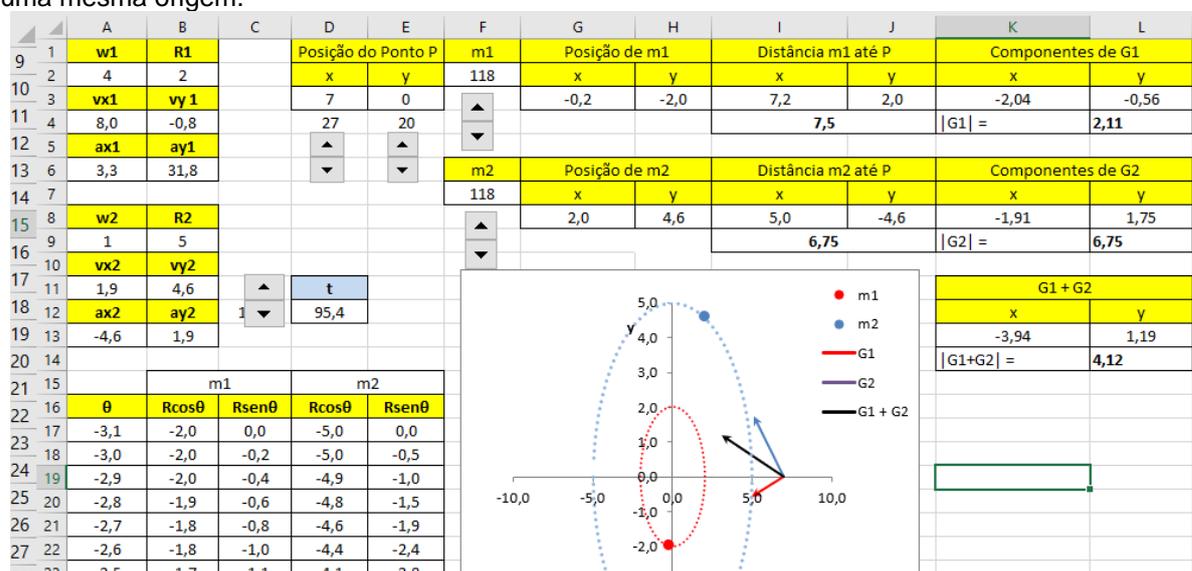
2.8. FORÇA GRAVITACIONAL E MCU.

Podemos agora analisar os campos em um ponto devido a uma massa que gira numa órbita circular, ou duas massas que giram em torno de um centro comum. Estamos pensando aqui que as velocidades são muito menores que a da luz e que podemos usar a expressão dada pela equação (2.27) para estes campos, também que as massas não interagem a ponto de interferir no movimento uma da outra.

- Na mesma planilha anterior copiamos da planilha do MCU a parte necessária para gerar as posições das massas, ou seja, as frequências w_1 e w_2 e os raios R_1 e R_2 , o tempo e seu botão também deve ser copiados.
- Podemos traçar as circunferências para cada raio.

O resultado é mostrado na figura 2.17.

Figura 2.17: Campos gravitacionais no plano de um sistema de duas massas que giram em torno de uma mesma origem.



Fonte: O autor.

2.9. ONDA CIRCULAR

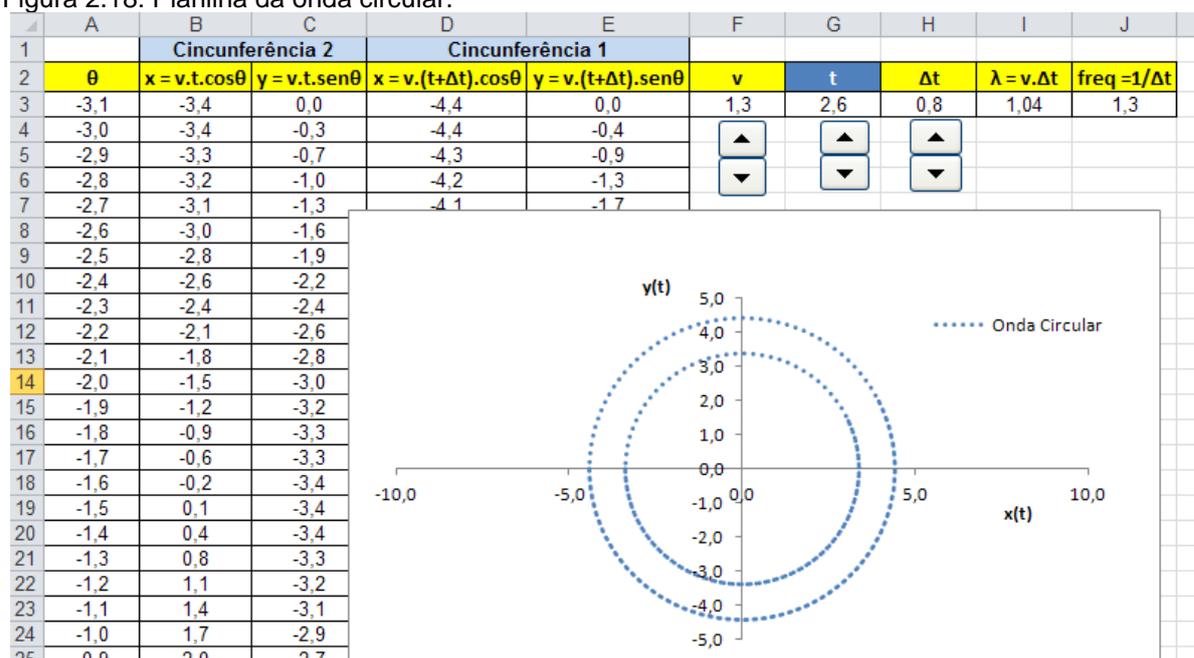
Vamos imaginar agora uma bola batendo na superfície da água numa piscina com uma frequência constante, a primeira perturbação na água se propaga em todas as direções com uma velocidade v . Dali a um intervalo de tempo Δt (período) outra perturbação da bola sobre a água é gerada e a distância de separação dessas duas perturbações (frentes de onda) é o comprimento de onda $\lambda = v\Delta t$. Se nos posicionarmos em um ponto fixo e contarmos quantas frentes de onda passam por ali por segundo, o número que resultará é a frequência que percebemos, ou seja, $f = 1/\Delta t$, ou, a cada Δt passa uma (1) frente de onda (ou um λ).

Caracterizamos a onda com λ , v , f e podemos agora construir a planilha para o estudo dessa onda.

- Precisamos criar pelo menos duas circunferências concêntricas, esta tarefa já foi realizada nas planilhas do MCU (seção 2.6) e da Força Gravitacional (seção 2.7). Mas agora o raio dessas circunferências deve variar com o tempo, ou seja, a primeira circunferência a ser criada tem o raio $R(t + \Delta t) = v(t + \Delta t)$ e a segunda $R(t) = vt$.
- Precisamos também de botões para variar as constantes v e Δt , outro para variar o tempo t . A frequência f , o comprimento de onda λ serão calculados.

O resultado da planilha está mostrado na figura 2.18.

Figura 2.18: Planilha da onda circular.



Fonte: O autor.

Dicas para a utilização da planilha:

Com o valor do tempo em zero começamos a clicar no botão que controla o tempo, a primeira frente de ondas circular vai evoluir e um comprimento de onda depois a segunda frente de ondas aparece, temos aí a visualização do que vem a ser o comprimento de onda. Poderíamos reforçar essa sensação colocando mais frentes de ondas.

2.10 ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS PROGRESSIVAS

Fisicamente as ondas planas seriam constituídas de frentes de onda com formato de um plano infinito, ou seja, um plano que se estende até o infinito e que carrega em todos os pontos desse plano um único valor de campo, por exemplo, elétrico. Os planos de igual valor de campo são separados um do outro pelo comprimento de onda. No caso das ondas eletromagnéticas temos que depois do plano com valores de campo nulo, crescem planos de valores de campos negativos, para esses casos conseguimos uma forma semelhante usando a função seno, ou a cosseno, em função da posição no espaço. Mas, para que a onda seja progressiva essa função também tem que depender do tempo, representamos o valor do campo num desses planos por $y(x, t)$. A onda se desloca para a direita no eixo x com o passar do tempo se usarmos:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t). \quad (2.32)$$

Ou para a esquerda se usarmos,

$$y(x, t) = A \sin(kx + \omega t). \quad (2.33)$$

Nessas equações A é a amplitude da onda, ou seja, como o maior valor do seno é um (± 1) , o maior valor de $y(x, t)$ é $\pm A$. O número de onda k é relacionado ao comprimento de onda por $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, ou seja, quantos comprimentos λ (quantas frentes de onda) cabem em 2π , x é a posição espacial onde a amplitude da onda está sendo avaliada no tempo t , ω é a frequência angular que se relaciona com a frequência f em Hertz por $\omega = 2\pi f$. Observe que $y(x, t)$ é a mesma para todos os valores das coordenadas y e z , ou seja, em todos os pontos do plano infinito que corta o eixo x o valor de $y(x, t)$ é o mesmo e é dado pelas equações (2.32) ou (2.33).

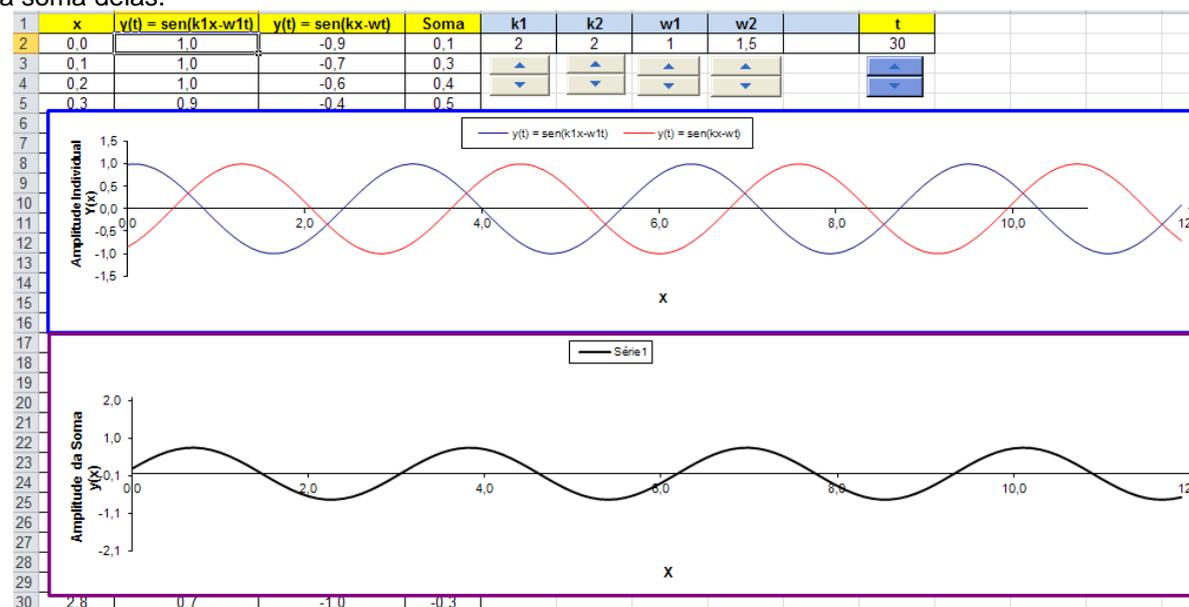
Podemos agora construir a planilha para duas ondas dessas ondas.

Temos as expressões $y_1(x, t) = \text{sen}(k_1x - w_1t)$ e $y_2(x, t) = \text{sen}(k_2x - w_2t)$ para traçar as curvas no gráfico, então temos que ter as constantes k_1 , w_1 , k_2 , w_2 , e seus respectivos botões. Como as funções são de x e de t temos que decidir qual iremos variar no gráfico, ou seja, teremos que construir duas planilhas.

2.10.1. Variando o tempo

- Criamos uma coluna varrendo x e calculamos respectivamente $y_1(x, t^*)$ e $y_2(x, t^*)$ para um único tempo que iremos variar com um botão. Então teremos um gráfico de $y(x, t^*)$ com os valores de posição x no eixo horizontal, onde t^* é um valor dado pelo botão de tempo. Veja que podemos fazer outro gráfico somando estas ondas ponto a ponto como na figura 2.19.

Figura 2.19: Planilha de ondas planas monocromáticas progressivas, em cima duas ondas e em baixo a soma delas.



Fonte: O autor.

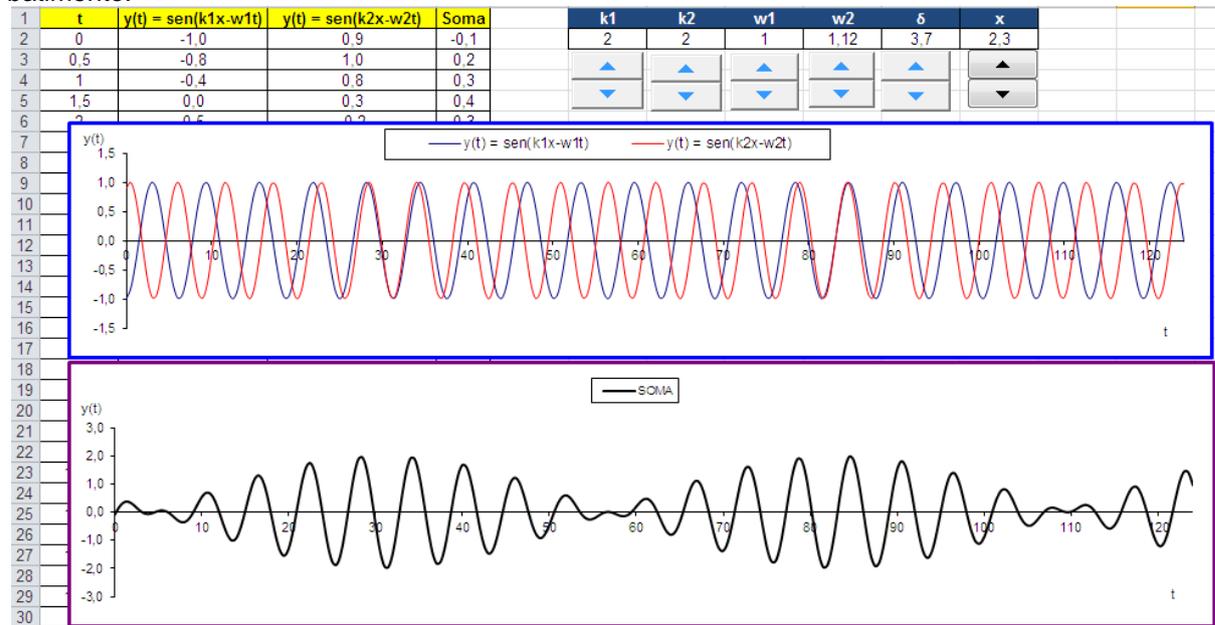
2.10.2. Variando a posição

- Criamos uma coluna varrendo o tempo t e calculamos respectivamente $y_1(x^*, t)$ e $y_2(x^*, t)$ para um único valor de x que iremos variar com um botão. Então teremos um gráfico de $y(x^*, t)$ com os valores de tempo t no eixo horizontal, onde x^* é um valor dado pelo botão de posição, ver figura 2.20.

Em ambos os casos é possível visualizar no graficamente o fenômeno de batimento, ou seja, ondas com frequências próximas e existindo na mesma região se

superpõem construtivamente em alguns pontos e em outros destrutivamente (como o som produzido por duas cordas de violão ligeiramente desafinadas).

Figura 2.20: Em cima duas ondas com frequências próximas, em baixo a soma delas evidenciando o batimento.



Fonte: O autor.

2.11 VELOCIDADE DE FASE

A velocidade com que um valor fixo de $y(x)$ se desloca com o tempo pode ser obtido fazendo $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = 0$. Tomando a derivada com relação ao tempo da expressão na equação (2.32) temos $\cos(kx - wt) = 0$, ou seja, a fase da onda $kx - wt$ pode assumir os valores $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ assim, a equação para a posição de um ponto que zera a derivada $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$ é dada pela equação (2.24),

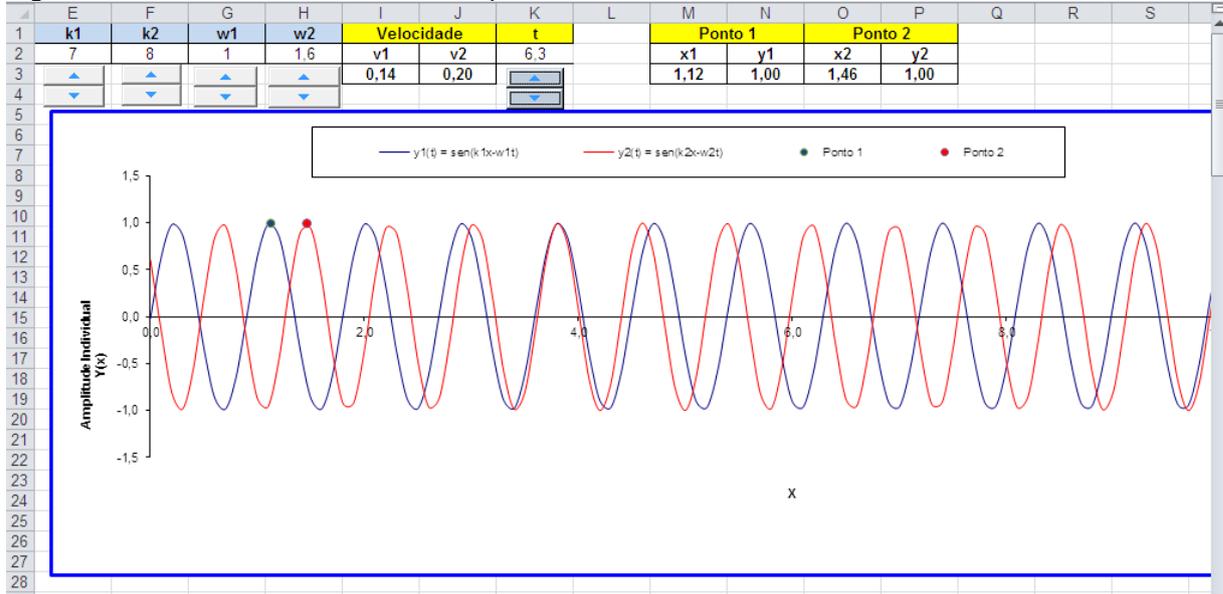
$$x = \frac{1}{k} \left(wt + \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \right). \tag{2.34}$$

Essa equação nos dá a posição de todos os pontos que estão na “crista” da onda. A velocidade com que estes pontos se deslocam no tempo é então dada por $v = \frac{dx}{dt} = \frac{w}{k}$.

Podemos aproveitar as planilhas anteriores para testar e visualizar este resultado, criamos um ponto para cada onda que se deslocam com velocidades $v_1 =$

$\frac{w_1}{k_1}$ e $v_2 = \frac{w_2}{k_2}$ e obedecem as equações $x_1 = w_1 t + \frac{\pi}{2}$ e $x_2 = w_2 t + \frac{\pi}{2}$. O resultado é mostrado na figura 2.21.

Figura 2.21: Pontos 1 e 2 testando as expressões de velocidades das ondas $v=w/k$



Fonte: O autor.

2.12 VELOCIDADE DE GRUPO

Agora queremos analisar a onda resultante da soma das duas ondas tratadas na seção 9.2. A condição que devemos analisar então muda um pouco, termos $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$ onde agora $Y(x, t) = \text{sen}(k_1 x - w_1 t) + \text{sen}(k_2 x - w_2 t)$. Como no caso anterior $k_1 \cos(k_1 x - w_1 t) + k_2 \cos(k_2 x - w_2 t) = 0$, mas agora considerando arbitrários k_1, k_2, w_1, w_2 a solução para qualquer posição x e qualquer tempo t exige que as fases anulem independentemente os cossenos, ou seja, $k_1 x - w_1 t = k_2 x - w_2 t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ e com isso $k_1 x - w_1 t = k_2 x - w_2 t$, obtemos então a equação (2.35) para a posição como função do tempo.

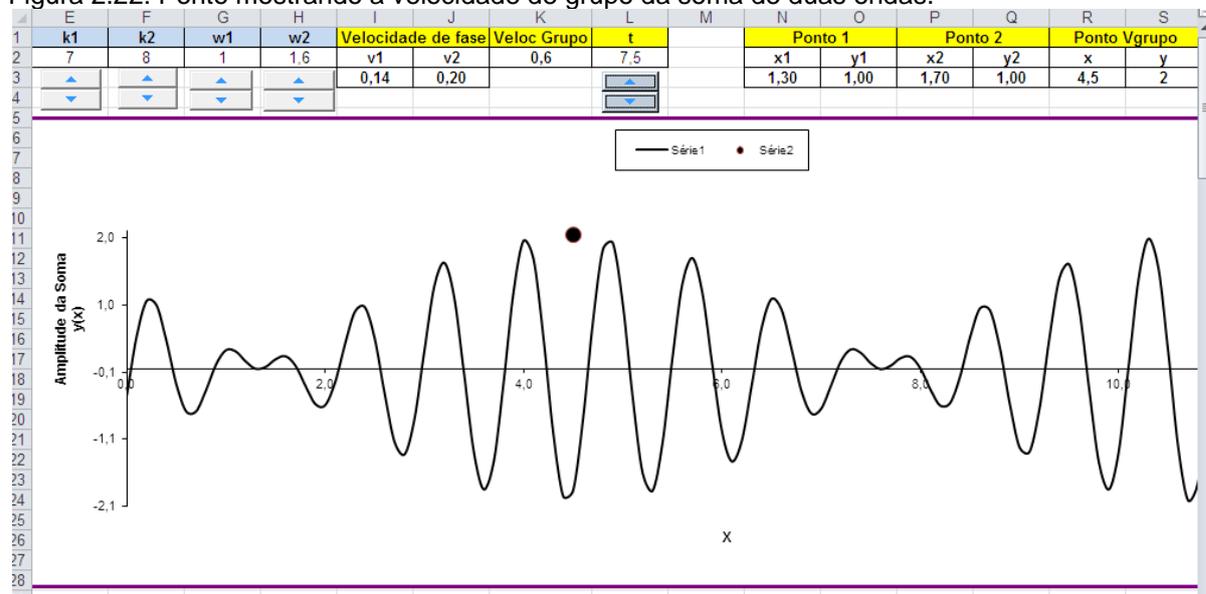
$$x = \frac{w_2 - w_1}{k_2 - k_1} t. \tag{2.35}$$

Com a velocidade de grupo então dada por,

$$v_g = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{w_2 - w_1}{k_2 - k_1}. \tag{2.18}$$

Como no caso anterior colocaremos um ponto se movendo com a velocidade de grupo dada pela equação (2.36) no gráfico da soma das duas ondas, a planilha construída é mostrada na figura 2.22.

Figura 2.22: Ponto mostrando a velocidade de grupo da soma de duas ondas.



Fonte: O autor.

Dicas de utilização da planilha:

Colocando a curva do gráfico da figura 2.22 no gráfico da figura 2.21 dá para perceber como e onde as ondas interferem construtivamente e destrutivamente com o passar do tempo. Também é interessante testar $k_1 \neq k_2$ e $k_1 = k_2$.

CAPÍTULO 3 – ÓTICA

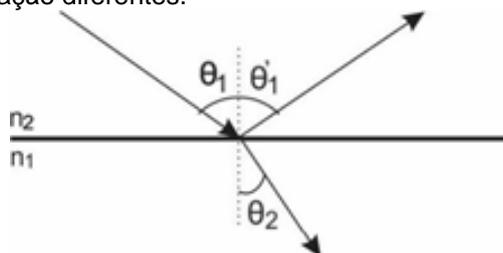
3.1 INTRODUÇÃO

O estudo da ótica, assim como a mecânica, também exige muita abstração, ainda mais quando a luz pode ser tratada como uma onda eletromagnética e em alguns casos como um raio ou feixe que se propaga em linha reta. No caso dos fenômenos de reflexão e de refração em interfaces que separam dois meios de índices de refração diferentes, podemos usar a luz como um feixe que se propaga em linha reta e que obedecem a lei de Snell. Nesses casos existem os ângulos nos quais os feixes interagem com a interface e que irão ajudar a definir matematicamente as retas pelas quais os feixes seguem. No caso dos fenômenos de interferência e difração teremos que tratar a luz como onda eletromagnética, podemos descrever essas ondas matematicamente de maneira simplificada e mesmo assim é exigido uma boa abstração do problema, pois essas ondas são formadas por vetores que representam os campos elétricos e magnéticos e que variam no tempo e no espaço. Então, como no capítulo de mecânica, o uso de botões e vetores nos ajudarão a visualizar algumas situações com tempo ou posição variáveis no estudo da ótica.

3.2 REFLEXÃO E REFRAÇÃO

A figura 3.1 nos ajuda a visualizar dois meios que refratam (desviam) a luz de maneiras distintas e por isso são rotulados com índices de refração n_1 e n_2 . Assim que um raio de luz partindo do meio com n_1 com velocidade v_1 incide sobre a superfície de separação com o segundo meio, de índice de refração n_2 onde a velocidade do feixe agora é v_2 , ele se separa em dois raios, um que é o raio refletido pela superfície e outro que é o raio refratado pela superfície. O raio refletido permanece no primeiro meio, sendo conduzido em um ângulo θ'_1 com a linha normal a superfície que é igual ao ângulo θ_1 do raio incidente. Mas, o raio refratado atravessa para o segundo meio e seu desvio da linha normal a superfície depende da razão entre os índices de refração e do ângulo de incidência.

Figura 3.1: Esquema dos raios de luz, incidente, refletido e refratado na superfície de separação entre dois meios de índices de refração diferentes.



Fonte: O autor.

A reflexão então é regida pela igualdade entre os ângulos de incidência e de reflexão, ou seja:

$$\theta_1' = \theta_1. \quad (3.1)$$

Por outro lado, a refração obedece a relação conhecida como Lei de Snell:

$$n_1 \text{sen} \theta_1 = n_2 \text{sen} \theta_2, \quad (3.2)$$

onde $n_1 = \frac{c}{v_1}$ e $n_2 = \frac{c}{v_2}$, c é a velocidade da luz no vácuo.

Com essas informações podemos agora construir a planilha para o estudo da reflexão e da refração.

Roteiro para a Reflexão e refração.

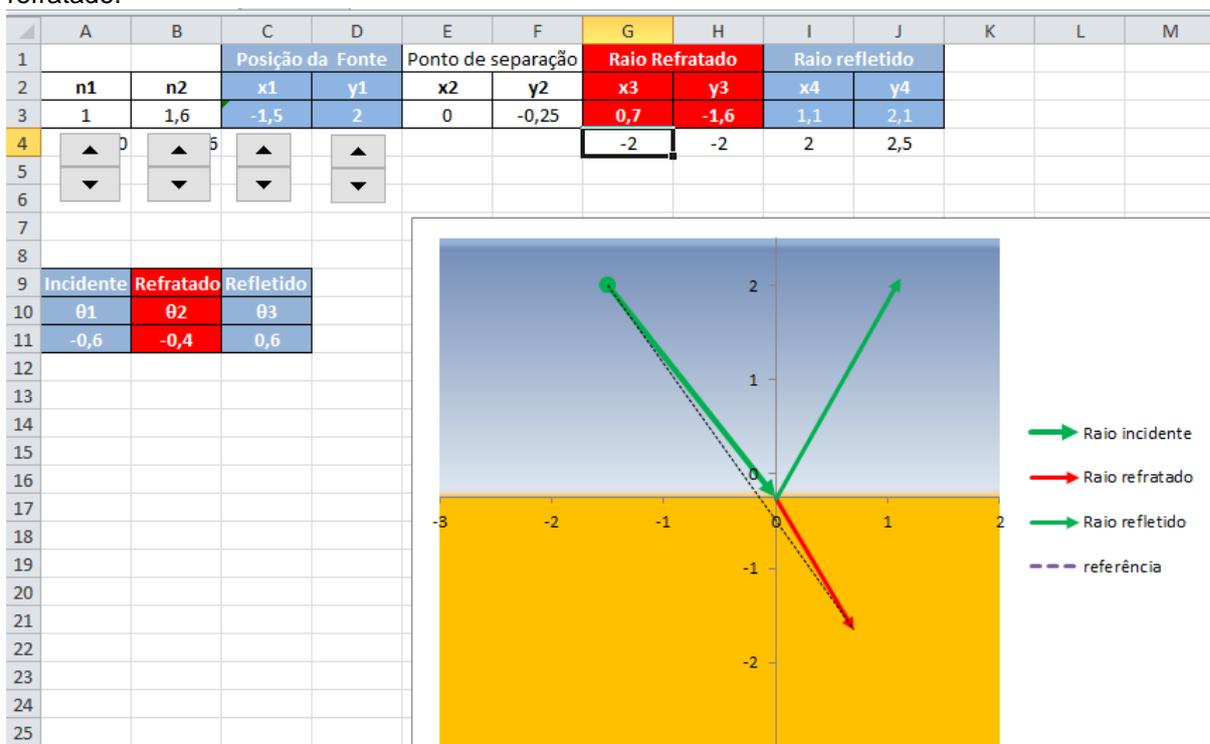
- Podemos usar três vetores para representar os raios de luz, com a intensão de lhes atribuir sentido e direção somente, o módulo é a distância da origem do vetor até um ponto de observação. Com isso necessitaremos controlar a posição de seis pontos, dois para cada vetor, ou seja, um para a extremidade inicial e outro para a extremidade final de cada um. Como três desses pontos estão no mesmo lugar, ou seja, onde o raio incidente toca a superfície de separação dos meios, precisaremos de somente quatro pontos, as três extremidades dos vetores e o ponto de separação (comum).
- Podemos desejar variar os índices de refração de cada meio e então serão necessários dois botões para isso. É interessante usar botões para variar o ângulo de incidência e podemos fazer isso variando a posição da extremidade inicial do vetor que representa o raio incidente.
- Para testar se os vetores estão respeitando as relações das pelas equações 3.1 e 3.2 podemos usar uma linha tracejada ligando a extremidade inicial do

raio incidente com a extremidade final do raio refratado, ou seja, quando $n_1 = n_2$ não deve haver desvio.

- Um recurso que podemos usar é o preenchimento gradiente de cores do gráfico, a parte de cima pode ficar com uma cor e a de baixo com outra.
- Devemos calcular os ângulos dos três raios com a linha normal a superfície de separação, por exemplo, na célula A11 para o ângulo de incidência temos a operação $\text{ATAN}((C3-E3)/(D3-F3))$.
- Os números que aparecem na quarta linha da planilha apresentada na figura 3.2 ajudam a escolher a extremidade dos raios refletido e refratado, por exemplo, na célula F3 temos a operação $(H4-F3)*\text{COS}(B11)$ que representa a componente “x” do vetor “raio refratado”. O termo $(H4-F3)$ serve para ajustar a origem do raio refratado e, portanto, a linha de separação a separação de cores usadas no formato gradiente.

A planilha que resulta destes passos é mostrada na figura 3.2.

Figura 3.2: Planilha para o estudo da reflexão e da refração, mostrando o raio incidente, o refletido e o refratado.



Fonte: O autor.

Dicas de utilização da planilha:

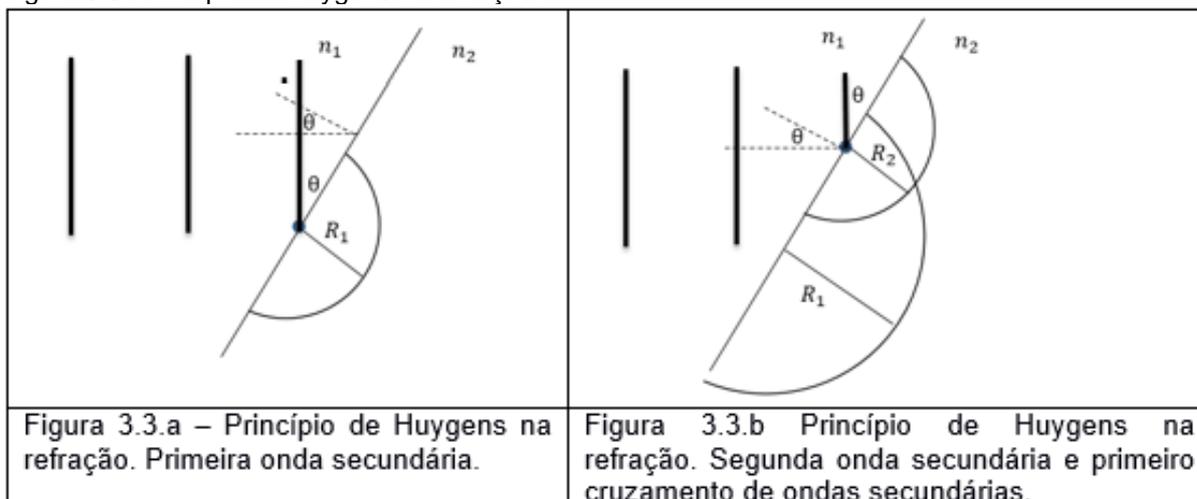
O comportamento dos raios quando $n_1 > n_2$ apresenta um ângulo crítico θ_c de incidência para que o raio refratado exista, acima desse ângulo ele não existe. Pela

equação 3.2 podemos calcular o ângulo crítico $\theta_c = \text{asen}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ onde fizemos $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Diminuindo o valor de y_1 na planilha, aumentamos o valor de θ_1 , podemos usar isso para aproximar θ_1 do valor do ângulo crítico. No momento em que o ângulo crítico for ultrapassado o Excel retorna para θ_2 o valor #NÚM!.

3.3 PRINCÍPIO DE HUYGENS E A REFRAÇÃO

O Princípio de Huygens diz que *cada ponto da frente de onda se comporta como uma fonte puntiforme, gerando ondas secundárias*. Então podemos pensar na seção anterior, ou seja, num feixe de luz tipo laser, com um único comprimento de onda λ , chegando numa interface de separação entre dois meios com índices de refração diferentes, e cada ponto da interface onde o laser incide produzindo ondas esféricas, como mostrado nas figuras 3.3.a e 3.3.b.

Figura 3.3: Princípio de Huygens na refração.

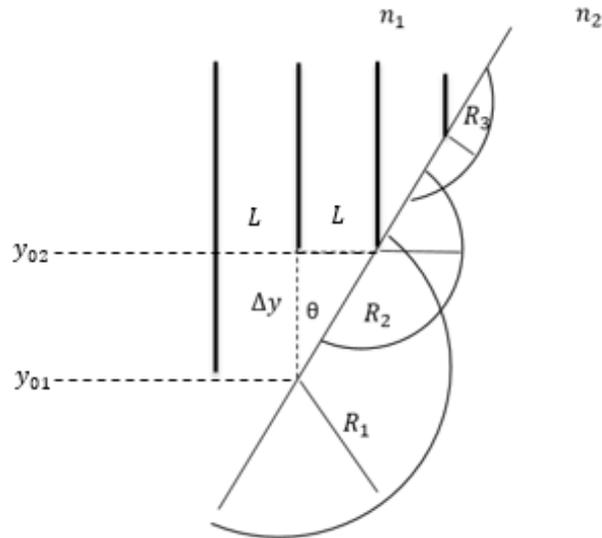


Fonte: O autor.

Podemos analisar dois pontos da interface que irão emitir as ondas secundárias, veremos que é o necessário para obtermos duas circunferências e a reta tangente a elas cuja inclinação respeitará a lei de Snell. Consideremos esses pontos na interface e separados pela distância Δy . Vemos que a primeira onda é formada na parte inferior da interface como na figura 3.3.a, numa posição que chamaremos de y_{01} , então num intervalo de tempo Δt ela viaja com velocidade v_2 (meio de n_2) uma distância R_1 formando uma circunferência de raio $R_1 = v_2 \Delta t$. Consideremos agora o intervalo de tempo Δt_1 , onde a mesma frente de onda viaja com a velocidade v_1 no

meio com n_1 até a interface, mas numa posição mais acima da anterior $y_{02} = y_{01} + \Delta y$, e a partir daí viaja no meio com n_2 com velocidade v_2 num intervalo de tempo Δt_2 gerando uma segunda onda secundária de raio $R_2 = v_2 \Delta t_2$. Notemos que, $\Delta t_2 + \Delta t_1 = \Delta t$, ou seja, $\Delta t_2 = \Delta t - \Delta t_1$ e que $\Delta t_1 = \frac{\Delta y \operatorname{tg} \theta}{v_1}$, pois $L = \frac{v_1}{\Delta t_1}$ como podemos observar na figura 3.4.

Figura 3.4: Três ondas secundárias para o ângulo de incidência Θ



Fonte: O autor.

Com isso, num intervalo de tempo Δt temos:

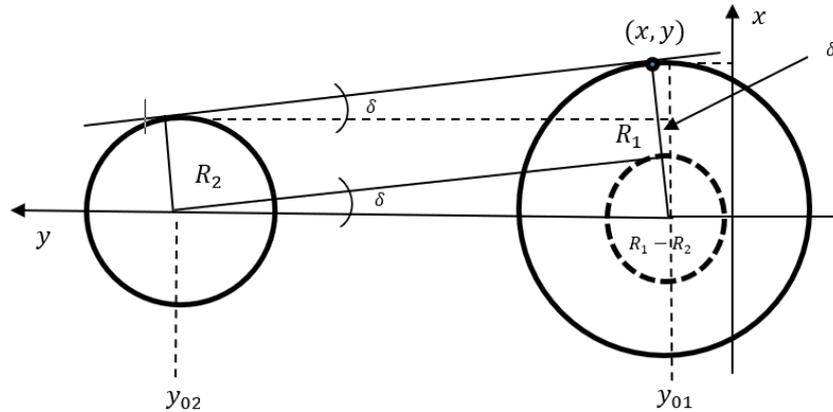
$$R_2 = R_1 \left(1 - \frac{\Delta y \operatorname{tg} \theta}{v_1 \Delta t} \right), \quad (3.3)$$

e da mesma forma,

$$R_3 = R_1 \left(1 - \frac{2\Delta y \operatorname{tg} \theta}{v_1 \Delta t} \right). \quad (3.4)$$

A direção normal a reta tangente aos arcos de circunferências, ou as circunferências, nos dá então a direção de propagação da nova frente de onda composta agora pelas ondas secundárias, consideremos a figura 3.5,

Figura 3.5: Esquema para o cálculo da reta tangente a duas circunferências.



Fonte: O autor.

O ângulo do feixe refratado com a normal a interface entre os meios (o eixo x) é δ e obtemos:

$$\text{sen}\delta = \frac{R_1 - R_2}{y_{01} + \frac{\Delta y}{\cos\theta} - y_{01}} = \frac{R_1 - R_2}{\frac{\Delta y}{\cos\theta}}, \quad (3.5)$$

que é a Lei de Snell,

$$\text{sen}\delta = \frac{v_2}{v_1} \text{sen}\theta. \quad (3.6)$$

Assim, o ângulo entre a direção de propagação da frente de onda com a normal (eixo x) é dado por:

$$s\delta = \arcsen\left(\frac{R_1 - R_2}{\frac{\Delta y}{\cos\theta}}\right). \quad (3.7)$$

As coordenadas do ponto (x, y) da reta tangente a primeira circunferência mostrada na figura 3.5 são dadas por:

$$y = y_{01} + R_1 \text{sen}\delta, \quad (3.8)$$

$$x = R_1 \cos\delta. \quad (3.9)$$

Estamos prontos então para construir a planilha para esse caso.

Vamos inicialmente definir os valores de velocidade do feixe de luz em cada meio e a velocidade da luz no vácuo c (escolhemos $c = 1$) para calcular mais tarde os índices de refração (células A1, B1, C1).

- Temos que controlar o intervalo de tempo Δt com um botão.

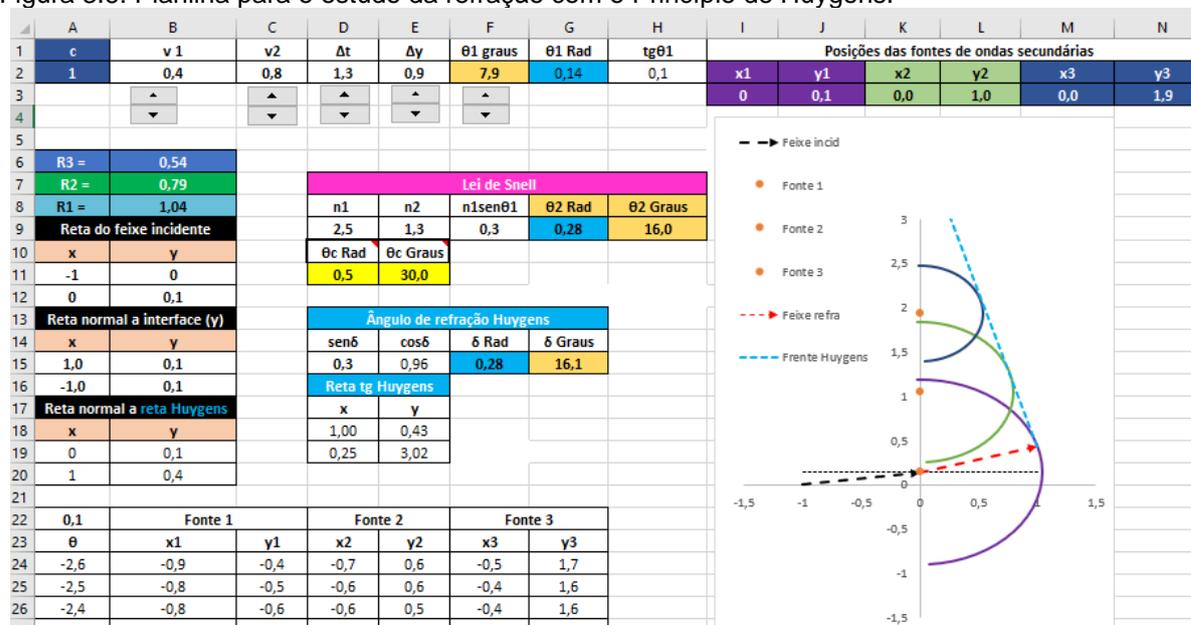
- Consideraremos as três fontes de ondas secundárias posicionadas no eixo y , separadas por Δy como y_{01} , y_{02} , y_{03} . Precisaremos de um botão para alterar Δy .
- O ângulo do feixe incidente com a normal a interface chamaremos de θ , entraremos com o valor em graus e o transformaremos em radianos para usar as funções da planilha.
- Com a informação do ângulo de incidência e a $tg\theta$ precisamos gerar dois pontos e construir o segmento de reta que representara o feixe incidente. Podemos fixar o ponto de incidência na posição y_{01} .
- Agora vamos criar os pontos que representarão as posições geradoras das ondas secundárias (células M2, N2, O2, P2, Q2, R2).
- Para traçar os arcos de circunferências precisamos calcular seus raios R_1 , R_2 , R_3 usando a equação $R_1 = v_2 \Delta t$, e também (3.3) e (3.4). Estes raios dependem do intervalo de tempo Δt . Com o mesmo procedimento da secção 2.6 do Capítulo 2 traçamos os arcos de circunferência para cada raio. **Lembrando** que as posições no eixo y para os centros das circunferências devem estar separados por $\frac{\Delta y}{\cos\theta}$.
- Podemos agora calcular a reta tangente aos arcos de circunferência e usar a normal a esta reta como direção de propagação do feixe refratado.
- Para visualizar a inclinação do feixe incidente, podemos traçar um segmento de reta, perpendicular à frente de onda incidente, terminando no ponto $(0, y_{01})$. Para visualizar a inclinação do feixe refratado usamos outro segmento de reta, saindo desse mesmo ponto e perpendicular a reta que tangencia os arcos de circunferência.
- Também podemos usar a Lei de Snell para calcular a direção do feixe refratado e comparar com o valor dado pela equação (3.7).
- Se o feixe viajar de um meio de índice de refração maior para um de índice menor existe um ângulo de incidência crítico θ_c no qual o feixe refratado deixa de existir, ou seja, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ e pela equação (3.2),

$$\frac{n_1}{n_2} \text{sen}\theta_c = \text{sen}\theta_2 = 1, \quad (3.10)$$

$$\theta_c = \arcsen\left(\frac{n_2}{n_1}\right), \quad (3.11)$$

A planilha para esse exercício é mostrada nas figuras 3.6:

Figura 3.6: Planilha para o estudo da refração com o Princípio de Huygens.



Fonte: O autor.

Dicas de utilização da planilha:

Use o botão que controla a célula D2, ou seja, o tempo, começando do zero, você perceberá que as circunferências do Princípio de Huygens irão se formar. No entanto, enquanto não houver o cruzamento entre elas, alguns valores da planilha não serão calculados e o Excel irá colocar #NÚM! Para eles. Compare os valores das células H9 e G5 onde são calculados os ângulos de refração, H9 pela Lei de Snell e G5 pela reta tangente às circunferências (Princípio de Huygens). Você pode fazer esta comparação primeiro para $v_2 > v_1$ e depois para $v_2 < v_1$, num desses casos você observará a reflexão interna total e o que acontece com os nós.

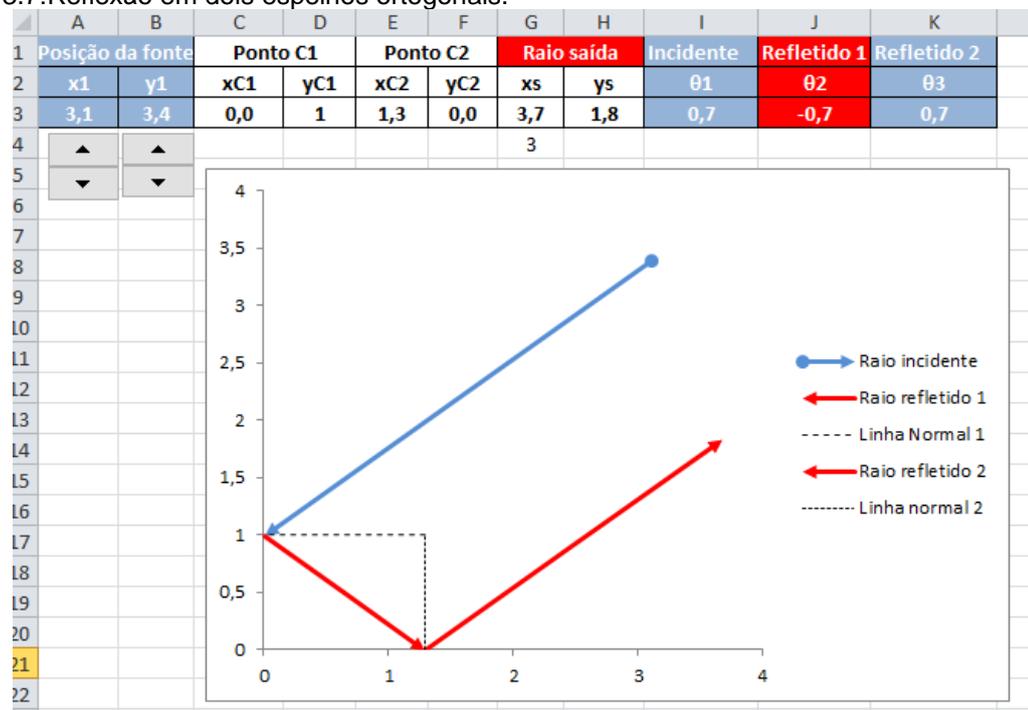
3.4 REFLEXÃO EM DOIS ESPELHOS PLANOS ORTOGONAIS

- A regra a ser obedecida é a dada pela equação 3.1, ou seja, o ângulo de reflexão formado com a linha normal à superfície refletora é igual ao ângulo de incidência. Consideraremos um raio que parte do objeto (fonte) e atinge o espelho num ponto fixo, mas a posição do objeto poderemos variar por botões.

- Teremos três raios, um incidente, um refletido no primeiro espelho (eixo y) e um refletido no segundo espelho (eixo x). Com isso, teremos dois pontos comuns, um para o encontro do raio incidente com o raio refletido no primeiro espelho e outro para o encontro do primeiro raio refletido com o segundo raio refletido (raio de saída dos espelhos).
- Os ângulos de incidência e de reflexão podem ser observados na figura 3.7 e podem ser calculados pelas regras $\text{ATAN}((B3-D3)/(A3-C3))$, $\text{ATAN}((D3-F3)/(C3-E3))$, $\text{ATAN}((H3-F3)/(G3-E3))$.
- Para observar os ângulos de incidência e de reflexão criamos duas linhas de referência, a linha normal ao primeiro espelho e a linha normal ao segundo espelho. As coordenadas dos pontos inicial e final da primeira linha são (x_{C1}, y_{C1}) e (x_{C2}, y_{C1}) , e para a segunda linha (x_{C2}, y_{C2}) e (x_{C2}, y_{C1}) (ver figura 3.7).

A planilha para este caso é mostrada na figura 3.6.

Figura 3.7: Reflexão em dois espelhos ortogonais.



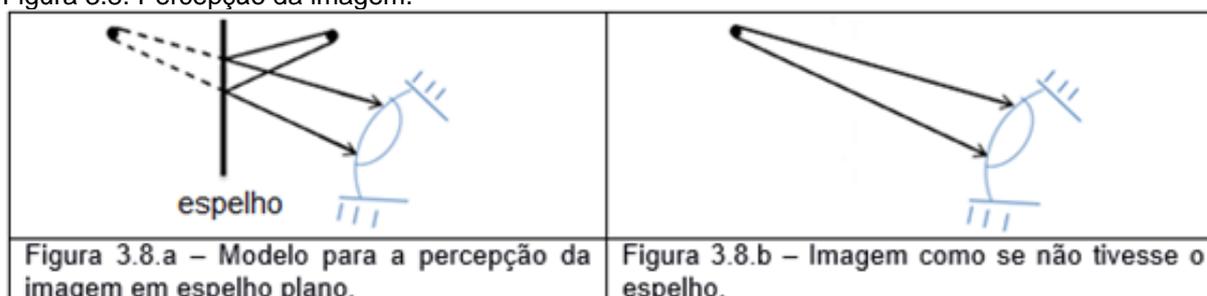
Fonte: O autor.

3.5 FORMAÇÃO DE IMAGENS NOS ESPELHOS PLANOS

A luz que vem de cada ponto de um objeto colocado a frente do espelho é refletida na superfície espelhada, como a luz diverge de cada ponto vinda do objeto

ela atinge todos os pontos do espelho e é refletida em todas as direções, por isso é possível enxergar a imagem refletida do objeto em todas as posições (exceto atrás do objeto) relativas ao espelho. Na figura 3.8-a é mostrado dois raios que saem das extremidades do objeto e são refletidos no espelho, eles delimitam uma região do espelho que ao saírem em direção ao olho vão atingir a extensão do olho que pode perceber luz, fora dessa região os raios não passam pelo cristalino e não podem alcançar a retina onde a imagem é formada. Assim todos os raios intermediários a estes dois e que incidem na região do espelho delimitada por eles farão parte da imagem projetada na retina. A imagem do objeto mostrado na figura 3.8.a é então percebida como se estivesse no prolongamento dos raios refletidos, ou seja, como na figura 3.8.b. A imagem está numa posição aparente atrás do espelho e numa distância (i) igual à do objeto ao espelho (p), para distâncias de imagens virtuais adotamos o sinal negativo e para imagens reais o sinal positivo, podemos escrever então $p = -i$.

Figura 3.8: Percepção da imagem.



Fonte: O autor.

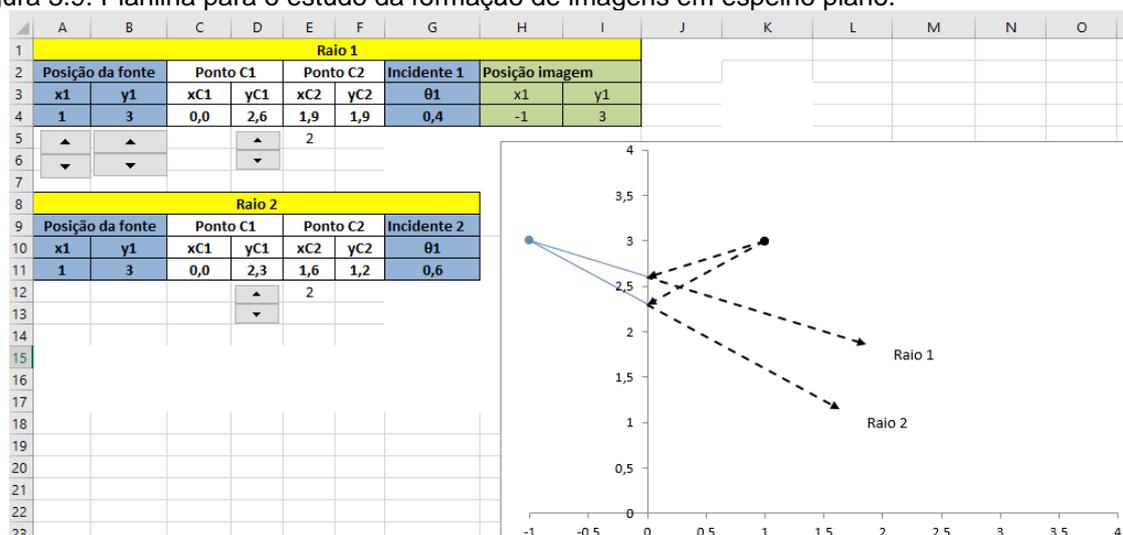
Podemos agora construir a planilha para essas situações.

- Necessitaremos de botões para variar a posição do objeto que será representado por um ponto.
- Trabalharemos com dois raios saindo do objeto, portanto teremos dois pontos de contato com o espelho (C1) e dois pontos onde os raios serão observados (C2).
- Temos que unir o ponto do objeto com os pontos C1 e criar os raios incidentes que atingem o espelho.
- Como o espelho estará sobre o eixo y , ou seja, na posição $x = 0$, podemos variar as posições dos pontos C1 com um único botão para cada raio, alterando somente a posição y dos pontos C1.

- Para construir os raios refletidos, segmento de reta que une os pontos C1 e C2, será necessário calcular os ângulos de reflexão θ_1 e θ_2 , por exemplo, para o caso da planilha mostrada na figura 3.9 $\theta_1 = \text{ATAN}((B4-D4)/(A4-C4))$.
- Vamos precisar da posição da imagem para traçar o prolongamento dos raios refletidos lembrando que $p = -i$.

O resultado da construção dessa planilha é mostrado na figura 3.9.

Figura 3.9: Planilha para o estudo da formação de imagens em espelho plano.

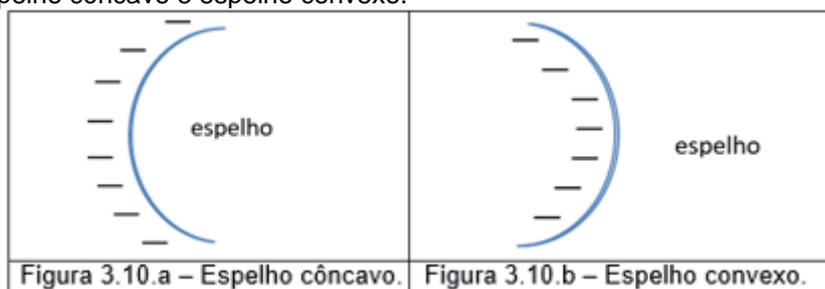


Fonte: O autor.

3.6 ESPELHOS ESFÉRICOS

Um espelho esférico é constituído de uma superfície refletora com formato esférico, um hemisfério. A superfície refletora pode ser interna ou externa ao hemisfério, no caso de ser interna o espelho é dito côncavo, externa é dito convexo. No espelho côncavo os raios podem convergir ou divergir dependendo da posição do objeto em relação ao espelho, já no espelho convexo eles somente podem divergir independentemente da posição relativa do objeto. Analisaremos a formação de imagens para o espelho côncavo. As imagens e situações para o espelho convexo são conseguidas multiplicando por -1 a coordenada x do objeto, objeto e imagem trocam de lado no espelho.

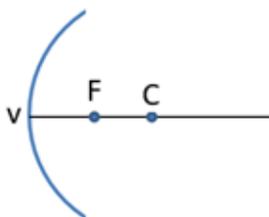
Figura 3.10: Espelho côncavo e espelho convexo.



Fonte: O autor.

Um espelho côncavo possui alguns pontos especiais para análise das imagens formadas por reflexão, o primeiro é o centro de curvatura C como mostra a figura 3.11, já que o espelho é um “pedaço” de uma esfera este ponto é o centro da esfera da qual o espelho é uma parte. O segundo é o vértice v , ou centro do espelho que juntamente com o centro de curvatura define o eixo central do espelho, ou seja, a reta que passa por estes dois pontos. O terceiro é o ponto focal F ou foco do espelho que se localiza sobre o eixo do espelho na metade da distância entre o centro de curvatura e o vértice.

Figura 3.11: Espelho côncavo.



Fonte: O autor.

Quando temos raios vindos de um objeto localizado em p sobre o eixo central, mas desviados de pequenos ângulos em relação ao eixo central do espelho, podemos usar a equação (3.12) para determinar a posição da imagem i :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}, \quad (3.12)$$

onde $f = \frac{R}{2}$ é o foco do espelho e R o raio de curvatura do espelho, ou raio da esfera que o espelho faz parte.

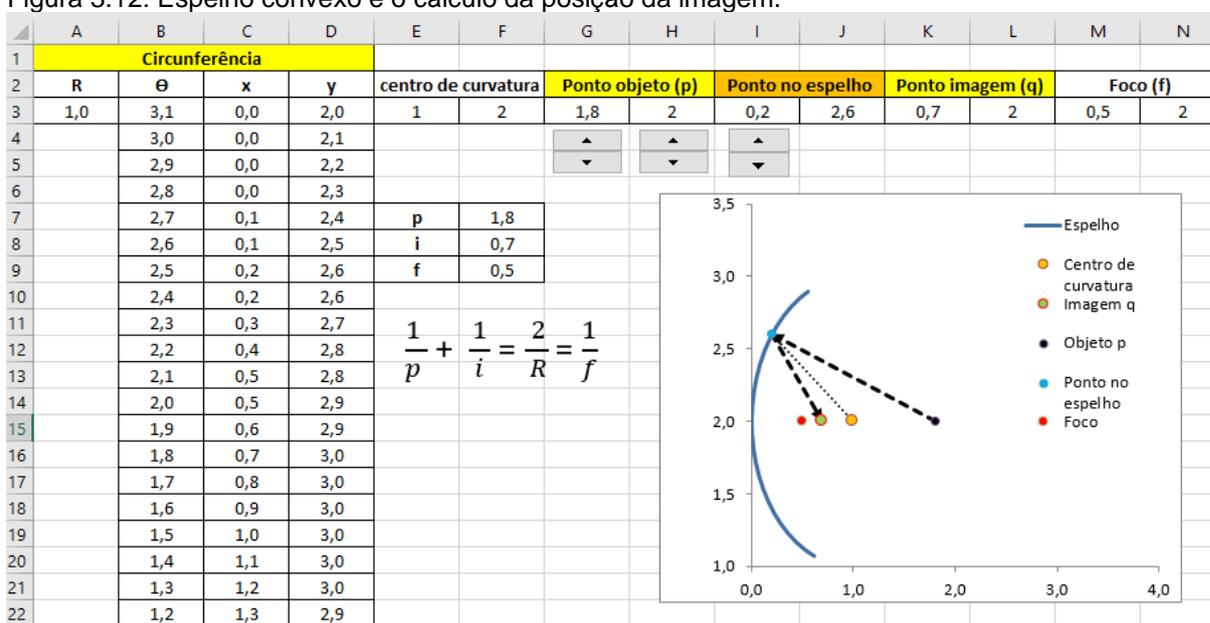
Podemos nesse momento fazer a primeira planilha para os espelhos côncavos e simular a equação (3.12).

- Para construir o hemisfério do espelho podemos fazer o mesmo procedimento da secção 2.6.

- Precisamos guardar os valores do centro de curvatura, do ponto objeto que é a localização do objeto, do ponto no espelho onde o raio vai incidir e do foco.
- Agora podemos calcular a localização da imagem via equação (3.12).
- Será interessante poder varia, via botões, a posição do objeto e também do ponto onde o raio da esfera encontra o espelho e nesse caso podemos usar a equação da circunferência $y = \sqrt{R^2 - (x - x_c)^2} - y_c$ onde (x_c, y_c) são as coordenadas do centro de curvatura e x um valor escolhido por um botão.

O resultado dessa planilha está na figura 3.12.

Figura 3.12: Espelho convexo e o cálculo da posição da imagem.



Fonte: O autor.

Dicas de utilização da planilha mostrada na figura 3.12:

Como o objeto não tem dimensão de altura, escolha a posição y do ponto objeto (H3) igual a posição y do centro de curvatura (F3). Você pode agora testar o caso em que a posição do objeto no infinito (uma posição muito maior que o raio do espelho) forma uma imagem no foco do espelho, aumentando o valor da célula G3. Agora você pode ir diminuindo a distância do objeto até o espelho, veja o que acontece quando o ponto objeto está sobre o centro de curvatura, o raio deve voltar sobre ele mesmo. Agora aproxime mais um pouco o objeto do espelho atingindo o foco, o Excel informa que uma divisão por zero ocorreu colocando #DIV/0! na célula F8, quando uma divisão por zero ocorre o Excel coloca o ponto na origem e devemos considerar a imagem no infinito. E entre o vértice do espelho e o foco a imagem estaria do outro

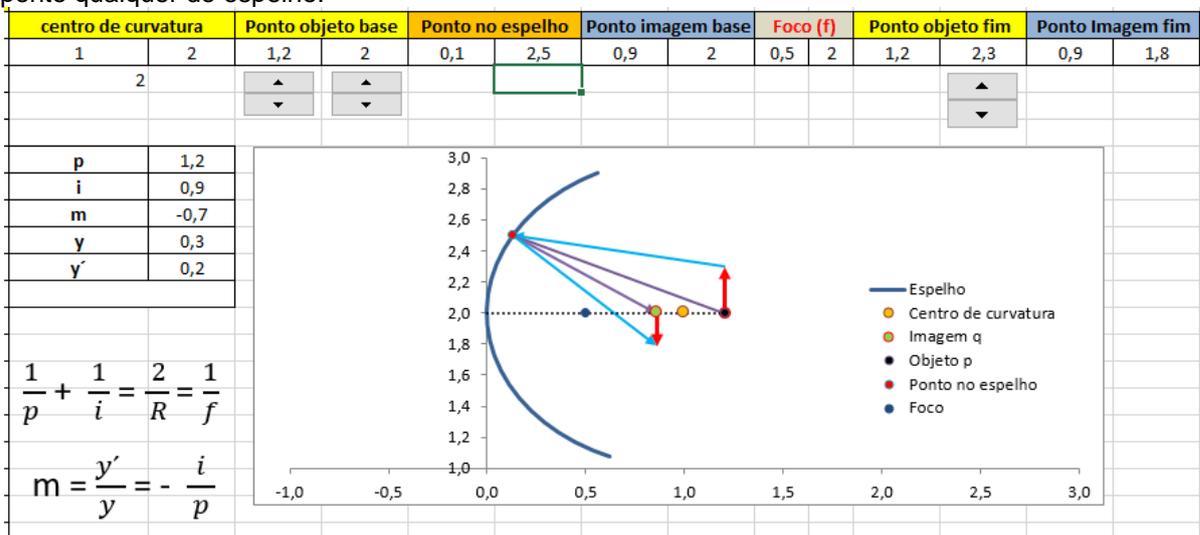
lado do espelho, ou seja, é virtual, isso até que se atinja o vértice do espelho onde a imagem deve se formar também.

Agora analisemos o caso de um objeto com extensão vertical:

- Para analisar o tamanho da imagem formada precisamos da ampliação, cuja expressão matemática é $m = \frac{y'}{y} = -\frac{i}{p}$ onde y' e y são as alturas da imagem e do objeto respectivamente. Para evitar a divisão por zero quando sabemos o resultado, colocamos a função SE(F7=0;1;-F8/F7) na célula F9 que calcula o valor de m , é o caso quando $p = 0$.
- Agora vamos representar o objeto por um vetor, pois como veremos a imagem pode ter orientação diferente do objeto. O objeto possui extensão vertical e precisamos de um ponto para representar o topo (fim do vetor) e outro para a base. A imagem será outro vetor e também serão necessários dois pontos para representá-la.
- Vamos precisar de botões para variar a posição do objeto, também a posição de incidência do raio que vem do fim do vetor que representa o objeto, e a posição do raio que vem da base do objeto. Estes dois pontos vão delimitar os outros raios.

Na figura 3.13 é mostrado a planilha para o caso em que unimos os pontos da extremidade do objeto com a extremidade da imagem, ou seja, fim do objeto com fim da imagem e base com base. Foi omitido a parte que gera o hemisfério do espelho por economia de espaço na figura, mas é a mesma da figura 3.12.

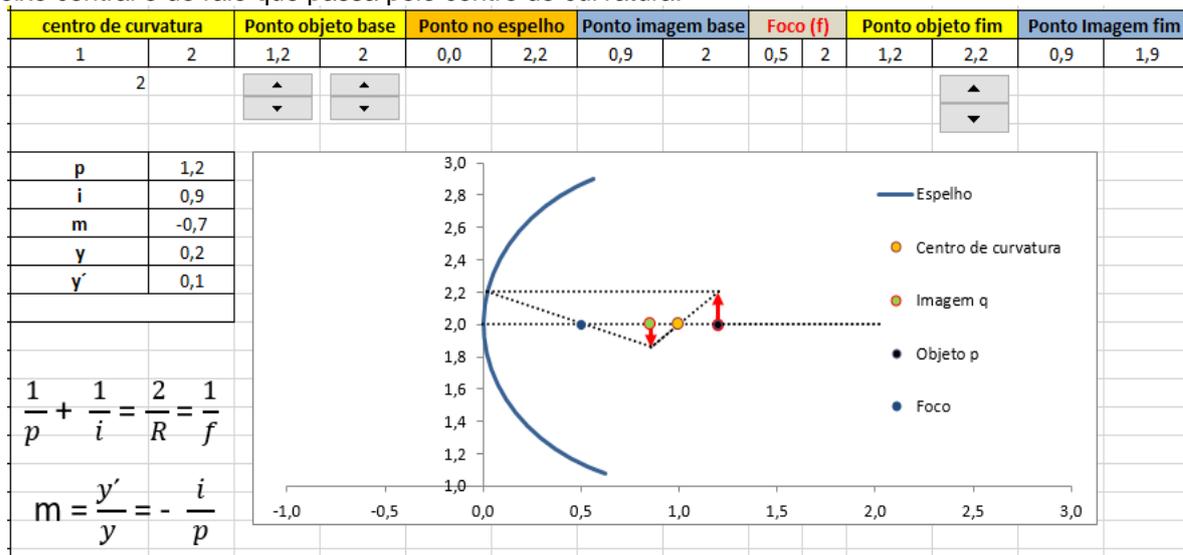
Figura 3.13: Formação de imagem no espelho côncavo para o caso de incidência dos raios em um ponto qualquer do espelho.



Fonte: O autor.

Na figura 3.14 é mostrado a planilha para o caso em que traçamos um raio que sai do fim (topo) do vetor que representa o objeto, viaja paralelo ao eixo central e se reflete passando pelo foco do espelho. O outro raio sai do mesmo lugar, ou seja, do topo do objeto e passa pelo centro de curvatura e se reflete sobre ele mesmo. A posição onde esses dois raios se cruzam coincide com a posição do topo da imagem.

Figura 3.14: Formação de imagem no espelho côncavo para o caso de incidência do raio paralelo ao eixo central e do raio que passa pelo centro de curvatura.



Fonte: O autor.

Dicas de utilização da planilha mostrada na figura 3.13 e 3.14:

Novamente para um objeto no infinito ($p \gg R$) a imagem deve se formar no foco, no entanto o tamanho da imagem tende a zero! Sobre o centro de curvatura a imagem é invertida e tem o mesmo tamanho que o objeto. Entre o centro de curvatura e o foco a imagem continua invertida, mas agora ela é maior que o objeto. No foco a imagem se forma no infinito causando as divisões por zero. Entre o foco e o vértice do espelho a imagem é virtual, direita e maior que o objeto diminuindo de tamanho até que o objeto esteja no vértice onde o tamanho da imagem é igual ao do objeto.

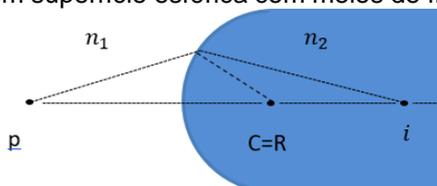
3.7 REFRAÇÃO EM SUPERFÍCIES ESFÉRICAS

Podemos agora analisar como ficaria o caso da seção 3.2 para uma superfície de separação esférica entre dois meios com índices de refração diferentes, ver figura 3.15. Novamente, para raios incidentes que formem um ângulo pequeno com o eixo central, temos uma equação que relaciona a distância da imagem ao vértice de separação dos dois meios com a distância do objeto a este vértice. Esta

relação vai depender, como era de se esperar, dos índices de refração dos meios envolvidos.

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (3.13)$$

Figura 3.15: Formação de imagem em superfície esférica com meios de índices de refração diferentes.



Fonte: O autor.

Temos nesse caso dois focos, um quando o raio vai do meio com n_1 para o meio com n_2 e o outro quando ocorre o contrário:

$$\frac{n_2}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \text{ para } |p| \rightarrow \infty \text{ e } R > 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{n_1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{R} \text{ para } i \rightarrow -\infty \text{ e } R < 0 \quad (3.15)$$

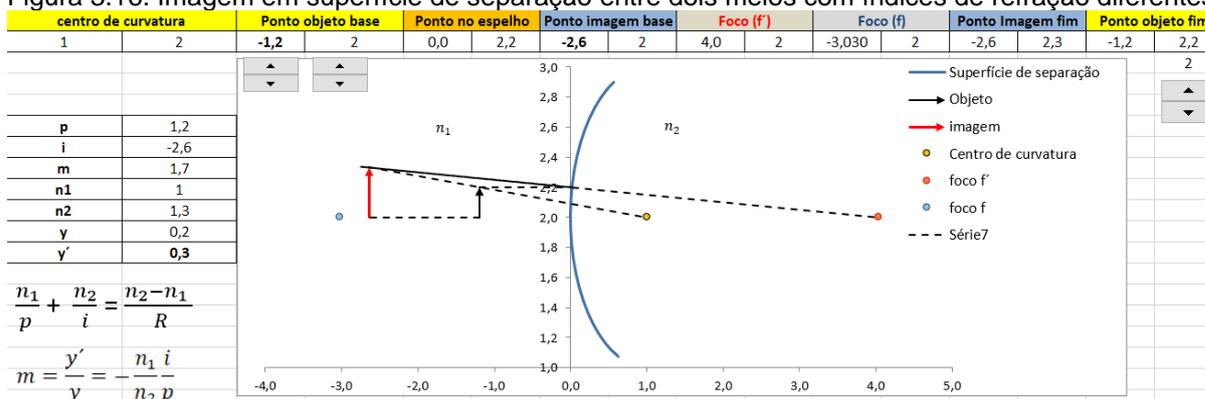
No caso de imagens extensas temos a ampliação lateral dada por:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 i}{n_2 p}. \quad (3.16)$$

Podemos agora começar a construção de planilhas para este caso, o que muda em relação aos espelhos é o cálculo da posição da imagem uma vez dada a posição do objeto e a existência de dois focos diferentes, um para cada índice de refração. Temos que considerar na equação (3.16) que quando o objeto está do lado esquerdo no caso da figura 3.15 implica que $p > 0$ e que quando está do lado direito da superfície de separação $p < 0$, no entanto estaremos usando a posição $x = 0$ como a localização do vértice, a posição do objeto terá coordenada x negativa do lado esquerdo do vértice.

As planilhas anteriores podem ser aproveitadas e acrescentamos os dois focos f' e f , o resultado é mostrado na figura 3.16.

Figura 3.16: Imagem em superfície de separação entre dois meios com índices de refração diferentes.



Fonte: O autor.

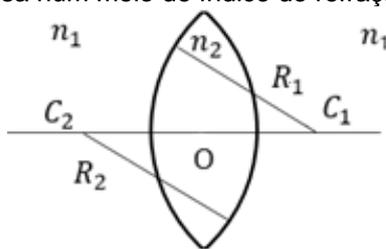
Dicas de utilização da planilha:

Podemos começar com o objeto indo para o infinito negativo ($|p| \gg |f|$), a imagem invertida tende a se formar no foco f' com tamanho zero. No foco e ir aproximando do foco f temos uma imagem no infinito, direita e virtual. Entre f e o vértice existe a posição em que a imagem se encontra em f , para esse caso $i = -f$ e $p = \frac{n_1^2 R}{n_2^2 - n_1^2}$. No vértice a imagem é igual ao objeto e podemos evitar a divisão por zero colocando na célula F9 para o valor de m a função $SE(F7=0;1;-(F10/F11)*(F8/F7))$ que atribui a m o valor 1, já que pela equação 3.13 $i = 0$ para $p = 0$. A planilha também serve para a posição do objeto com valores positivos (localização positiva), mas temos que lembrar que para os cálculos temos que considerar $p < 0$, um caso a ser observado é a posição do objeto em $x = R$ ($p = -R$) que implica em $i = R$ e a imagem é direita e menor que o objeto. Com o objeto em f' , ou seja, $p = -f'$ temos a imagem direita e menor que o objeto com $i = \frac{n_2^2 R}{n_2^2 - n_1^2}$.

3.8 LENTES DELGADAS

São consideradas lentes delgadas quando a maior espessura da lente é menor que as distâncias focais, raios de curvatura, distância do objeto e distância da imagem. Examinaremos agora a lente biconvexa mostrada na figura 3.17.

Figura 3.17: Lente biconvexa imersa num meio de índice de refração n_1 .



Fonte: O autor.

As distâncias do objeto p , da imagem i , dos dois centros de curvatura C_1 e C_2 dos dois focos f_1 e f_2 a serem consideradas são medidas em relação a origem O. A equação que relaciona a distância do objeto com a da imagem é a equação (3.17), conhecida como equação dos construtores de lentes, que depende dos índices de refração do meio (n_1) em que a lente está imersa e do índice de refração do material da lente (n_2). Também temos que considerar a convenção $R_2 < 0$ e $R_1 > 0$.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = (n_{21} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2}. \quad (3.17)$$

Na equação (3.17) o índice relativo $n_{21} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}$.

A ampliação lateral m é a razão entre a altura da imagem y' pela altura do objeto y e é dada pela equação (3.18):

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{i}{p}. \quad (3.18)$$

- Para a construção da planilha lembramos que os hemisférios das lentes podem ser obtidos fazendo o mesmo procedimento da secção 2.6, considerando um raio do hemisfério positivo e outro negativo, o que pode ser visualizado na figura 2.15 onde selecionamos alguns pontos das duas circunferências para o gráfico.
- Nesse exemplo a origem da lente não está obrigatoriamente na origem do sistema de coordenadas (0,0), isso exige que usemos um valor de distância do objeto e da imagem para o cálculo usando a equação (3.17) e outros valores para plotar o objeto e a imagem no gráfico. Por exemplo, na figura 2.15 podemos perceber que a distância do objeto assume os valores -2,7 e 7,2, ou seja, o primeiro valor é o que será usado para localizar o objeto no gráfico e o segundo valor (7,2) é o que deve ser usado na equação (3.17) como a distância até a origem O para obter o valor $i = 6,2$. Entretanto, esse valor de i é a

distância a partir da origem, ou seja, para colocarmos a imagem no gráfico temos que somar 4,5 que é a posição da origem da lente no gráfico.

- Para encontrar a origem da lente podemos usar a figura 3.18, onde percebemos que $O = C_1 - x_1$ e que,

$$x_1 + x_2 = C_1 - C_2, \quad (3.19)$$

e, também que,

$$R_1^2 - x_1^2 = R_2^2 - x_2^2. \quad (3.20)$$

Lembremos que agora R_2 é somente a hipotenusa de um triângulo retângulo e deve ser considerado positivo, a equação (3.20) pode ser escrita como:

$$R_2^2 - R_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1), \quad (3.21)$$

ou,

$$\frac{R_2^2 - R_1^2}{C_1 - C_2} = x_2 - x_1, \quad (3.22)$$

e agora usando (3.19) em (3.22) obtemos:

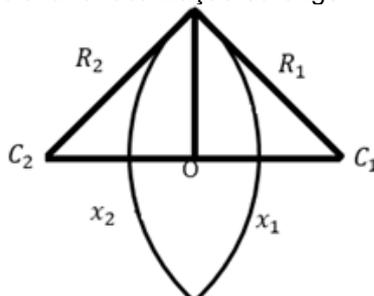
$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{(C_1 - C_2)^2 - (R_2 - R_1)^2}{(C_1 - C_2)}. \quad (3.23)$$

Finalmente obtemos a localização da origem da lente:

$$O = C_1 - \frac{1}{2} \frac{(C_1 - C_2)^2 - (R_2 - R_1)^2}{(C_1 - C_2)}. \quad (3.24)$$

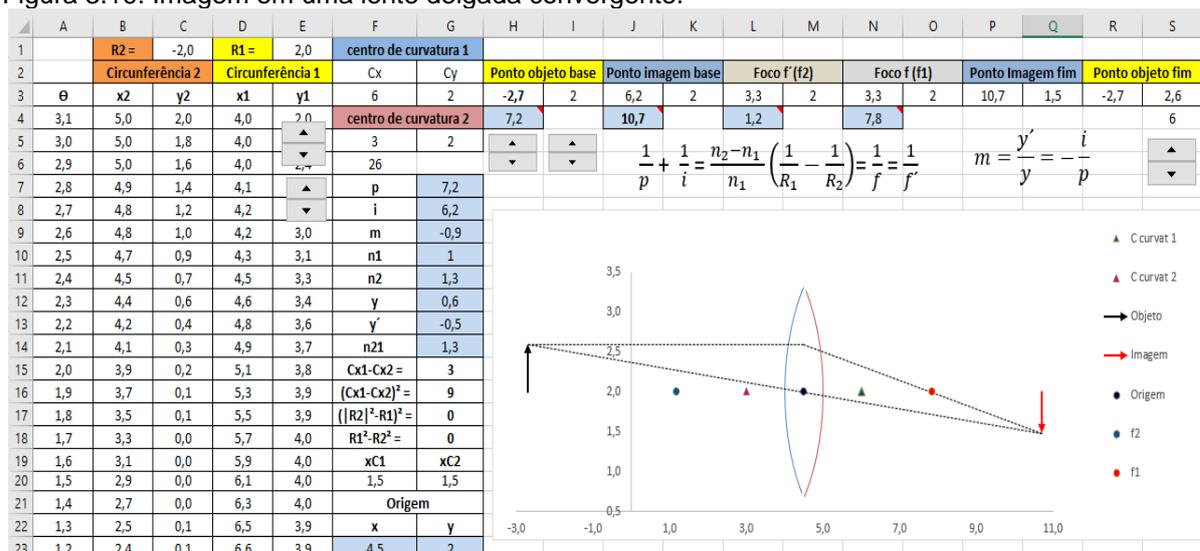
O valor de x_1 e x_2 na figura 3.19 estão representados por x_{C1} e x_{C2} nas colunas F e G na linha 20.

Figura 3.18: – Esquema para equacionar a localização da origem O da lente.



Fonte: O autor.

Figura 3.19: Imagem em uma lente delgada convergente.



Fonte: O autor.

Dicas de utilização da planilha:

Começando com o objeto na posição de “infinito negativo” veremos que a imagem é real, invertida e se forma no foco f_1 com tamanho igual a zero, quando o objeto ultrapassa o foco f_2 a imagem se torna virtual e direita. No vértice a imagem é igual ao objeto, o que podemos ver removendo a divisão por zero (como feito nas planilhas anteriores). No caso de mudarmos o objeto para o lado direito da lente, devemos usar a imagem como se fosse o objeto e vice-versa, a ampliação também deve ser invertida.

3.9 INTERFERÊNCIA DE DUAS ONDAS

Já vimos no capítulo de Mecânica a soma de duas ondas progressivas vindas do mesmo ponto, agora precisamos investigar um ponto do espaço que recebe duas ondas vindas de lugares diferentes. Isso porque usaremos raciocínios semelhantes para analisar os fenômenos de interferência e difração de ondas eletromagnéticas.

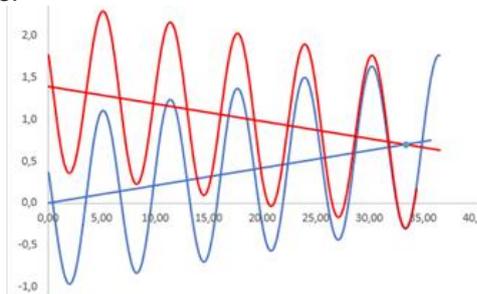
Iniciamos então por duas ondas planas, cada uma monocromática transversal e progressiva, semelhante a seção 2.9 do Capítulo 2, elas terão a mesma frequência e mesmo comprimento de onda, também mesma constante de fase. Apesar das ondas eletromagnéticas possuírem campos elétricos e campos magnéticos, as forças elétricas na interação dessas ondas com os elétrons de um anteparo, por exemplo, são extremamente maiores que as forças devido a interação magnética e podemos observar somente o que acontece com o campo elétrico.

$$E_1(x, t) = E_0 \text{sen}(kx - \omega t) , \tag{3.25}$$

$$E_2(x, t) = E_0 \text{sen}(kx - \omega t) . \tag{3.26}$$

A situação que desejamos investigar é ilustrada na figura 3.20.

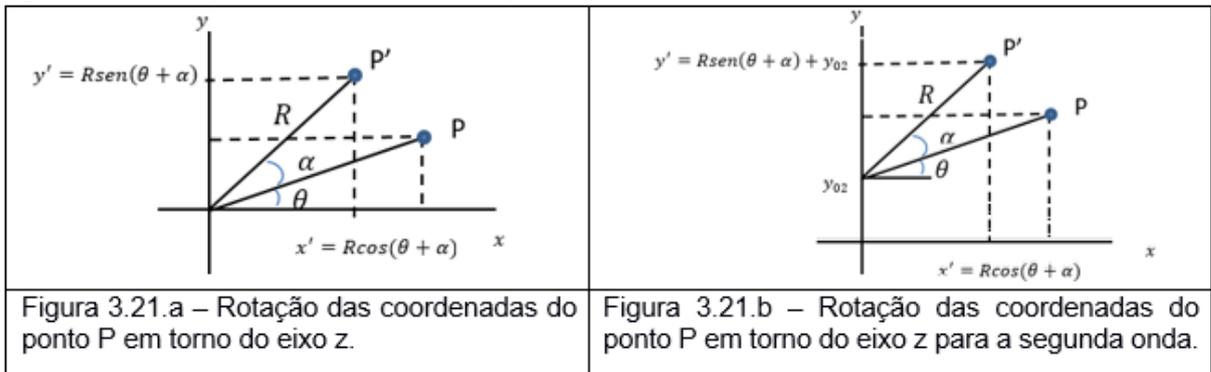
Figura 3.20: Duas ondas planas de mesma frequência são analisadas num ponto do espaço, elas são emitidas de posições diferentes.



Fonte: O autor.

Podemos construir um gráfico de duas funções como as dadas pelas equações (3.25) e (3.26), colocar a origem da segunda delas numa posição y_{02} e a da outra na origem do gráfico. Depois disso podemos aplicar a todos os pontos da primeira função uma rotação de um ângulo α_1 em torno do eixo z (figura 3.21.a), e aos pontos da outra função uma rotação de α_2 (figura 3.21.b).

Figura 3.21: Rotação das coordenadas do ponto P em torno do eixo z.



Fonte: O autor.

Da figura 3.21.a observamos que:

$$x'_1 = R \cos(\theta + \alpha) = R \cos \theta \cos \alpha - R \text{sen} \theta \text{sen} \alpha , \tag{3.27}$$

$$y'_1 = R \text{sen}(\theta + \alpha) = R \text{sen} \theta \cos \alpha + R \cos \theta \text{sen} \alpha , \tag{3.28}$$

$$x_1 = R \cos \theta , \tag{3.29}$$

$$y_1 = R \text{sen} \theta . \tag{3.30}$$

E da figura 3.21.b observamos que:

$$x'_2 = R \cos(\theta + \alpha) = R \cos \theta \cos \alpha - R \sin \theta \sin \alpha, \quad (3.31)$$

$$y'_2 = R \sin(\theta + \alpha) + y_{02} = R \sin \theta \cos \alpha + R \cos \theta \sin \alpha + y_{02}, \quad (3.32)$$

$$x_2 = R \cos \theta, \quad (3.33)$$

$$y_2 = R \sin \theta + y_{02}. \quad (3.34)$$

A rotação de um ângulo α é conseguida então com as transformações:

$$x'_1 = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \quad (3.35)$$

$$y'_1 = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha, \quad (3.36)$$

$$x'_2 = x_2 \cos \alpha - (y_2 - y_{02}) \sin \alpha, \quad (3.37)$$

$$y'_2 = y_{02} + x_2 \sin \alpha + (y_2 - y_{02}) \cos \alpha. \quad (3.38)$$

Podemos agora construir a planilha para este caso.

- Precisaremos de botões para controlar as retas que serão as guias para as duas ondas, ou seja, precisamos das inclinações das retas e dos pontos onde cortam o eixo vertical, $y(x=0)$. Lembrando que as funções COS(num) e SEN(num) retornam o cosseno e o seno, respectivamente, de um ângulo “num” em radianos, como estamos mais acostumados a tratar ângulos em graus podemos usar o ângulo em graus e transformá-lo em radianos com a função RADIANOS(graus). Iremos usar nessa planilha a tangente, o seno e o cosseno do ângulo de rotação, além disso é interessante poder controlar também a constante de fase de cada onda (seção 2.3, equação 2.7 do capítulo 2).
- Os valores de x para a construção do gráfico devem ser próximos para que o formato das ondas não fique distorcido, chamamos de “passo de x ” na planilha.
- Agora precisamos gerar os pontos que sofrerão as rotações, ou seja, os pontos das funções de onda dadas pelas equações (3.25) e (3.26), entretanto usaremos a notação y ao invés de E , pois E é a componente vertical da onda. Assim, na coluna B a partir da linha 11 teremos os valores de x e na coluna C a partir da linha 11 os valores de amplitude da primeira onda $y(x,t) = \text{sen}(kx - wt)$, ou seja, SEN(B11-A\$11+C\$8) e a amplitude, o número de onda k e a frequência w foram escolhidas com sendo igual a unidade. Na coluna G temos os valores para a segunda onda.
- A reta guia para a onda construída no passo anterior é dada pela equação da reta $y = xt \tan \alpha$, assim a onda serpenteará essa reta.

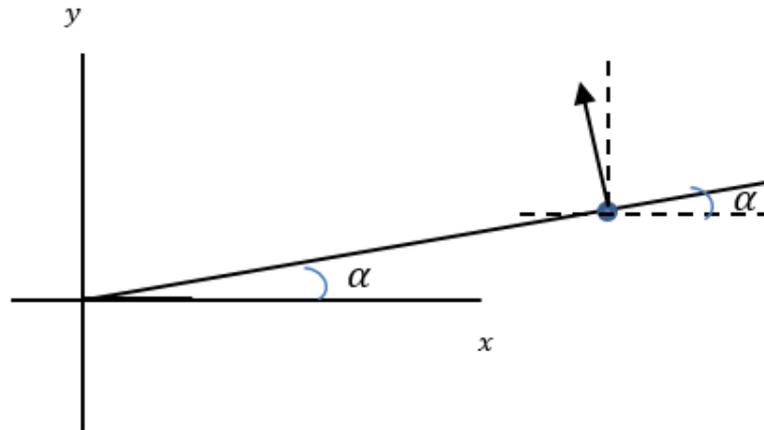
- Usando as transformações dadas pelas equações (3.35) e (3.36) construímos as colunas E e F a partir da linha 11 que são as rotações dos pontos criados no passo 3.2.4, ou seja, a nova onda tem uma inclinação α_1 e parte da origem do gráfico $(0,0)$.
- Temos que ter um botão para poder evoluir a variável tempo, o que é feito na coluna A linha 11.
- Para a segunda onda podemos usar os mesmos pontos x , mas precisamos de outra coluna com a onda a ser rotacionada. Usamos a coluna G a partir da linha 11 para isso.
- A nova reta guia então usa o ângulo de rotação α_2 e a equação $y = y_{02} + xtg\alpha_2$.
- Agora usando as transformações dadas pelas equações (3.37) e (3.38) construímos as colunas I e J a partir da linha 11 que são as rotações dos pontos criados no quarto passo, ou seja, a nova onda segue uma inclinação α_2 e parte da posição $(0, y_{02})$.
- Agora podemos tratar do ponto onde as retas se encontram, o qual será o ponto de interesse para observarmos a interferência das duas ondas. Esse ponto (x, y) satisfaz as duas equações das duas retas, ou seja:

$$x^* = \frac{y_{02} - y_{01}}{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}, \quad (3.39)$$

$$y^* = \frac{y_{02}tg\alpha_1 - y_{01}tg\alpha_2}{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}. \quad (3.40)$$

- Com o ponto (x, y) de encontro das retas dados pelas equações (3.39) e (3.40) encontramos os valores das amplitudes das duas ondas antes da rotação, ou seja, $y_1 = sen(x^* - t)$ e $y_2 = y_{02} + sen(x^* - t)$ e então aplicamos as transformações dadas pelas equações de (3.35) a (3.38) obtendo as coordenadas verticais de cada onda y'_1 e y'_2 . Agora precisamos saber a amplitude de cada onda em relação a sua reta guia e obtemos isso por fazer a as diferenças $y'_1 - y^*$ e $y'_2 - y^*$. Finalmente, lembrando que essa amplitude representa o módulo do vetor campo elétrico, por exemplo, num anteparo vertical, para somar as ondas precisamos decompor suas componentes no eixo no eixo y , ou seja, $E_{1y} = (y'_1 - y^*)cos\alpha_1$, assim como $E_{2y} = (y'_2 - y^*)cos\alpha_2$. O ângulo α é mostrado na figura 3.22.

Figura 3.22: Esquema mostrando o ângulo para decompor o vetor campo elétrico.



Fonte: O autor.

As componentes do vetor campo elétrico resultante são então dadas por:

$$E_x = E_{1x} + E_{2x}, \quad (3.41)$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y}. \quad (3.42)$$

O módulo do vetor campo elétrico no ponto de encontro das retas guias é dado por:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}. \quad (3.43)$$

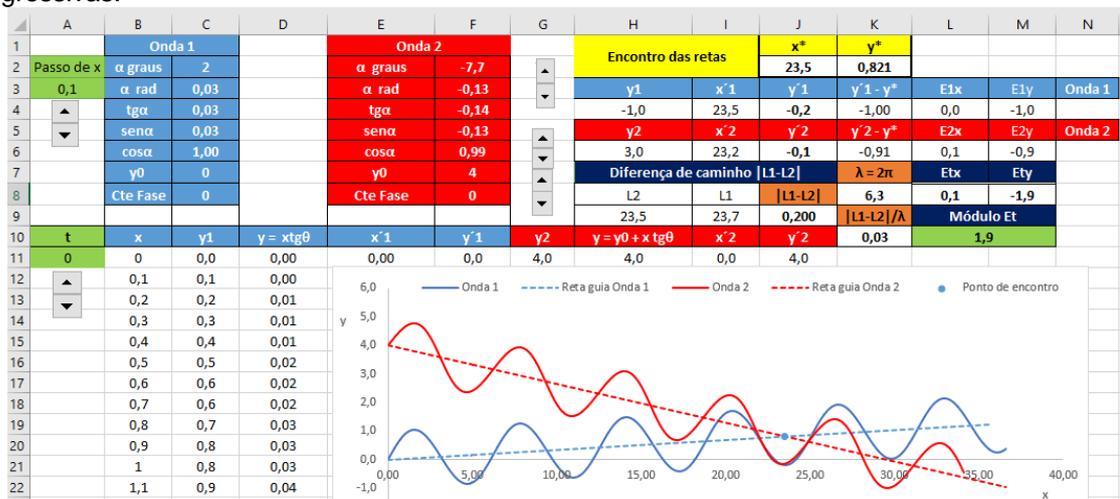
- Considerando o caso das constantes de fase nulas, podemos analisar a amplitude da onda resultante pela diferença de caminho $|L_2 - L_1|$ que as duas ondas percorrem até chegarem ao ponto de encontro. Se a diferença for igual a um número inteiro de meios comprimentos de onda a interferência será destrutiva, se for igual a um número inteiro de comprimentos de onda a interferência será construtiva.

$$|L_2 - L_1| = \frac{m}{2}\lambda \quad \text{com } m = 1,2,3 \dots \quad \text{interferência destrutiva} \quad (3.44)$$

$$|L_2 - L_1| = m\lambda \quad \text{com } m = 0,1,2,3 \dots \quad \text{interferência construtiva} \quad (3.45)$$

O resultado final da planilha é mostrado na figura 3.23.

Figura 3.23: Planilha para o estudo da interferência de duas ondas transversais, monocromáticas e progressivas.



Fonte: O autor.

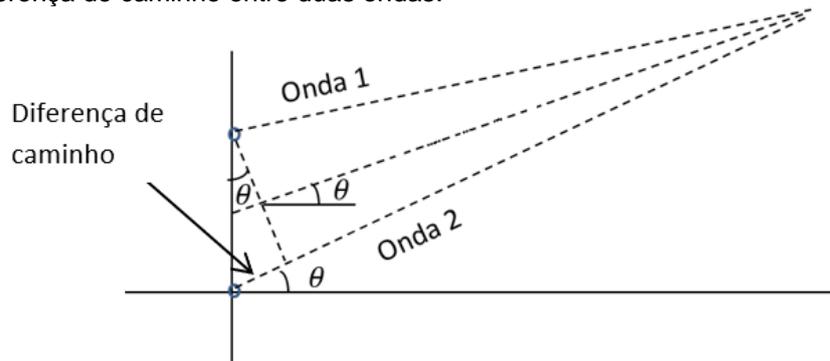
Dicas de utilização da planilha:

Escolhendo α graus para a onda azul e para a vermelha estamos escolhendo o ponto onde os cálculos de interferência serão realizados, podemos então variar o tempo e ver o que acontece com a amplitude do campo elétrico resultante “Módulo Et” na célula L10. Podemos escolher uma diferença de caminho nula, como por exemplo, $\alpha_{azul} = -\alpha_{vermelho}$ e constante de fase nula, deveríamos ter pela equação 3.45 um máximo de interferência. No entanto, ao variar o tempo o valor do Módulo Et varia de próximo de zero a próximo de dois! Escolhendo ainda uma constante de fase igual a π ao variar o tempo o valor do Módulo Et varia de próximo de zero a próximo de 0,17! Então percebemos que as equações 3.44 e 3.45 valem para o valor médio no tempo do campo total na posição escolhida, o que faz sentido quando observamos, por exemplo, os máximos em um experimento de fenda dupla, pois a luz oscila muito rápido ($\sim 10^{14}$ Hertz) e não temos condições de observar a sua variação no tempo.

3.10 INTENSIDADES NO PROBLEMA DE INTERFERÊNCIA EM FENDA DUPLA

Podemos usar o que foi apresentado na secção 3.3 para tratar o experimento para a interferência em fenda dupla. Consideremos então duas ondas eletromagnéticas partindo uma de cada fenda. Então, uma região de interferência construtiva, dessas duas ondas num ponto P de um anteparo ocorrerá se, a diferença de caminho entre elas, até o ponto P, for igual a um número inteiro de comprimentos de onda, como mostrado na figura 3.24.

Figura 3.24: Diferença de caminho entre duas ondas.



Fonte: O autor.

Se as intensidades dos campos elétricos das duas ondas são dadas por,

$$E_1(x, t) = E_0 \text{sen}(kx - wt), \quad (3.46)$$

$$E_2(x, t) = E_0 \text{sen}(kx - wt + \phi). \quad (3.47)$$

O campo elétrico resultante num certo ponto do espaço será igual a soma $E_1(x, t) + E_2(x, t)$:

$$E = E_1(x, t) + E_2(x, t) = E_0 \text{sen}(kx - wt) + E_0 \text{sen}(kx - wt + \phi). \quad (3.48)$$

Esta soma pode ser realizada com auxílio da relação:

$$\text{sen}(A) + \text{sen}(B) = 2 \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

onde, $A = kx - wt$ e $B = kx - wt + \phi$, com isso temos:

$$E = 2E_0 \text{sen}\left(kx - wt + \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right). \quad (3.49)$$

A intensidade da energia elétrica que chega num ponto x é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico, ou seja:

$$I \propto \left[2E_0 \text{sen}(2kx - 2wt + \phi) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]^2. \quad (3.50)$$

As variações, tanto espaciais quanto temporais de ondas eletromagnéticas na região do espectro visível são muito rápidas, em um segundo por exemplo o campo elétrico da luz vermelha varia 10^{14} vezes com um comprimento de onda $\lambda \approx 0,0000006$ metros, ou seja, em um milímetro temos quase 1700 comprimentos de

onda. Então o que vemos no anteparo é o valor médio dessa intensidade. O valor médio de $\text{sen}^2(2kx - 2\omega t + \phi)$ é $\frac{1}{2}$, assim,

$$I \propto 2E_0^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right). \quad (3.51)$$

No caso da onda representada pela equação (2.52) a intensidade no anteparo devido a uma das ondas é dada por $I_0 \propto \frac{E_0^2}{2}$, temos:

$$\frac{I}{I_0} = 4\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right). \quad (3.52)$$

Podemos explicitar a dependência da constante de fase ϕ com o ângulo de observação no anteparo pela relação:

$$\frac{\text{constante de fase}}{2\pi} = \frac{\text{diferença de caminho}}{\lambda}, \quad (3.53)$$

onde λ é o comprimento de onda das ondas, ou seja,

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{d \text{sen} \theta}{\lambda}. \quad (3.54)$$

onde d é a distância entre as fendas.

Finalmente obtemos a distribuição angular de intensidades para os máximos de interferência:

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d \text{sen} \theta}{\lambda}\right). \quad (3.55)$$

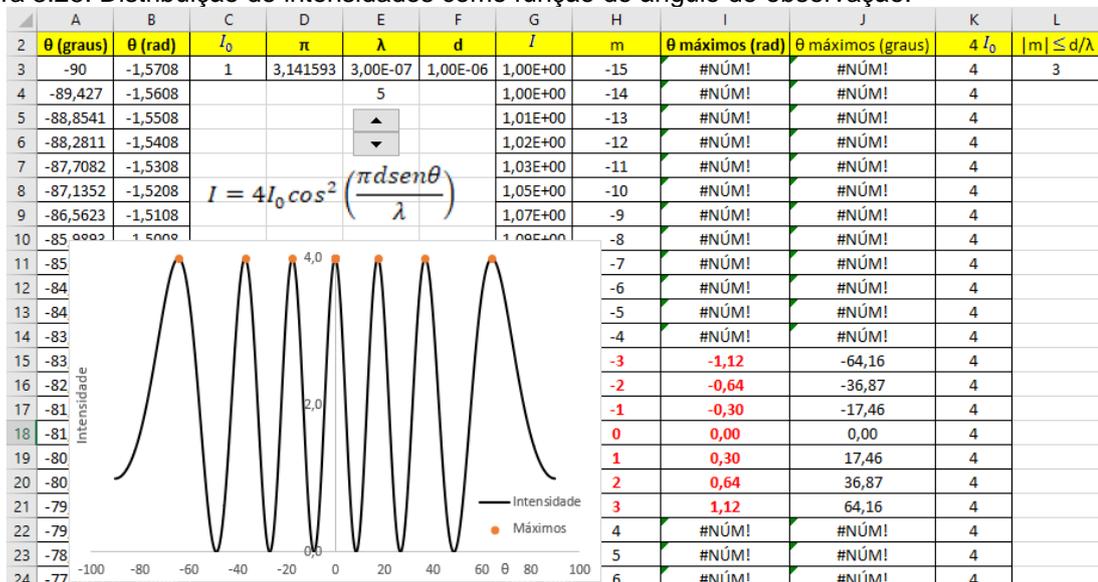
Podemos agora construir uma planilha para simular a equação (3.55).

- Vamos precisar varrer o ângulo θ para vários valores, podemos usar o intervalo $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.
- Temos que ter uma célula para o valor da intensidade I_0 .
- Também temos que ter os valores de λ e d , nesse caso é interessante poder variar o comprimento de onda com um botão.
- A intensidade resultante da interferência entre as duas ondas é calculada então pela equação (3.55).

- Temos condições então de traçar o gráfico da intensidade em função do ângulo θ .
- É interessante inserir no gráfico a localização dos máximos m de interferência, já que eles devem estar localizados nas intensidades máximas. Para isso, temos que variar m a partir de seu valor máximo dado por $m_{máx} = 0, \pm \frac{d}{\lambda}$ e que é obtido da necessidade de $\text{sen}\theta \leq 1$. A localização desses máximos é dada pela coordenada horizontal $\theta = \text{arcsen}\left(m \frac{\lambda}{d}\right)$ e podemos usar $4I_0$ como sendo a coordenada vertical.

O resultado da planilha é mostrado na figura 3.25.

Figura 3.25: Distribuição de intensidades como função do ângulo de observação.



Fonte: O autor.

Dicas para a utilização da planilha:

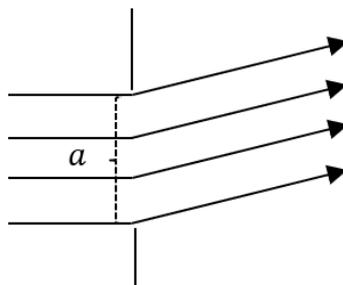
Podemos testar os limites para a relação entre comprimento de onda e distância entre as fendas, ou seja, para $\lambda > d$ somente o máximo central deve existir. Na célula L3 é mostrado a parte inteira da razão d/λ e o número de máximos é então duas vezes esse número inteiro mais o zero do máximo central, pela simetria do problema temos máximos com $m > 0$ e máximos com $m < 0$.

3.11 INTENSIDADE PARA A DIFRAÇÃO EM FENDA ÚNICA.

Anteriormente consideramos que somente uma onda atravessava uma fenda, ou seja, a fenda era muito pequena, mas agora vamos considerar que a fenda é

extensa e muitas ondas passam por ela ao mesmo tempo. A largura da fenda deve ser maior que o comprimento de onda da onda (monocromática e coerente) incidente sobre ela, a figura 3.26 mostra uma fenda de largura a e o anteparo onde são observadas as ondas está muito longe da fenda, ou seja, a distância D do anteparo as fendas é $D \gg a$. Este caso é conhecido como difração de Fraunhofer.

Figura 3.26: Fenda única de largura a , anteparo muito distante da fenda.



Fonte: O autor.

Fazendo $b = \frac{a}{2}$ podemos considerar que se uma onda saindo da parte superior da fenda interferir destrutivamente com outra saindo de b , todas as outras ondas da parte de cima da fenda terão interferência destrutiva com as de baixo, pois as diferenças de caminho são as mesmas.

O primeiro mínimo do espectro de difração ocorrerá em $\frac{a}{2} \text{sen}\theta = \frac{\lambda}{2}$, ou seja,

$$a \text{sen}\theta = \lambda. \quad (3.56)$$

Além disso, toda vez que separamos a largura a em um número N par de partes iguais, se o raio da parte de cima de uma das partes estiver defasado de $\frac{\lambda}{2}$ do raio da parte de baixo ocorrerá interferência destrutiva em toda a fenda, e teremos um mínimo de difração num ângulo em que $\frac{a}{N} \text{sen}\theta = \frac{\lambda}{2}$, ou seja,

$$a \text{sen}\theta = \frac{N}{2} \lambda. \quad (3.57)$$

onde $N = 2, 4, 6, \dots$

Ou então fazemos $m = \frac{N}{2}$ e teremos:

$$a \text{sen}\theta = m\lambda. \quad (3.58)$$

onde $m = 1, 2, 3 \dots$ localiza os mínimos.

Agora podemos analisar a distribuição de intensidades dessas ondas no anteparo. Considerando as diferenças de fase ϕ e de caminho $y \text{sen} \theta$, semelhante a equação (3.54), entre a primeira onda na parte superior da fenda e outra numa distância y temos:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} y \text{sen} \theta . \quad (3.59)$$

Além disso, $E(x, \phi, t) = E_0 \text{sen}(kx + \omega t + \phi)$ e para descobirmos qual é o campo total que chega em ponto P do anteparo em uma posição dada por θ , temos que resolver a integral:

$$E_t(x, y, t) = \frac{\int_0^a E(x, y', t) dy'}{\int_0^a dy'} . \quad (3.60)$$

que é o valor médio de campo elétrico que chega em um ponto do anteparo localizado em y , a variável de integração y' é contabilizada na fenda. De (3.59) obtemos a dependência de dy' com $d\phi$, ou seja,

$$dy' = \frac{\lambda}{2\pi \text{sen} \theta} d\phi . \quad (3.61)$$

Com essa mudança de variáveis a equação (3.60) torna-se:

$$E_t(x, \theta, t) = \frac{\lambda}{2\pi a \text{sen} \theta} \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda} a \text{sen} \theta} E_0 \text{sen}(kx + \omega t + \phi) d\phi . \quad (3.62)$$

O ângulo θ está relacionado à y por $t g \theta = \frac{y}{D}$ e resolvendo (3.62) temos,

$$E_t(x, \theta, t) = -\frac{\lambda E_0}{2\pi a \text{sen} \theta} \left[\cos \left(kx + \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} a \text{sen} \theta \right) - \cos(kx + \omega t) \right] . \quad (3.63)$$

E usando a identidade $\cos A - \cos B = 2 \text{sen} \frac{A+B}{2} \text{sen} \frac{B-A}{2}$, obtemos:

$$E_t(x, \theta, t) = \frac{\lambda E_0}{\pi a \text{sen} \theta} \left[\text{sen} \left(\frac{2kx + 2\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} a \text{sen} \theta}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi}{\lambda} a \text{sen} \theta \right) \right] . \quad (3.64)$$

E analogamente a (3.50) temos para a intensidade no anteparo:

SÉRIE
PRODUTOS EDUCACIONAIS EM ENSINO DE FÍSICA

VOLUME 1 – **Automatização de Experimentos de Física Moderna com o Kit Lego NXT Mindstorms**
Wanderley Marcilio Veronez, Gelson Biscaia de Souza, Luiz Américo Alves Pereira

VOLUME 2 – **O Arduino na Programação de Experiências em Termodinâmica e em Física Moderna**
Marilene Probst Novacoski, Luiz Américo Alves Pereira, Gelson Biscaia de Souza

VOLUME 3 – **Do Magnetismo à Lei da Indução Eletromagnética de Faraday**
Marlon Labas, Fábio Augusto Meira Cássaro

VOLUME 4 – **Estudando Astronomia, Aprendendo Física: Atividades Práticas de Observação do Sol**
Ana Caroline Pscheidt, Marcelo Emílio

VOLUME 5 – **Simulador Didático de Acomodação do Olho Humano**
Gustavo Trierweiler Anselmo, Júlio Flemming Neto, Antônio Sérgio Magalhães de Castro

VOLUME 6 – **Ensino dos Conceitos de Movimento e Inércia na Mecânica, a partir de uma Concepção de Ciência que não Utiliza a Lógica Binária**
Luiz Alberto Clabonde, Luiz Antônio Bastos Bernardes, Jeremias Borges da Silva

VOLUME 7 – **Uma Proposta de Utilização de Mídias Sociais no Ensino de Física com Ênfase à Dinâmica de Newton**
Heterson Luiz De Lara, Alexandre Camilo Junior, Jeremias Borges da Silva

VOLUME 8 – **O Eletromagnetismo e a Física Moderna através de Atividades Experimentais**
Ademir Kreпки Henisch, Jeremias Borges da Silva

VOLUME 9 – **Física Nuclear e Sociedade**
Tomo I – **Caderno do Professor**
Tomo II – **Caderno do Aluno**
Josicarlos Peron, André Vitor Chaves de Andrade

VOLUME 10 – **Conceituação e Simulação na Dinâmica do Movimento**
Tomo I – **Caderno do Professor**
Tomo II – **Caderno do Aluno**
Leandro Antonio dos Santos, Antônio Sérgio Magalhães de Castro

VOLUME 11 – **Montagem de um Painel Didático e Atividades Experimentais em Circuitos de Corrente Contínua**
Renato Dalzotto, Sérgio da Costa Saab, André Maurício Brinatti

VOLUME 12 – **Nas Cordas dos Instrumentos Musicais**
Luís Alexandre Rauch, André Maurício Brinatti, Luiz Fernando Pires

VOLUME 13 – **O Fóton em Foco: Relações entre Cor, Frequência e Energia de Radiações Eletromagnéticas**
Romeu Nunes de Freitas, André Maurício Brinatti, Jeremias Borges da Silva

VOLUME 14 –
Tomo I – **Iniciação em Robótica e Programação com Algumas Aplicações em Física**
Tomo II – **Tutorial: Tela Interativa com Controle do Nintendo Wii**
Hernani Batista da Cruz, Luiz Antônio Bastos Bernardes, Silvio Luiz Rutz da Silva

VOLUME 15 – **O Uso do Software Tracker no Ensino de Física dos Movimentos**
Edenilson Orkiel, Silvio Luiz Rutz da Silva

VOLUME 16 – **Acústica: Uma Nova Melodia de Ensino**
Elano Gustavo Rein, Luiz Antônio Bastos Bernardes

VOLUME 17 – **Caderno de Orientação a Educadores para a Transformação da Horta como Eixo Norteador de Ensino e Aprendizagem**
Roberto Pereira Strapazzon Bastos, Silvio Luiz Rutz da Silva

VOLUME 18 – **Proposta de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas para o Ensino de MRU e MRUV Utilizando Experimentos Visuais**

Gustavo Miguel Bittencourt Morski, André Vitor Chaves de Andrade

VOLUME 19 – **Cor à Luz da Física Moderna e Contemporânea**

Marcos Damian Simão, André Maurício Brinatti

VOLUME 20 – **Aplicação do Experimento de Hertz Atualizado no Ensino de Ondas Eletromagnéticas**

Luís Carlos Menezes Almeida Júnior, Luiz Américo Alves Pereira

VOLUME 21 – **Uma Proposta de Aplicação do Ensino de Termodinâmica no Ensino Fundamental I**

Cláudio Cordeiro Messias, Paulo César Facin

VOLUME 22 – **Uma Proposta de Ensino dos Conceitos Fundamentais da Mecânica Quântica no Ensino Médio: Espectroscopia com Lâmpadas**

Evandro Luiz De Queiroz, Antônio Sérgio Magalhães de Castro, Jeremias Borges da Silva

VOLUME 23 – **Produção de um Aparato Experimental para Medição de Campo Magnético Usando Arduino**

Ivonei Almeida, Luiz Américo Alves Pereira

VOLUME 24 – **Um Pouco Sobre a Natureza das Coisas**

Robson Lima Oliveira, André Maurício Brinatti

VOLUME 25 – **Equilíbrio: Uma Abordagem Experimental e Contextualizada do Conceito de Equilíbrio dos Corpos**

Osni Daniel De Almeida, André Vitor Chaves de Andrade

VOLUME 26 – **Como Medir a Temperatura do Sol? Inserindo Conceitos de Física Moderna no Ensino Médio**

Vilson Finta, Jeremias Borges da Silva

VOLUME 27 – **Elaboração de um Produto Educacional para a Materialização de Conceitos no Aprendizado de Óptica Geométrica Aplicada às Anomalias da Visão**

Danilo Flügel Lucas, Gérson Kniphoff da Cruz

VOLUME 28 – **Entendendo as Fases da Lua a Partir de um Material Instrucional Baseado no Método de Orientação Indireta**

Pâmela Sofia Krzysynski, Gérson Kniphoff da Cruz

VOLUME 29 – **“PEPPER’S GHOST”: Como Ensinar/Aprender Conceitos de Física Através de uma Simples Ilusão de Óptica**

Tomo I - Caderno do Professor

Tomo II - Caderno do Aluno

Gilvan Chaves Filho, Luiz Antônio Bastos Bernardes

VOLUME 30 – **O Movimento: do Clássico ao Relativístico**

Josué Duda, André Maurício Brinatti

VOLUME 31 – **Uma Sequência Didática Abordando a Eficiência Energética: Economizando Energia na Cozinha.**

Tomo I - Caderno de Ensino

Tomo II - Caderno de Aprendizagem

Rosivete Dos Santos Romaniuk, Julio Flemming Neto

VOLUME 32 – **Armazenamento e Produção de Energia Elétrica: Uma Abordagem para seu Estudo no Ensino Médio**

Jairo Rodrigo Corrêa, Sílvio Luiz Rutz da Silva, André Vitor Chaves de Andrade

VOLUME 33 – **Palestras de Astronomia para a Educação Básica**

Sergio Freitas, Sílvio Luiz Rutz da Silva

VOLUME 34 – **Experimentos em Eletromagnetismo**

Lorena de Lima Auer, Gelson Biscaia de Souza, André Vitor Chaves de Andrade

VOLUME 35 – **Ensino de Termologia com a Utilização de Metodologias Ativas e Programação Neurolinguística**

Michel De Angelis Nunes, Sílvio Luiz Rutz Da Silva

VOLUME 36 – Kit Eletricidade Prática: Uma Abordagem Construtivista por meio da Aprendizagem por Investigação

André Felipe Astrogildo De Lima, Sérgio da Costa Saab

VOLUME 37 – Simulações em Planilhas Eletrônicas do Microsoft Excel: Botões de Rotação como Ferramenta Auxiliar no Estudo do Campo Elétrico

Gaspar Gilmar Romaniuk, Paulo Cesar Facin, André Vitor Chaves de Andrade

VOLUME 38 – Da Eletrização à Interação a Distância

José Felipe Hneda, André Mauricio Brinatti

VOLUME 39 – Refração da luz sem o Uso de Laser: Uma Proposta de Sequência Didática Baseada em Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o Ensino de Refração da Luz

Elisiane Campos Oliveira Albrecht, André Vitor Chaves de Andrade

VOLUME 40 – Cinemática com uso de Planilhas Eletrônicas Excel®

Jair Ribeiro Junior, Paulo César Facin, André Vitor Chaves de Andrade

VOLUME 41 – Proposta de Ensino de Óptica da Visão Para o Ensino Médio

Francieli Jaqueline Noll Della Vechia, Silvio Luiz Rutz da Silva

VOLUME 42 – Guia de uma Aplicação PBL

Franciele Pastori, Silvio Luiz Rutz da Silva, André Vitor Chaves de Andrade

VOLUME 43 – Conhecendo o Arco Íris

Gabriel Roberto Garcia Levinski, Gérson Kniphoff da Cruz

VOLUME 44 – Contribuições de uma Sequência de Atividades no Processo de Ensino e Aprendizagem de Tópicos de Gravitação Universal na Educação Básica

Emerson Pereira Braz, André Vitor Chaves de Andrade, André Mauricio Brinatti

VOLUME 45 – Missão Aeroespacial Ultra Secreta (M.A.U.S.)

Luis Henrique Mendes De Souza, Silvio Luiz Rutz da Silva

Atribuição-NãoComercial-
Compartilha Igual 4.0 Internacional



MNPEF Mestrado Nacional
Profissional em
Ensino de Física

UEPG
Universidade Estadual
de Ponta Grossa

PPGF
ensino de física

SÉRIE
Produtos Educacionais em Ensino de Física

UEPG - PROPESP